УДК 533.72
DOI: 10.18384-2310-7251-2016-3-46-56

ТЕОРИЯ ТЕРМОФОРЕЗА ДУБЛЕТОВ КРУПНЫХ ТВЕРДЫХ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ДУБЛЕТОВ

Хасанов А.С.
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., 36, Российская Федерация

Аннотация. Решение задачи о термофорезе двух крупных твердых сферических гидродинамически взаимодействующих многослойных аэрозольных частиц получено операторным методом для произвольной ориентации дублетов. Формулы для скорости термофореза и угловой скорости вращения частиц для дублетов однородных и двухслойных частиц обобщены для многослойных частиц.

Ключевые слова: термофорез, аэрозольная частица, гидродинамическое взаимодействие.

THE THEORY OF THERMOPHORESIS FOR DOUBLETS OF LARGE SOLID SPHERICAL MULTILAYER AEROSOL PARTICLES FOR ANY ORIENTATION OF DOUBLETS

A. Khasanov
Plekhanov Russian University of Economics,
Stremyannyi per. 36, 117997 Moscow, Russia

Abstract. The problem of thermophoresis is solved by the operational method for two large solid spherical hydrodynamic interacting multilayer aerosol particles for any orientation of doublets. Formulas for the rate of the thermophoresis and angular velocity of rotation of particles for doublets of homogeneous and two-layer hydrodynamic interacting aerosol particles are generalized for multilayer particles.

Key words: thermophoresis, aerosol particles, hydrodynamic interaction.

1. Введение

Движение аэрозольной частицы в газовых средах под действием постоянного на большом удалении от частицы градиента температуры ∇T называется термофорезом. Причиной такого движения является неоднородность поля температуры на поверхности частицы. На неоднородность поля температуры на поверхности частицы влияют как близко расположенные другие частицы, так и неоднородность частиц по теплопроводности. В данной работе рассматриваются крупные [1] твёрдые сферические аэрозольные частицы. В случае таких частиц число Кнудсена $\lambda/a \ll 1$, где λ – средняя длина свободного пробега молекул окружающего частицу газа, a – радиус частицы. При описании движения крупных частиц газ рассматривается как сплошная среда и применяются методы гидродинамики. Взаимодействие газа с неоднородно нагретой поверхностью частицы приводит к тепловому скольжению [1] газа по её поверхности. В этих условиях создается действующий на частицу импульс, под действием которого она приходит в ускоренное движение. На частицу также действует сила вязкого сопротивления внешней среды, которая увеличивается с ростом скорости [2] и уравновешивает термофоретическую силу, что позволяет определить мгновенную термофоретическую скорость частицы, используя условие равенства нулю действующей на нее результирующей силы. В общем случае частица совершает и вращательное движение вокруг оси, проходящей через её центр масс. Мгновенную угловую скорость вращения частицы можно определить из условия равенства нулю действующего на нее результирующего крутящего момента.

Если аэрозольные частицы расположены близко, то возмущение в газе, вызванное движением одной частицы, влияет на движение другой частицы. Частицы начинают взаимодействовать гидродинамически. Термофоретическое движение двух одинаковых гидродинамически взаимодействующих крупных твердых сферических однородных аэрозольных частиц рассмотрено приближёнными методами в работе [3]. В работе [4] рассмотрено термофоретическое движение двух одинаковых гидродинамически взаимодействующих крупных твёрдых сферических многослойных аэрозольных частиц операторным методом в случае, когда движение дублета происходит вдоль линии центров параллельно градиенту температуры ∇T (в этом случае движение является осесимметрическим, вращение частиц отсутствует). Под многослойной частицей имеется в виду частица, состоящая из k сферических слоев: $0 \le r \le a_1$, $a_1 \le r \le a_2$, $a_2 \le r \le a_3$, …, $a_{k-1} \le r \le a_k$, где $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k = a$, $k \le 3$. Сферические слои считаются однородными. Коэффициент теплопроводности i-го слоя равен κ_i. В работе [5] рассмотрено термофоретическое движение двух одинаковых гидродинамически взаимодействующих крупных твердых сферических двухслойных аэрозольных частиц при произвольной ориентации дублета. Целью данной работы является обобщение результатов работ [4; 5] на случай дублетов многослойных частиц при произвольной ориентации дублета относительно градиента температуры ∇T.

