РАЗДЕЛ III.
ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 517
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Российская Федерация

Аннотация. Авторы делятся опытом использования возможностей интерактивных компьютерных систем MathCAD и MatLab при решении математических задач в процессе обучения будущих инженеров. Авторы утверждают, что применение математических пакетов в обучении существенно активизирует освоение математических понятий, теорем и методов решения задач, а также способствует дальнейшему их применению для выполнения инженерных и научных расчётов.

Ключевые слова: MathCAD, MatLab, модульно-рейтинговая система, операционная среда, методы вычислений.

THE USE OF ELECTRONIC MATHEMATICAL SOFTWARE IN TEACHING MATHEMATICS

E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev
Bauman Moscow State Technical University,
2-ya Baumanskaya ul. 5, 105005 Moscow, Russia

Abstract. We share our experience in the use of interactive computer MathCAD and MatLab systems in solving mathematical problems in the training process of future engineers. The application of mathematical packages in education significantly stimulates the development of mathematical concepts, theorems and methods for solving problems, and also contributes to their further application to perform engineering and scientific calculations

Keywords: MathCAD, MatLab, module-rating system, operating environment, methods of computation.

Целью данной работы является описание опыта применения в учебном процессе интерактивных компьютерных систем MathCAD и MatLab в рамках дисциплин математического образования.

На факультете фундаментальных наук МГТУ им. Н.Э. Баумана проводится экспериментальная работа по использованию возможностей математических пакетов (МП) при решении математических задач в процессе обучения будущих инженеров. Посредством систематического решения задач в значительной степени решаются важные дидактические задачи при обучении математике – овладение студентами глубокими и прочными знаниями, формирование у них сознательных и прочных умений и навыков, развитие продуктивного, эвристического, творческого мышления. Использование МП существенно активизирует освоение математических понятий, теорем и методов решения задач, а также способствует дальнейшему применению МП для выполнения инженерных и научных расчётов. В совокупности с модульно-рейтинговой системой организации учебного процесса использование МП эффективно способствует развитию мотивационных стимулов обучения студентов [1–3].

Надо отметить, что с точки зрения использования в обучении математики, наиболее перспективными в настоящий момент мы считаем интенсивно развивающиеся системы MathCAD и MatLab, обладающие следующими преимуществами:

- содержат встроенную матричную и комплексную арифметику;
- поддерживают выполнение операций с векторами, матрицами и массивами данных, реализуют спектральное и сингулярное разложения, расчёт ранга матриц, поддерживают работу с алгебраическими полиномами, решение нелинейных уравнений и задач оптимизации, интегрирование функций в квадратурах, численное интегрирование дифференциальных и разностных уравнений, построение разнообразных видов графиков функций, трехмерных поверхностей и линий уровня;
- используют общепринятый способ изображения математических объектов и удобную операционную среду, которая позволяет формулировать проблемы и получать решения в обычной математической форме, не прибегая к рутинному программированию;
- позволяют решать многие вычислительные задачи с высокой точностью и за значительно меньшее время, чем то, которое необходимо для написания соответствующих программ на языках программирования;
- отличаются «открытостью», то есть легкостью их модификаций и адаптации к конкретным задачам пользователя; пользователь может ввести в систему любую новую команду, оператор или функцию и пользоваться потом ими так же просто, как и встроенными операторами и функциями.
- имеют собственные весьма простые пользовательские языки программирования, близкие к языку BASIC, посильному любому начинающему;
- дают возможность редактировать программы при помощи любого текстового редактора, в том числе Word;
- обладают широкими возможностями создания разнообразных плоских и пространственных графиков с их последующим форматированием и просмотром, а также получения в одной графической области комбинации нескольких кривых или поверхностей разного типа с быстрым построением трёхмерных графиков.

Так, работа в среде MatLab может осуществляться в двух режимах:

1) в режиме калькулятора, когда вычисления осуществляются сразу после набора очередного оператора или команды MatLab;

2) путём вызова имени программы, написанной на языке MatLab, предварительно составленной и записанной на диске, которая содержит все необходимые команды, обеспечивающие ввод данных, организацию вычислений и вывод результатов на экран (программный режим).

