УДК 551.435.1

Матвеев Н.П.

ВОЗВРАТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ИЗУЧЕНИИ СТРУКТУРЫ РЕЧНЫХ СИСТЕМ*

Аннотация: Показана роль и значение использования принципа возвратных последовательностей в процессе изучения речных систем.

Ключевые слова: возвратные последовательности, числа Фибоначчи, реккурентный ряд, речная система, грани, узлы, ребра, каркасная и заполняющая сеть, густота речной сети.

Область применения возвратных последовательностей к решению задач естествознания еще не очень велика, хотя появление возвратных последовательностей связано с биологией и именем математика. Леонардо из Пизы по прозвищу «Фибоначчи», задавшемуся решением задачи о размножении кроликов - «Задача Кроликов». Им было найдено решение в виде последовательности, получившей название – ряда Фибоначчи. Каждый член ряда Фибоначчи может быть получен из равенства:

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-2} \qquad (1)$$

где N_n – величина n-го члена ряда, N_{n-1} и N_{n-2} – величины двух предыдущих членов ряда.

В XX в. ряду Фибоначчи уделяли внимание математики, техники, биологи, архитекторы.

Фабоначчиевым числам посвящена монография Н. Воробьева [1]; в которой приводится ряд примеров сферы проявления Фибоначчиевых чисел в биологии теории игр, теории поиска. Менее исследованы возвратные последовательности в географии.

Занимаясь изучением речной сети, нам удалось показать, что речная сеть площади водосборов, расходы и ряд других параметров рек подчиняется возвратным последовательностям [3,4,5,6,7,8,9]. Однако эти последовательности более сложные по сравнению с рядом Фибоначчи.

Количество рек в речной системе подчиняется возвратной последовательности вида

$$N_n = 3N_{n-1} + 2N_{n-2}, \qquad (2)$$

где N_n - любой последующий член ряда; N_{n-1}, N_{n-2} – два предыдущих члена ряда, 3 и 2 – коэффициенты.

Появление коэффициентов связано со структурой речной системы. В речной системе выделяется два типа речной сети – каркасная и внутренняя или заполняющая [2,5]. Каркасная сеть образуется из различных порядков рек при слиянии трех рек более низких порядков

$$3_{n-1} \rightarrow 1_n, \qquad (3)$$

где 1_n – река n-го порядка, 3_{n-1} – три реки на порядок ниже.

Реки заполняющей сети образуются при впадении двух рек в реку каркасной сети

$$2_{n-2} \rightarrow 1_n \qquad (4)$$

где 2_{n-2} – две реки заполняющей сети. При этом их порядок на два уровня ниже. Порядок реки они не изменяют.

На основе реккуретной формулы (2) ряд для реки 10-го порядка имеет вид (табл. 1)

Табл. 1

Количество рек в речных системах разных порядков

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	3	11	39	139	495	1763	6279	22363	79647

Такое количество рек встречается в речных системах с нормально развитыми водосборами, у которых выдерживается равенство:

$$У = \frac{X}{2} \qquad (5)$$

где У – ширина водосбора, X – длина водосбора.

Ширина водосбора принимается как малая ось эллипса [6].

При других соотношениях длины и ширины водосбора в формулу (5) вносится поправка в виде коэффициента развития водосбора [3,4,6]

Для того, чтобы получить любой член последовательности (2), надо пройти все предыдущие члены ряда, что не всегда удобно. Для решения многих задач использовать равенство (2) в таком виде просто невозможно.

Использую метод Бине [1] нами было получено решение уравнения (2) в виде [3]

$$N_n = a_I\,[A_I^{\,n} - A_{II}^{\,n}\,(-1^n)], \qquad (6)$$

где a_I – коэффициент равный 0,234, A_I – размерность ряда, равная 3,562 и A_{II} = 0,562, n – порядок речной системы.

Второй член равенства (6) быстро стремится к нулю. Им нужно пренебречь. Формула (6) принимает более простой вид

$$N_n = a_I\,A_I^{\,n} \qquad (7)$$

Исследование формулы (7) показало, что она может давать значительные отклонения от реальной величины Например, река Москва теоретически должна иметь 2279 притоков против 1801 фактической величины, т.е. на 478 притоков меньше. Напротив другие реки, например, Дубна имеет на 302 реки больше по сравнению с теоретическим значением. Часть речных систем (до 35%) имеет количество рек, совпадающее с теоретическим значением. Причины отклонений лежит в ширине водосбора.