2. Уравнения и граничные условия для полей температур

Пусть две одинаковые крупные твердые сферические многослойные аэрозольные частицы взвешены в однокомпонентном газе (воздух тоже приближённо можно рассматривать как однокомпонентный газ), в котором на большом удалении от этих частиц поддерживается постоянный градиент температуры ∇T. Поле температуры в газе, в котором градиент температуры постоянен и равен ∇T, а аэрозольные частицы отсутствуют, обозначим через T_∞. Пусть T_e – поле температуры в газе с учётом рассматриваемых аэрозольных частиц, T_0 – средняя температура газа в рассматриваемом объёме в поле T_∞, $T_a = |\nabla T| a$. Величина T_a/T_0 характеризует относительный перепад температуры на расстоянии в один радиус частицы. В реальных условиях $T_a/T_0 \ll 1$ [1].

Пусть O_1 и O_2 – центры частиц, O – середина отрезка O_1O_2, l – расстояние между центрами частиц, $\vec{l}$ – вектор O_1O_2, α – угол между векторами ∇T и $\vec{l}$. Выберем декартову систему координат *Oxyz*, в которой направление оси *Oz* совпадает с направлением вектора $\vec{l}$, координатная плоскость *Oxz* параллельна вектору ∇T. Везде, далее, r, θ, φ – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке *O*. Нумерация частиц и направление оси *Ox* выбраны так, что углы между вектором ∇T и единичными векторами $\vec{\imath}$, $\vec{k}$ не превосходят $\pi/2$. Путём параллельного переноса системы *Oxyz* в точки O_1 и O_2 получим системы координат, в которых записываются граничные условия на поверхностях частиц и их слоев. Везде далее r_j, θ_j, φ_j – сферические координаты точки в системе координат с началом в точке O_j, где $j \in \{1,2\}$.

Пусть $T_i^{(j)}$ – поле температуры в i-м слое j-й частицы, где $1 \le i \le k, j \in \{1,2\}$. Так как $T_a/T_0 \ll 1$, то поля $T_e, T_i^{(j)}$ можно изучать [1], решая уравнения $\nabla^2 T_e = 0, \nabla^2 T_i^{(j)} = 0$, где $1 \le i \le k, j \in \{1,2\}$. Граничные условия на поверхностях слоев имеют следующий вид: $T_{i-1}^{(j)} = T_i^{(j)}$ и $\kappa_{i-1}\frac{\partial T_{i-1}^{(j)}}{\partial r_j} = \kappa_i \frac{\partial T_i^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = a_{i-1}$, где $2 \le i \le k, j \in \{1,2\}$. На поверхностях частиц выполняются граничные условия $T_e = T_k^{(j)}$ и $\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r_j} = \kappa_k \frac{\partial T_k^{(j)}}{\partial r_j}$ при $r_j = a$ где κ_e - коэффициент теплопроводности газа, $j \in \{1,2\}$. На большом удалении от частиц возмущение поля температуры T_∞, вызванное аэрозольными частицами, исчезает: $\lim_{r\to\infty}(T_e - T_\infty) = 0$.

3. Решение уравнений теплопроводности

Поле температуры в газе T_e можно представить в виде [3] $T_e = T_\infty + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$, где $\varepsilon^{(j)}$ – возмущение поля T_∞, вызванное j-й частицей и удовлетворяющее условиям $\nabla^2\varepsilon^{(j)} = 0$ и $\lim_{r\to\infty}\varepsilon^{(j)} = 0$. Пусть, для определённости, T_0 – температура в точке O_1 в поле T_∞. Ясно, что $T_\infty = T_0 + \delta_{2j}\vec{l}\cdot\nabla T + \vec{r_j}\cdot\nabla T$, где δ_{ij} – символ Кронекера, а запись $\vec{a}\cdot\vec{b}$ означает скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть N – множество натуральных чисел, $Z_+ = N \cup \{0\}, n \in Z_+, m \in Z_+, m \le n, P_n(x)$ – многочлен Лежандра,