В обоих режимах пользователю доступны практически все вычислительные возможности системы, в том числе по выводу информации в графической форме.

Возможности такой системы огромны, а по скорости выполнения задач она опережает многие другие подобные системы. Все эти особенности делают систему MatLab весьма привлекательной для использования в учебном процессе высших учебных заведений.

На начальном этапе эксперимента стояли вопросы, связанные с методологией использования математических пакетов в учебном процессе: излагать или не излагать на лекциях принципы работы МП; как должно проходить ознакомление и приобретение навыков работы с МП (в частности, с MatLab); как, где и при решении каких математических задач надо оправданно использовать возможности МП; какие цели должны быть достигнуты при разумной интеграции традиционных учебных занятий и занятий с использованием современных компьютерных средств.

Ещё одна проблема, которую нужно было решать, состояла в том, что многие преподаватели, включая даже тех, кто был знаком с МП, использовали их в своих узких сиюминутных целях, далёких от учебного процесса, не знали всех возможностей математических пакетов. В этих условиях пришлось обратиться за помощью в представительство разработчиков MatLab и организовать для преподавателей курсы по освоению возможностей этой системы. Такие занятия, несомненно, принесли огромную пользу не только в изучении тонкостей системы MatLab, но и помогли обрисовать сферы применимости её в учебном процессе.

Стало понятным, что для того, чтобы сохранить уровень знаний студентов, который мы имеем на сегодняшний день, нужно постепенно внедрять в учебный процесс новые методы преподавания, включающие использование современных компьютерных средств. Если форсировать процесс широкого применения МП в учебном процессе, то можно скатиться к обучению тупому нажиманию на кнопки, после которого интеграл в голове студента, кроме как ассоциации с крючком, ничего не вызовет.

В связи с этим было решено:

1. На лекциях по курсам математики принципы работы математических пакетов не излагать, но изыскать возможность включить в лекции темы: численные методы решения нелинейных уравнений, аппроксимация функций, СЛАУ, численное интегрирование, численное решение дифференциальных уравнений.
2. Разработать краткие инструкции по использованию математических пакетов, дать ссылки на интернет-ресурсы, обучающие программы и т.д.
3. Решать проблемы с техническими средствами обучения – увеличить количество персональных компьютеров, переоборудовать аудитории под возможность использовать ПЭВМ в учебном процессе.
4. Ознакомление студентов с математическими пакетами, их возможностями и принципами работы с ними должно проходить на специальных тематических факультативных лекциях-семинарах и закрепляться в ходе их самостоятельной работы при консультативной поддержке со стороны преподавателей.
5. По теме каждого занятия часть задач необходимо решать в среде MathCAD или MatLab.
6. Выполнение домашних заданий (типовых и текущих) предполагает применение МП.

Решение математических задач с использованием MathCAD и MatLab позволяет проанализировать возможность либо точного решения задачи, либо применение численного метода на основе оценки степени сложности такого решения. При возможности точного решения задачи системы имеют средства её решения, а при решении задачи только численным методом системы допускают как прямые, так и итерационные методы вычислений.

При использовании МП открылась возможность уделять больше времени методологии решения математической задачи (обсуждать условия задачи, возможные методы её решения, полученные результаты), переложив выполнение рутинных операций на вычислительную среду.

Применение МП позволило создавать для некоторых типов задач шаблоны решения, позволяющие изменяя исходные данные задачи, получать полное решение с изменением промежуточных и конечных результатов в виде аналитических зависимостей или графических изображений.

Есть интересные задачи, включающие иллюстрацию теоретического материала (техника «$\varepsilon - \delta$», геометрический смысл теоремы Лагранжа, теоремы о среднем и т.д.) [4].

В качестве иллюстрации применения МП в учебном процессе рассмотрим выполнение типового домашнего задания по исследованию функций и решение прикладных задач на экстремум.

Исследование функций и построение графиков

Рассмотрим типовое домашнее задание по исследованию функций. Постановка задачи: дана функция f(x), нужно найти её область определения, область значений, интервалы постоянного знака и нули, асимптоты, промежутки монотонности и точки экстремума, промежутки выпуклости и точки перегиба.

Все эти пункты удобно выполняются при помощи MathCAD. В случае трансцендентных уравнений, когда корень не удается найти аналитически, MathCAD позволяет найти его с высокой точностью.