По ширине водосборы можно поделить на три группы – нормальные, широкие, узкие. Нормально развитые водосборы удовлетворяют условию (5). Для широких водосборов выдерживается неравенство:

$$\frac{X}{2} =< Y \qquad (8)$$

Для узких водосборов справедливо неравенство

$$\frac{X}{2} => Y \qquad (9)$$

В наших исследованиях водосборов по своей форме был принят за эллипс [3]. Ширина водосбора были приняты за малую ось эллипса и вычислялись по формуле

$$Y = \frac{4F}{\pi X}\,, \qquad (10)$$

где F – площадь водосбора речной системы.

Ширина водосбора также может быть получена из равенства

$$Y = \frac{\pi \tilde{y}}{4} \qquad (11)$$

где $\breve{Y}$ - средняя ширина водосбора, которая может быть вычислена любым независимым способом, например:

$$\breve{Y} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} y, \qquad (12)$$

где y – ширина водосбора в разных точках водосбора, n – количество точек.

$$\breve{Y} = \frac{F}{X} \qquad (13)$$

Площадь водосбора вычисляется или при помощи планиметра или аналитическим способом: методом прямоугольников, трапеций, параболических трапеций [2]

Исследование формулы (7) показало, что необходимо ввести в нее дополнительный коэффициент, который был назван нами коэффициентом развития водосбора.

$$K_{р.в.} = \frac{F}{F_H}, \qquad (14)$$

где $K_{р.в.}$ – коэффициент развития водосбора, F – фактическая площадь водосбора, F_H – нормально развитый водосбор, для которого коэффициент развития равен 1.

Коэффициент развития водосбора может быть вычислен по формуле Н.П. Матвеева [2]

$$K_{р.в.} = \frac{2Y}{X} \qquad (15)$$

Величина нормально развитого водосбора вычисляется по формуле:

$$F_H = \frac{\pi X^2}{8} \qquad (16)$$

Развитие водосбора может быть определено и через среднюю ширину водосбора

$$K_{р.в.} = 8 \frac{\tilde{y}}{\pi X} \approx 2{,}55 \frac{\breve{Y}}{X}. \qquad (17)$$

С учетом коэффициента развития водосбора площадь водосбора может быть выражена равенствами.

$$F = a_1 A_1^n \bar{f_1} K_{р.в.}, \qquad (18)$$

$$F = \frac{\pi X^2}{8} K_{р.в.}, \qquad (19)$$

Возвратным последовательностям подчиняется изменение площади водосбора при переходе от одного соседнего порядка к другому.

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{a_1 A_1^n \overline{f_1} K_{р.в.}}{a_1 A_1^{n-1} \overline{f_1} K_{р.в.}} = A_1, \qquad (20)$$

где f_1 – удельная площадь водосбора рек начального порядка, остальные обозначения прежние.

Отношение площадей водосборов в реках соседних порядков в одной и той же речной системе – величина постоянная

Удельная площадь водосбора представляет собой отношение площади водосбора к количеству рек в речной системы:

$$\bar{f}_1 = \frac{F_n}{N_n} \quad , \qquad (21)$$

где f_1 – удельная площадь водосбора I-го порядка, но может быть разных порядков.

Расходы рек соседних порядков имеют ту же размерность, что и площади водосборов.

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{a_1 A_1^{\,n} \bar{f}_1 M_0 10^{-3}}{a_1 A_1^{\,n-1} \bar{f}_1 M_0 10^{-3}} = \frac{A_1^{\,n}}{A_1^{\,n-1}} = A_1 \quad . \qquad (22)$$

Длина и ширина водосбора тесно связаны с размерностью площадей, но выражается другой величиной:

$$A_1 = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\pi X^2_n K_{р.в.}}{8} \quad \frac{\pi X^2_{n-1} K_{р.в.}}{8} = \left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\right)^2 \qquad (23)$$

Из последнего равенства следует:

$$\frac{X_n}{X_{n-1}} = A_1^{1/2} = 1{,}887 \qquad (24)$$

Обозначим:

$$1{,}887 = K_x,$$

где K_x – размерность длин

Длину водосбора реки найдем из следующих соображений:

$$\left(\frac{\pi X^2_n}{8}\right) K_{р.в.} = a_1 \bar{A}_1^{\,n} f_1 K_{р.в.} \ , \qquad (25)$$

где f_1 – удельная площадь водосбора

$$\bar{f}_1 = \frac{\pi X_1^2}{8} \qquad (26)$$

где X_1^2 – длина удельного водосбора.