$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$ – присоединенная функция Лежандра первого рода, $Y_n^{(-m,j)} = P_n^{(m)}(cos\theta_j)cosm\varphi_j$, $Y_n^{(+m,j)} = P_n^{(m)}(cos\theta_j)sinm\varphi_j$ – сферические функции, $H_n^{(\pm m,j)} = r^n Y_n^{(\pm m,j)}$ и $H_{-n-1}^{(\pm m,j)} = r^{-n-1}Y_n^{(\pm m,j)}$ – объёмно-сферические функции, $j \in \{1,2\}$. Поля температур $T_i^{(j)}$ и возмущения $\varepsilon^{(j)}$ поля температуры T_∞ ищем в виде [6]

$T_1^{(1)} = T_0 + T_a\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} x_{nm}^{(1,1)}(r_1/a)^n Y_n^{(-m,1)}$,

$T_i^{(1)} = T_0 + T_a\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[x_{nm}^{(i,1)}(r_1/a)^n + y_{nm}^{(i,1)}(a/r_1)^{n+1}]Y_n^{(-m,1)}$, где $2 \le i \le k$,

$T_1^{(2)} = T_0 + \vec{l}\cdot\nabla T + T_a\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} x_{nm}^{(1,2)}(r_2/a)^n(-1)^{n+m}Y_n^{(-m,2)}$,

$T_i^{(2)} = T_0 + \vec{l}\cdot\nabla T + T_a\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[x_{nm}^{(i,2)}(r_2/a)^n + y_{nm}^{(i,2)}(a/r_2)^{n+1}](-1)^{n+m}Y_n^{(-m,2)}$, где $2 \le i \le k$,

$\varepsilon^{(1)} = T_a\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} x_{nm}^{(e1)}(a/r_1)^{n+1}Y_n^{(-m,1)}$,

$\varepsilon^{(2)} = T_a\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} x_{nm}^{(e2)}(a/r_2)^{n+1}(-1)^{n+m}Y_n^{(-m,2)}$, где $x_{nm}^{(i,j)}$, $y_{nm}^{(i,j)}$ и $x_{nm}^{(ej)}$ – неопределённые коэффициенты ($1 \le i \le k, j \in \{1,2\}$). Так как [2]

$$(-1)^{n+m} Y_n^{(\pm m,2)} (a/r_2)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(\pm m,1)}$$

при $r_1 < l$, где $t = a/l$, и $T_\infty = T_0 + \delta_{2j} \vec{l} \cdot \nabla T + \vec{r_j} \cdot \nabla T$, то в системе координат с центром в точке O_1 :

$$T_e = T_0 + \overrightarrow{r_1} \cdot \nabla T + T_a [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} x_{nm}^{(e1)} (a/r_1)^{n+1} Y_n^{(-m,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e2)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_1/a)^s Y_s^{(-m,1)}]$$

при $r_1 < l$. Так как [2]

$$Y_n^{(\pm m,1)} (a/r_1)^{n+1} = \sum_{s=m}^{\infty} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(\pm m,2)}$$

при $r_2 < l$, то в системе координат с центром в точке O_2 при $r_2 < l$

$$T_e = T_0 + \vec{l} \cdot \nabla T + \overrightarrow{r_2} \cdot \nabla T + T_a [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} x_{nm}^{(e2)} (a/r_2)^{n+1} (-1)^{n+m} Y_n^{(-m,2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{s=m}^{\infty} x_{nm}^{(e1)} C_{n+s}^{n-m} t^{n+s+1} (r_2/a)^s (-1)^{s+m} Y_s^{(-m,2)}.$$

Из граничных условий для полей температур можно найти неопределённые коэффициенты операторным методом [5], в котором нахождение неопределённых коэффициентов сводится к нахождению бесконечномерных векторов. Пусть l_1 – полное линейное нормированное пространство [7], состоящее из векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$. В l_1 $\|X\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Ясно, что $E = (1,0,0, \dots)^T \in l_1$, пусть L – пространство ограниченных линейных операторов, действующих из l_1 в l_1, а $L_1^{(M)}$ – пространство матриц A с бесконечным числом строк и столбцов с нормой $\|A\| = \sup\limits_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Любой оператор $B \in L$ можно задать с помощью матрицы $A \in L_1^{(M)}$ по формуле $BX=AX$, где $X \in l_1$, AX – произведение матрицы A на вектор X. Норма такого оператора, согласованная с нормой вектора X, совпадает с нормой $\|A\| = \sup\limits_n \sum_{s=1}^{\infty} |a_{sn}|$. Основываясь на этом взаимно-однозначном соответствии между $L_1^{(M)}$ и L, для матрицы и соответствующего ей линейного оператора будем использовать одно и то же обозначение.