Пример. Исследовать функцию и построить график

$$y = f(x) = \frac{x(x - 3\operatorname{arctg} x)}{x - 2}$$

Область определения D(*f*) = **R**\{2}. Сначала построим график $y = f(x)$. В меню axes (оси) выберем crossed («крестовина») и grid lines (координатная сетка). Рамки графика удобно задавать двумя параметрами a и b: $-a < x < a$, $-b < y < b$ (рис.1). График помогает найти нули функции $f(x)$ и интервалы постоянного знака. К сожалению, команда solve, имеющаяся в MathCAD, не всегда даёт правильный ответ. Например, для рассматриваемой функции solve нашла только точку $x_2 = 0$, хотя, как видно по графику, есть еще две точки $x_1 \approx -4$ и $x_3 \approx 4$. Чтобы найти значения x_1 и x_3 с интересующей нас точностью, нужно рассмотреть поведение функции $f(x)$ в их окрестностях.

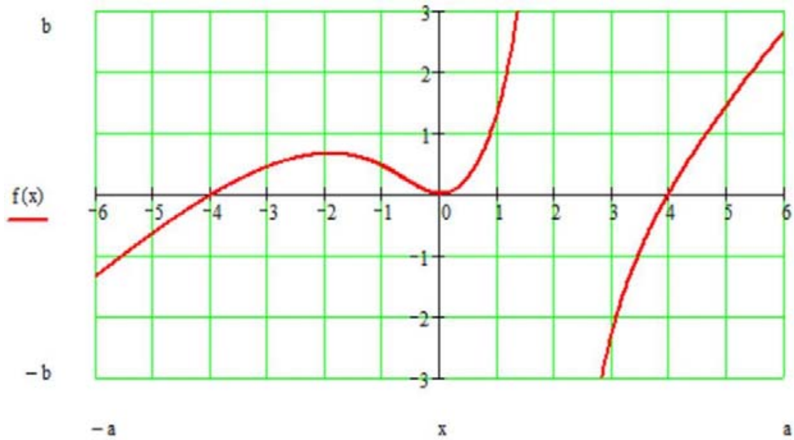


Рис. 1

При этом, чтобы чётче видеть точку пересечения графика с осью Ox, деформируем график по вертикали, заменив значение $y = f(x)$ на его кубический корень, тогда пересечение кривой с осью Ox будет перпендикулярным (рис. 2).

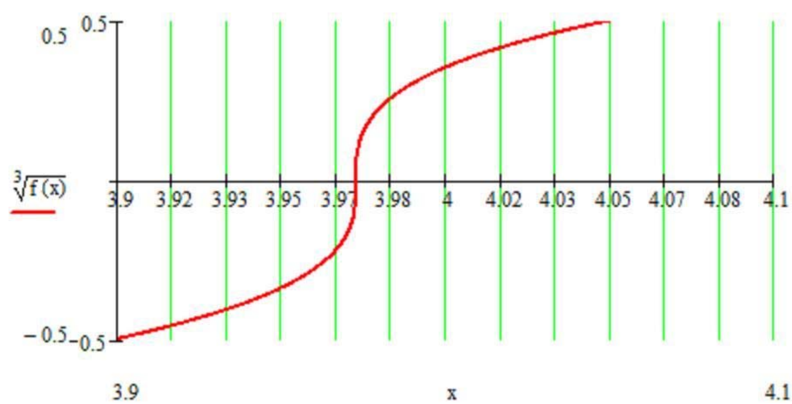


Рис. 2

Получаем $x_1 \approx -3{,}974$, $x_3 \approx 3{,}974$. Интервалы постоянного знака: $f(x)>0$ на $(x_1;0)$, $(0;2)$ и $(x_3;+\infty)$; $f(x) < 0$ на $(-\infty; x_1)$ и $(2; x_3)$.

Очевидно, вертикальная асимптота – прямая $x = 2$ Найдем уравнения горизонтальных и/или наклонных асимптот $y = k_i x + b_i y$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1;\ \ b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = 2 \mp \frac{3\pi}{2};$$

Построим график $y = f(x)$ вместе с асимптотами (рис. 3) в более мелком масштабе.