Подставим равенство (25) в (24) и решив его относительно X_n, найдем:

$$X_n = a_x K_x^{\,n} \bar{X}_1, \qquad (27)$$

где X_n – длина водосбора реки *n-го* порядка, a_x – коэффициент равный $\sqrt{a_1}$=0.5, X_1 – средняя длина удельного водосбора рек I-го порядка в речной системе.

Полная речная система представляет собой топологическую структуру, которая состоит из граней, ребер и узлов. Эйлерова характеристика полной речной системы, включающей речную сеть, водосбор, водораздел, равна 1. Единице равны граф речной системы, представляющей собой дерево. Также равны единице каждый из графов – водосбор и водораздел.

Речная сеть состоит из отдельных отрезков (ребер) и узлов, которые представляют собой слияние рек одного или разных порядков. Количество речных ребер подчиняется возвратным последовательностям. [6]

$$\sum N_{n,p} = a_p A_1^{n-1} K_{р.в.}, \quad (28)$$

где $\sum N_{n,p}$ – общее количество отрезков рек между узлами слияния в речной системе *n-го* порядка, a_p – коэффициент равный 1,29.

Представляет интерес количество ребер *n-го* порядка в речной системе *m-го* порядка. [6]

$$\sum N_{n,p} = a_m A_1^{m-n} K_{р.в.}, \quad (29)$$

где $a_m = 0{,}928$, *m* – порядок речной системы.

Количество узлов слияния рек также подчиняется возвратным последовательностям.

$$N_{у.п.} = a_у A_1^{n-1} K_{р.в.}, \quad (30)$$

где $a_у$ – коэффициент равный 1,3. Узлами считается и верховья рек.

Узлы слияния играют большую роль в деятельности рек. Ниже узлов увеличивается расходы, ширина, высота поймы, может изменяться тип руслового процесса.

Узлы подразделяются на порядки. Их количество и значимость зависят от размерности A_1.

Количество узлов одного и того же порядка в речной системе может быть определено при помощи формулы:

$$\sum N_у = a_у A_1^{m-n} K_{р.в.}, \quad (31)$$

где $a_у$ – коэффициент равный 0,934.

Водосбор речной системы подразделяется на водосборы более низких порядков [6], каждый из которых состоит из поверхностей (граней), ограниченных ребрами – водоразделами и отрезками рек. Речные ребра рассмотрены выше. Точки сходимости водораздельных ребер представляет собой вершины. Число таких вершин равно:

$$N_{у,в} = 1{,}34 A_1^{n-1} K_{р.в.}, \quad (32)$$

где $N_{у,в}$ – водосборные вершины.

Например, на водосборе р.Москвы насчитывается 2162 вершины, которые контролируют развитие рельефа.

Для вычисления количества вершин n-го порядка в речной системе m-го порядка справедливо равенство:

$$N_{у,m.} = 0{,}964\, A^{m-n} K_{р.в.}, \quad (33)$$

Возвратным последовательностям подчиняется число ребер – отрезков между вершинами или узлами, в которых сходятся водоразделы.

$$N_{р.п.} = a_p A_1^{n-1} K_{р.в.} \quad (34)$$

где a_p – коэффициент равный 3,87.

Для вычисления водораздельных ребер n-го порядка в речной системе m-го порядка справедлива формула:

$$N_{р.п.} = a_{р.п.} A_1^{m-n}, \quad (35)$$

где $a_{р.п.} = 2{,}784$

Суммарная величина водораздельных и речных ребер равна:

$$\sum N_p = 5{,}13 A_1^{n-1} K_{р.в.} \quad (36)$$

Число ребер *m-го* или *n-го* порядка в речной системе m-го порядка можно получить из равенства:

$$N_{n,m.} = a_p A_1^{m-n} \quad (37)$$

где a_p – коэффициент равный 3, 69, *m* – общий порядок речной системы, *n* – порядок той речной системы, «ребра» для которой вычисляются.

Грани - основной элемент водосбора. Количество граней на водосборе системы можно вычислить по формуле [5]

$$N_г = a_г A_1^{\,n-1} \quad , \tag{38}$$

где $N_г$ – количество граней, $a_{г,m}$ – коэффициент равный 2,583.

Число граней того или иного порядка –n в речной системе m-го порядка составит:

$$N_{г,\,n} = a_{г,m} A_1^{\,m-n} K_{р.в.} \quad , \tag{39}$$

где $a_{г,m}$ – коэффициент равный 1,858.