Определим матрицы, которые будут нужны для решения уравнений теплопроводности. Везде, далее, запись $(A)_{sn}$ означает элемент с индексами s и n матрицы A, где $s \in N$, $n \in N$. Определим сначала диагональную матрицу $\Lambda_e^{(k)}$. Для любого i, где $0 \le i \le k-1$, определим величины $\chi_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$ и $\tau_i = \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}$, где $a_0 = 0$, $\kappa_0 = \kappa_1$. Ясно, что $\chi_0 = 0$, $\tau_0 = 1$. Пусть $\tau = \frac{\kappa_e}{\kappa_k}$ и $\varphi_s = (1-x)/[1+(1+1/s)x]$, где s - произвольное натуральное число, а $x \neq -s/(s+1)$. Для любого натурального числа s определим еще один набор из k чисел по рекуррентной формуле $\tau'_{is} = \tau_i \varphi_s(\chi_{i-1}^{2s+1}\varphi_s(\tau'_{i-1,s}))$, где $1 \le i \le k-1$, а $\tau'_{0s} = \tau_0 = 1$. Элементы диагональной матрицы $\Lambda_e^{(k)}$ определяются по формуле $(\Lambda_e^{(k)})_{sn} = \varphi_s(\tau\varphi_s\left(\chi_{k-1}^{2s+1}\varphi_s(\tau'_{k-1,s})\right))\delta_{sn}$. Пусть матрицы $M^{(m)}$ при $m \in \{0,1\}$ определены по формулам $(M^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m}t^{n+s+1}$. Можно доказать, что операторы $M^{(m)}$ при $m \in \{0,1\}$ является сжимающими, а так как $\left\|\Lambda_e^{(k)}\right\| \le 1$, то отсюда следует [7], что $(E \pm M^{(0)}\Lambda_e^{(k)})^{-1} \in L$, $(E \pm M^{(1)}\Lambda_e^{(k)})^{-1} \in L$, где E – единичный оператор. Диагональную матрицу $\Lambda^{(2)}$ определим по формуле $(\Lambda^{(2)})_{sn} = s(s+1)\delta_{sn}$.

Пусть линейное пространство l'_1 состоит из векторов $X = (x_1, x_2, \dots)^T$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty}|i^\alpha x_i| < +\infty$ при $\forall\alpha \in Z_+$. Ясно, что l'_1 является подпространством пространства l_1. Можно доказать, что $\Lambda^{(2)}(E - \Lambda_e^{(k)})(E + M^{(1)}\Lambda_e^{(k)})^{-1}E_1 \in l'_1$, $\Lambda^{(2)}(E - \Lambda_e^{(k)})(E - M^{(0)}\Lambda_e^{(k)})^{-1}E_1 \in l'_1$. Зафиксируем значения θ_j и φ_j. Пусть R^∞ – линейное пространство всевозможных бесконечных числовых последовательностей $X = (x_1, x_2, \dots)$, а запись $[X]_i$ означает i-ю координату элемента $X \in R^\infty$. Для значений $m \in \{0,1\}$ и $j \in \{1,2\}$ определим четыре элемента $P^{(m,j)}$ (т.е. $P^{(0,1)}$, $P^{(1,1)}$, $P^{(0,2)}$, $P^{(1,2)}$) пространства R^∞ по формулам $[P^{(m,1)}]_i = Y_i^{(-m,1)}$, $[P^{(m,2)}]_i = (-1)^{i+m}Y_i^{(-m,2)}$. Так как $Y_n^{(-m,j)} = P_n^{(m)}(cos\theta_j)cosm\varphi_j$, а $\left|P_n^{(0)}(cos\theta_j)\right| \le 1$ и $\left|P_n^{(1)}(cos\theta_j)\right| \le n(n+1)/2$, то этим четырем элементам $P^{(m,j)}$ соответствуют линейные функционалы, определённые на линейном пространстве l'_1 по формулам $P^{(m,j)}X = \sum_{i=1}^{\infty}[P^{(m,j)}]_i x_i$, где $X = (x_1, x_2, \dots)^T \in l'_1$. Для обозначения элемента пространства R^∞ и порожденного им линейного функционала на l'_1 будем использовать одно и то же обозначение. Мы не будем приводить формулу для поля температуры в газе T_e, записанную с использованием линейных операторов и функционалов, а приведём только две формулы, которые нам нужны будут для решения гидродинамической части задачи. На поверхности первой частицы, т.е. при $r_1 = a$ и любых θ_1, φ_1