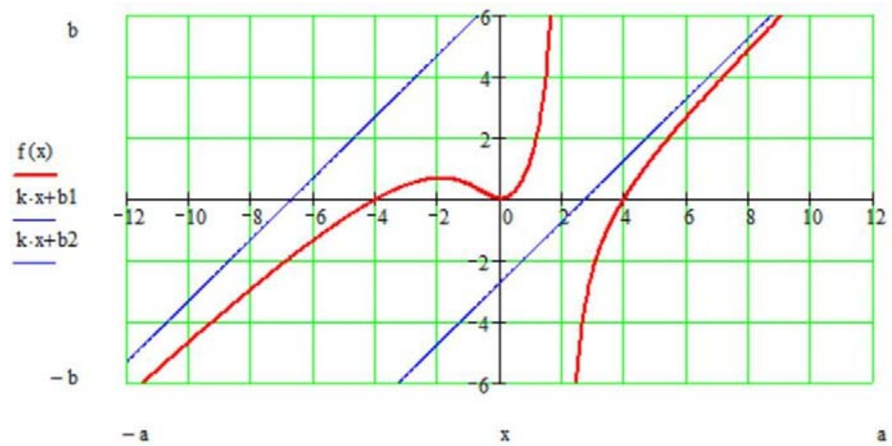


Рис. 3

Далее исследуем функцию с помощью производных.

$$v(x) := \frac{d}{dx}f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 6\mathrm{arctg}(x)(x^2+1)}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

Построим график производной (рис. 4).

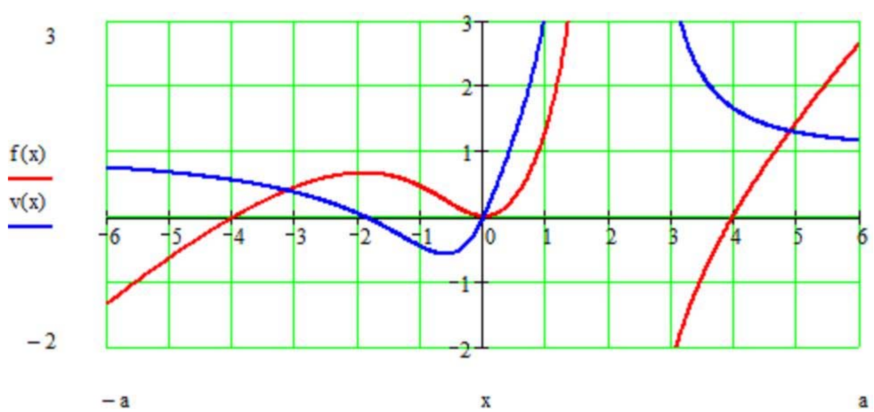


Рис. 4

Производная обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = x_1' \approx -2$. Найдем x'_1 таким же способом, как нули самой функции $f(x)$ (рис. 5). Получаем $x'_1 \approx -1{,}919$. Как видно по графику, x'_1 – точка максимума, 0 – точка минимума.

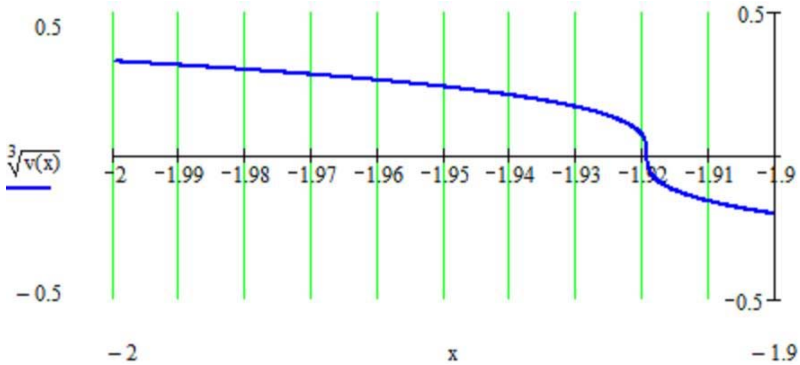


Рис. 5

Промежутки монотонности: $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; x_1')$, $[0; 2)$ и $(2; +\infty)$; убывает на $[x_1'; 0]$. Теперь найдем вторую производную:

$$w(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 2 \cdot \frac{7x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 8 + 6\operatorname{arctg}(x)(x^2+1)^2}{(x-2)^3(x^2+1)^2}.$$

На рис. 6 показано, как находится точка перегиба $x_1'' \approx -0{,}615$.