$$\nabla^2(T_e|_{r_1=a}) = -|\nabla T|/a\,[\sin\alpha\, P^{(1,1)}\Lambda^{(2)}\left(E-\Lambda_e^{(k)}\right)\left(E+M^{(1)}\Lambda_e^{(k)}\right)^{-1}E_1 + \cos\alpha P^{(0,1)}\,\Lambda^{(2)}\left(E-\Lambda_e^{(k)}\right)\left(E-M^{(0)}\Lambda_e^{(k)}\right)^{-1}E_1]. \qquad (1)$$

На поверхности второй частицы, т.е. при $r_2 = a$ и любых θ_2, φ_2

$$\nabla^2(T_e|_{r_2=a}) = -|\nabla T|/a\,[\sin\alpha\, P^{(1,2)}\Lambda^{(2)}\left(E-\Lambda_e^{(k)}\right)\left(E+M^{(1)}\Lambda_e^{(k)}\right)^{-1}E_1 - \cos\alpha P^{(0,2)}\,\Lambda^{(2)}\left(E-\Lambda_e^{(k)}\right)\left(E-M^{(0)}\Lambda_e^{(k)}\right)^{-1}E_1]\,. \qquad (2)$$

4. Уравнения и граничные условия для полей скорости и давления

Зная поле температуры в газе T_e, можно решать гидродинамическую часть задачи. Из условия $T_a/T_0 \ll 1$ следует, что число Рейнольдса является величиной малой [1], поля скорости и давления в газе могут быть определены при граничных условиях, имеющих место в данный момент времени, из квазистационарных уравнений Стокса $\eta\nabla^2\vec{v} = \nabla p$, $\nabla\cdot\vec{v}=0$, где $\lim\limits_{r\to\infty}|\vec{v}| = 0$ (газ покоится вдали от частиц) и $\lim\limits_{r\to\infty} p = p_{e\infty}$ (вдали от частиц возмущение поля давления, исходящее от движущихся частиц, исчезает). Пусть $\vec{U}^{(j)}$ – мгновенная термофоретическая скорость j-й частицы, а $\vec{\omega}^{(j)}$ – её мгновенная угловая скорость вращения. На поверхности движущейся j-й частицы генерируется поле скорости $\vec{V}^{(j)}$ в газе:

$$\vec{V}^{(j)} = \vec{U}^{(j)} + [\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r_j}] + \frac{K_{Tsl}\eta}{T_0\rho_e a}\nabla_{\theta_j,\varphi_j}T_e, \qquad (3)$$

где $r_j = a$, $[\vec{\omega}^{(j)}, \vec{r_j}]$ – векторное произведение $\vec{\omega}^{(j)}$ и $\vec{r_j}$, $\nabla_{\theta,\varphi}T_e = \vec{i}_\theta\frac{\partial T_e}{\partial\theta} + \vec{i}_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial T_e}{\partial\varphi}$, а K_{Tsl}, ρ_e, η – соответственно, коэффициент теплового скольжения, плотность и динамическая вязкость газа. Поле $\vec{v}$ удовлетворяет граничным условиям $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$, где $j \in \{1,2\}$. Термофоретическая скорость j-й частицы $\vec{U}^{(j)}$ определяется из условия равенства нулю действующей на нее результирующей силы $\vec{F}^{(j)}$. Угловая скорость вращения $\vec{\omega}^{(j)}$ j-й частицы определяется из условия равенства нулю действующего на неё результирующего крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$.

5. Решение уравнений гидродинамики

Поля скорости $\vec{v}$ и давления p в газе будем искать в виде $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}$, $p = p_{e\infty} + p^{(1)} + p^{(2)}$, где $\vec{v}^{(j)}, p^{(j)}$ – возмущения, вызванные движением j-й частицы и определяемые из уравнений $\eta\nabla^2 \vec{v}^{(j)} = \nabla p^{(j)}$, $\nabla\cdot\ \vec{v}^{(j)}$=0, где $\lim\limits_{r_j\to\infty}\left|\vec{v}^{(j)}\right| = 0$ и $\lim\limits_{r_j\to\infty} p^{(j)} = 0$. Поля $\vec{v}^{(j)}, p^{(j)}$ ищем в виде [2-3]:

$\vec{v}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty}[\nabla\Phi_{-n-1}^{(j)} + \nabla\times\left(\vec{r}_j\chi_{-n-1}^{(j)}\right) - \frac{(n-2)r_j^2}{2\eta n(2n-1)}\nabla p_{-n-1}^{(j)} + \frac{(n+1)\vec{r}_j}{\eta n(2n-1)}p_{-n-1}^{(j)}]$,

$p^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n-1}^{(j)}$,

где $\Phi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1}\sum_{m=0}^{n} A_{nm}^{(j)}\, Y_n^{(-m,j)}$, $p_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1}\sum_{m=0}^{n} D_{nm}^{(j)}\, Y_n^{(-m,j)}$, $\chi_{-n-1}^{(j)} = r_j^{-n-1}\sum_{m=0}^{n} C_{nm}^{(j)}\, Y_n^{(+m,j)}$, а $A_{nm}^{(j)}$, $D_{nm}^{(j)}$, $C_{nm}^{(j)}$ – неопределённые коэффициенты. Неопределённые коэффициенты можно найти из граничных условий $\vec{v} = \vec{V}^{(j)}$ при $r_j = a$, учёт которых равносилен [2] учёту следующих трех условий при $r_j = a$: $v_{r_j} = r_j^{-1}\vec{r}_j\cdot\vec{V}^{(j)}$, $r_j\frac{\partial v_{r_j}}{\partial r_j} = -r_j\nabla\cdot\vec{V}^{(j)}$, $\vec{r}_j\cdot\nabla\times\vec{v} = \vec{r}_j\cdot\nabla\times\vec{V}^{(j)}$, где $j\in\{1{,}2\}$. Из этих условий можно найти неопределённые коэффициенты операторным методом, в котором нахождение неопределённых коэффициентов сводится к нахождению бесконечномерных векторов [5]. При записи граничного условия (3) на операторном языке используются формулы (1)–(2).

Приведём только окончательные формулы для скоростей $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$. Для этого введем определения. Пусть $m\in\{0{,}1\}$,

$\gamma_{sn}^{(m)} = \frac{(s-m)(s+m)[sn-2(s+n)+1]}{s(2s-1)(n+1)(n+s)} + \frac{2-n}{2(n+1)}$, $\beta_{sn} = \frac{n(2n-1)}{2(n+1)(2s+3)}$, где $s\in n$, $n\in N$.

Определим матрицы с бесконечным числом строк и столбцов по формулам

$(M_{\beta}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m}t^{n+s+1}\beta_{sn}$, $(M_{\gamma}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m}t^{n+s-1}\gamma_{sn}^{(m)}$,

$(M_{\omega 1}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m}t^{n+s}\, m/s$, $(M_{\omega 2}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m}t^{n+s+1}\, n/(s+1)$,

$(M_{\omega 3}^{(m)})_{sn} = C_{n+s}^{n-m}t^{n+s}\, m(2n-1)/[s(s+1)(n+1)]$.

Следующие матрицы являются диагональными и определены по формулам

$(\Lambda_1)_{sn} = -(s+1)/s\,\delta_{sn}$, $(\Lambda_4)_{sn} = (s+1)\delta_{sn}$, $(\Lambda_5)_{sn} = (2s+3)\delta_{sn}$, $(\Lambda_6)_{sn} = (2s+1)\delta_{sn}$.