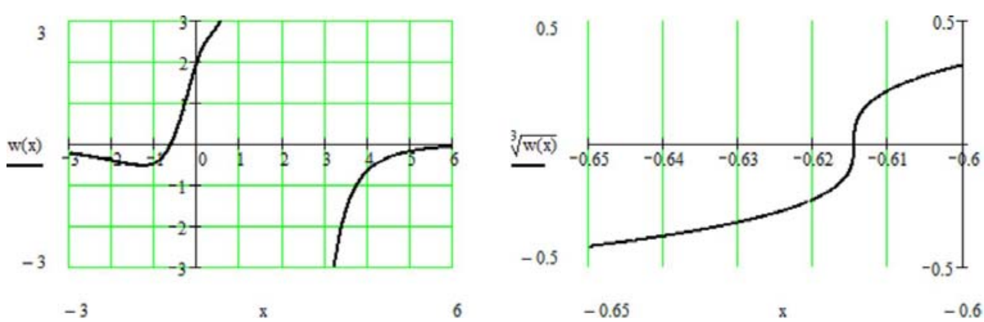


Рис.6

Функция выпукла вниз на промежутке $[x_1''; 2)$ и выпукла вверх на $(-\infty; x_1'']$ и $(2; +\infty)$.

Прикладные задачи на экстремум

Решение прикладной задачи на экстремум (геометрической, физической, экономической и т.п.) состоит из следующих этапов:

1. Выбор параметра x, который нужно будет оптимизировать (если этот параметр не указан в задаче явно).
2. Нахождение промежутка D допустимых значений параметра x.
3. Определение целевой функции $f(x)$.
4. Нахождение максимума или минимума $f(x)$ на D.

Как правило, функция f непрерывна. Если D – отрезок, то на нем обязательно f достигает минимума и максимума. Если D – интервал, то для удобства к нему добавляют концы, чтобы иметь дело с отрезком.

Применить MathCAD можно только на 4-м этапе решения, тогда как первые три этапа требуют творческого подхода, и здесь уместно вспомнить слова П.Л. Чебышёва: «правильно поставить задачу – значит наполовину её решить».

Пример. В полушар радиуса 1 вписать усечённый конус максимального объёма (рис. 7).

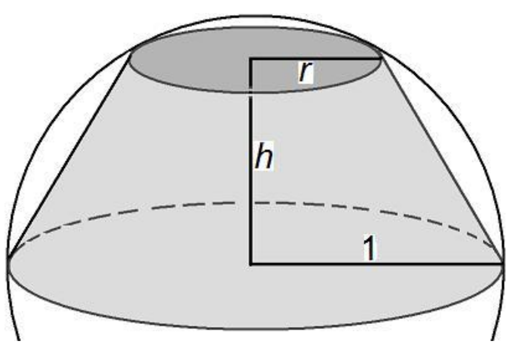


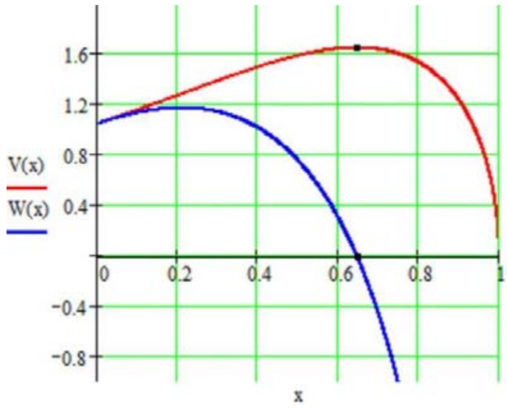
Рис. 7

В качестве параметра x можно взять либо высоту усеченного конуса h ($0 < h < 1$), либо радиус верхнего основания r ($0 < r < 1$). Выберем второй вариант:

$$r = x;\ \ h = \sqrt{1 - x^2};\quad V(x) = \frac{\pi(1^2 + 1 \cdot r + r^2)h}{3} = \frac{\pi}{3}(1 + x + x^2)\sqrt{1 - x^2}.$$