Пусть:

$R^- = \Lambda_5 M_{\beta}^{(0)} + \Lambda_6 M_{\gamma}^{(0)} - \Lambda_6 M^{(0)}\Lambda_1^{-1}\left(E - M^{(0)}\Lambda_1^{-1}\right)^{-1}(0{,}5E - M_{\beta}^{(0)} - M_{\gamma}^{(0)})$,

$R^{+}=\Lambda_5 M_{\beta}^{(1)}+\Lambda_6 M_{\gamma}^{(1)}+\Lambda_6 M_{\omega 1}^{(1)}\left(E+M_{\omega 2}^{(1)}\right)^{-1} M_{\omega 3}^{(1)}-\Lambda_6 M^{(1)} \Lambda_1^{-1}\big(E+$ $M^{(1)} \Lambda_1^{-1}\big)^{-1}[0{,}5 E+M_{\beta}^{(1)}+M_{\gamma}^{(1)}+M_{\omega 1}^{(1)}\left(E+M_{\omega 2}^{(1)}\right)^{-1} M_{\omega 3}^{(1)}]$.

Для $\Lambda \in \{\Lambda_1^{-1}, \Lambda_e^{(k)}\}$ определим функции:

$f^{-}(t,\Lambda)=E_1^T(E-R^{-})^{-1}\Lambda_4(E-\Lambda)(E-M^{(0)}\Lambda)^{-1}E_1,$

$f^{+}(t,\Lambda)=E_1^T(E+R^{+})^{-1}\Lambda_4(E-\Lambda)(E+M^{(1)}\Lambda)^{-1}E_1,$

$f^{+\omega}(t,\Lambda)=E_1^T\left(E+M_{\omega 2}^{(1)}\right)^{-1} M_{\omega 3}^{(1)}(E+R^{+})^{-1}\Lambda_4(E-\Lambda)(E+M^{(1)}\Lambda)^{-1}E_1,$

$f_{\omega}^{+}(t,\Lambda)=E_1^T(E+R^{+})^{-1}\Lambda_4(E-\Lambda)(E+M^{(1)}\Lambda)^{-1}M_{\omega 1}^{(1)}\left(E+M_{\omega 2}^{(1)}\right)^{-1}E_1,$

$f_{\omega}^{+\omega}(t,\Lambda)=E_1^T\left(E+M_{\omega 2}^{(1)}\right)^{-1}E_1+E_1^T\left(E+M_{\omega 2}^{(1)}\right)^{-1}M_{\omega 3}^{(1)}(E+R^{+})^{-1}\Lambda_4(E-$ $\Lambda)(E+M^{(1)}\Lambda)^{-1}M_{\omega 1}^{(1)}\left(E+M_{\omega 2}^{(1)}\right)^{-1}E_1,$

$h^{+}(t,\Lambda)=f^{+\omega}(t,\Lambda)/f^{+}(t,\Lambda),\ g^{+}(t,\Lambda)=f_{\omega}^{+\omega}(t,\Lambda_1^{-1})-h^{+}(t,\Lambda)f_{\omega}^{+}(t,\Lambda_1^{-1}).$

Можно доказать корректность всех приведенных формул [5]. Пусть

$u^{-}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)=\frac{f^{-}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)f^{-}(0,\Lambda_1^{-1})}{f^{-}(t,\Lambda_1^{-1})f^{-}\left(0,\Lambda_e^{(k)}\right)},\ u^{+}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)=\frac{f^{+}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)f^{+}(0,\Lambda_1^{-1})g^{+}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)}{f^{+}(t,\Lambda_1^{-1})f^{+}\left(0,\Lambda_e^{(k)}\right)g^{+}(t,\Lambda_1^{-1})}.$

После нахождения неопределённых коэффициентов и выражений для результирующей силы $\vec{F}^{(j)}$ и результирующего крутящего момента $\vec{T}^{(j)}$, находим формулы для скоростей $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$:

$$\vec{U}^{(j)}=-\frac{2K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{3T_0\rho_e}[1-\left(\Lambda_e^{(k)}\right)_{11}][u^{+}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)\sin\alpha\,\vec{i}+u^{-}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)\cos\alpha\vec{k}], \quad (4)$$

$$\vec{\omega}^{(j)}=(-1)^j\frac{K_{Tsl}\eta|\nabla T|}{T_0\rho_e a}\frac{f^{+}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)}{g^{+}(t,\Lambda_1^{-1})}[h^{+}(t,\Lambda_1^{-1})-h^{+}\left(t,\Lambda_e^{(k)}\right)]\sin\alpha\,\vec{j}. \quad (5)$$