К интервалу допустимых значений $0 < x < 1$ добавим концы: $x = 0$ (конус не усеченный) и $x = 1$ (усеченный конус выродился в круг). Построим график зависимости объёма от x и его производной (рис. 8)

$$W(x) = V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1 + x - 2x^2 - 3x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$$



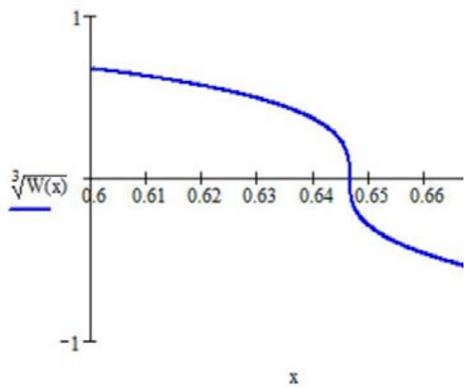


Рис.8

По графику мы видим, что точка максимума расположена между $x = 0{,}6$ и $x = 0{,}7$. Увеличив фрагмент графика, находим с точностью 0,001 значение $x_1 \approx 0{,}646$. Максимальный объём усеченного конуса:

$$V_{max} = V(x_1) \approx 1{,}649.$$

Поскольку функция $V(x)$ дважды дифференцируема, погрешность V_{max} имеет 2-й порядок малости по сравнению с погрешностью x_1.

Подводя итог, заметим, что использование математических пакетов при решении математических задач приводит к их непрерывному применению в обучении математики. Целесообразно проводить часть практических занятий по математике в форме вычислительного практикума или лабораторных работ, что позволяет научить студентов самостоятельно решать математические задачи с помощью МП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Принципы модульно-рейтинговой системы преподавания высшей математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. №3. С. 93–99.
2. Власова Е.А., Грибов А.Ф., Попов В.С., Латышев А.В. Развитие мотивационных стимулов обучения в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного

процесса // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2014. №1. С. 48–53.
3. Власова Е.А., Попов В.С., Латышев А.В. Методические аспекты обеспечения дисциплины «Линейная алгебра» в техническом университете // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. №3. С. 69–85.
4. Лукашенко А.Г. Опыт использования системы MathCAD 11 при обучении высшей математике // Математика в высшем образовании. 2005. № 3. С. 53–64.

REFERENCES

1. Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. Printsipy modul'no-reitingovoi sistemy prepodavaniya vysshei matematiki [Principles of module-rating system of teaching mathematics] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika-matematika. 2013. no. 3. pp. 93–99.
2. Vlasova E.A., Gribov A.F., Popov V.S., Latyshev A.V. Razvitie motivatsionnykh stimulov obucheniya v ramkakh modul'no-reitingovoi sistemy organizatsii uchebnogo protsessa [The development of motivational incentives for learning within module-rating system of organization of educational process] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2014. no. 1. pp. 48–53.
3. Vlasova E.A., Popov V.S., Latyshev A.V. Metodicheskie aspekty obespecheniya distsipliny «Lineinaya algebra» v tekhnicheskom universitete [Methodological aspects of the discipline "Linear algebra" at the technical University] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2015. no. 3. pp. 69–85.
4. Lukashenko A.G. Opyt ispol'zovaniya sistemy MathCAD 11 pri obuchenii vysshei matematike [Experience in the use of MathCAD 11 in teaching higher mathematics] // Matematika v vysshem obrazovanii. 2005. no. 3. pp. 53–64.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Власова Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

Попов Владимир Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vspopov@bk.ru;

Пугачев Олег Всеволодович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана
e-mail: opugachev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dr. Vlasova Elena – candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor of the Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

Dr. Popov Vladimir – candidate of physical and mathematical sciences, assistant professor of the Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vspopov@bk.ru;

Prof. Pugachev Oleg – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: opugachev@yandex.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. Использование электронных математических пакетов при обучении высшей математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 120–132.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Vlasova, V. Popov, O. Pugachev The use of electronic mathematical software in teaching mathematics // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 120–132.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-120-132.