6. Заключение

Решение задачи о термофорезе двух крупных твёрдых сферических многослойных аэрозольных частиц может быть получено операторным методом при любой ориентации дублета относительно градиента температуры ∇T. Формулы (4)–(5) содержат бесконечномерные матрицы. Но на основе этих точных формул можно составить вычислительные схемы для приближённых вычислений с любой степенью точности, для которых достаточны возможности программы Excel [5]. Из них могут быть выведены формулы для скоростей $\vec{U}^{(j)}$ и $\vec{\omega}^{(j)}$ с точностью до $o(t^n)$, где n – заданное натуральное число. Так как коэффициенты теплопроводности слоев частицы могут совпадать, из формул (4)–(5) можно вывести формулы для дублетов однородных и двухслойных частиц при любой ориентации дублетов. Путём предельного перехода при $t \to 0$ из них можно получить формулы для скорости термофореза одиночных однородных, двухслойных и многослойных частиц. Практически любую неоднородную частицу можно приближённо рассматривать как многослойную, разбивая её на большое количество слоев. Полученные формулы позволяют учитывать неоднородность частиц при описании движения дублета при любой её ориентации. Расчёты показывают, что игнорировать объёмные особенности частиц нельзя.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Яламов Ю.И., Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
2. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
3. Яламов Ю.И., Мелехов А.П., Гайдуков М.Н. Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 337–341.
4. Яламов Ю.И., Хасанов А.С. Теория термофореза двух гидродинамически взаимодействующих многослойных аэрозольных частиц // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика. 2007. № 1. С. 30–41.
5. Хасанов А.С., Арсланов И.М. Теория термофореза дублетов двухслойных частиц с учётом скачка температуры на их поверхности при произвольной ориентации дублетов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2009. № 1–2. С. 31–45.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

REFERENCES

1. Yalamov YU.I., Galoyan B.C. Dinamika kapel' v neodnorodnykh vyazkikh sredakh [Dynamics of droplets in an inhomogeneous viscous media]. Yerevan, Luis, 1985. 208 p.
2. KHappel' Dzh., Brenner G. Gidrodinamika pri malykh chislakh Reinol'dsa [Hydrodynamics at small Reynolds numbers]. M., Mir, 1976. 632 p.
3. Yalamov YU.I., Melekhov A.P., Gaidukov M.N. Termoforez gidrodinamicheski vzaimodeistvuyushchikh aerozol'nykh chastits [The thermophoresis of hydrodynamically

interacting particles] // Doklady AN SSSR. Vol. 287. 1986. no. 2. pp. 337–341.
4. Yalamov YU.I., Khasanov A.S. Teoriya termoforeza dvukh gidrodinamicheski vzaimodeistvuyushchikh mnogosloinykh aerozol'nykh chastits [Theory of thermophoresis of two hydrodynamically interacting multi-layered aerosol particles] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika. 2007. no. 1. pp. 30–41.
5. Khasanov A.S., Arslanov I.M. Teoriya termoforeza dubletov dvukhsloinykh chastits s uchetom skachka temperatury na ikh poverkhnosti pri proizvol'noi orientatsii dubletov [Theory of thermophoresis of doublets of two-layer particles taking into account the jump of the temperature on the surface at an arbitrary orientation of the doublets] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2009. no. 1–2. pp. 31–45.
6. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. M., Nauka, 1972. 735 p.
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M., Nauka, 1976. 542 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Khasanov Anis Salyakhovich - doctor of physical and mathematical sciences, Professor of Higher Mathematics Department, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Хасанов А.С. Теория термофореза дублетов крупных твердых сферических многослойных аэрозольных частиц для произвольной ориентации дублетов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 46-56.
DOI: 10.18384-2310-7251-2016-3-46-56.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Khasanov. The theory of thermophoresis for doublets of large solid spherical multilayer aerosol particles for any orientation of doublets // Bulletein of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 46-56.
DOI: 10.18384-2310-7251-2016-3-46-56.