Грани играют исключительно важную роль при формировании стока как жидкого, так твердого и солевого. На разных поверхностях –гранях могут формироваться разные элементарные природные территориальные комплексы. Поверхности отличаются по уклонам, уровням залегания грунтовых вод, характеру почв.

Возвратным последовательностям подчиняется формирование половодий [3,7].

Каждое половодье состоит из множества волн, число которых подчиняется ряду Фибоначчи. Количество волн зависит от порядка речной системы, развития водосбора.

$$N_в = a_ф K_ф K_{р.в.} \quad , \tag{40}$$

где $N_в$ – количество волн половодья, $a_ф$ – коэффициент, равный 0,447., $K_ф$ – число Фибоначчи, равное 1,617.

Но если ряд Фибоначчи позволяет определять число волн, составляющих половодье, то число рек разных порядков, формирующих половодье, вычисляется по реккурентной формуле:

$$\sum N_в = 3\left(\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ N_n \end{pmatrix}\right) + 2\left(\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ Nn \end{pmatrix}\right) K_{р.в.} \tag{41}$$

Прирост половодья не является постепенным, а происходит дискретно. Самая большая волна приходит последней. Она окончательно создает пик половодья, после которого начинается спад.

На реке 7-го порядка –13 волн половодья (табл.2). Их них наиболее крупные волны – 5, 8, 10, 11, 12, 13. Самая высокая 13 волна. Ее прирост составил – расход воды 729 рек из 1763 рек или 41% от общего расхода реки.

На реке Оке (порядок реки 8,72, развитие водосбора – 1,3) должно наблюдаться не менее 29 волн половодья, в то же время на реке Москве (порядок рек 7,2., развитие – 0,78) 11волн, что почти в четыре с лишним раза меньше. Паводочная волна на Оке в ее низовьях будет длиться намного дольше.

Предложенная модель речной системы объясняет совпадение и несовпадения пика половодья и пика мутности. До пятого порядка пик мутности и пика половодья совпадают, так как заполняющая речная сеть которая приносит основную часть твердых частиц, менее развита по сравнению с каркасной. Начиная с VI-го порядка пик мутности наступает раньше пика половодья. Заполняющая речная сеть превышает по развитию каркасную [3].

Табл. 2

Формирование половодья на реках разных порядков

Количество рек, принимающих участие в формировании паводочных волн	Порядок речной системы								Порядковый номер волны
	I	II	III	IV	V	VI	VII		
	1	3	2	6	4	12	8	1	
			9	6	18	12	36	2	
				27	18	54	36	3	
					18	12	36	4	
					81	54	162	5	
						54	36	6	
						54	36	7	
						243	162	8	
							36	9	
							162	10	
							162	11	
							162	12	
							729	13	
	Общее число рек, формирующих пик половодья								
	1	3	11	39	139	495	1763		
	Число волн								
	1	1	2	3	5	8	13		

Густота речной сети речной системы также может быть выражена через возвратные последовательности:

$$K_г = \frac{\bar{\ell}_1}{\bar{f}_1}\left(1+\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_1^{\,1}}\left(\frac{1}{K_x}-\frac{1}{K_x^{\,n}}\right)\right)0,87+0,04 \tag{42}$$

где $K_г$ – коэффициент густоты речной сети, ℓ_1 – средняя длина рек начального порядка в какой-либо речной системе, $X_1^{\,1}$ – средняя длина речных долин I-го порядка речной системы

Как было рассмотрено выше размерность K_x является функцией размерности A_1.

Площадь пойм речной системы связана с возвратными последовательностями.

$$\sum S = \bar{S}_1 N_n \left(1 + 5\,\frac{K_{р.в.}^{\,0,42}}{A_1^{\,n-1}}\;\frac{A_1^{\,n-1} - K_s^{\,n-1}}{A_1 - K_s}\right), \tag{43}$$

где $\sum S$ – площадь пойм рек речной системы, S_1 – средняя площадь поймы реки I-го порядка, N_n – количество рек в речной системе, $K_{р.в.}$ – развитие водосбора, A_1 – размерность возвратной последовательности, K_s – размерность площадей пойм соседних порядков, равный 3,26. Например, поймы речной системы р.Москвы – составили около 80000 га., а Оки 1918600 га., что составит соответственно – 4,55 и 7,8% от площадей водосборов этих же рек.

В целом можно отметить, что все основные элементы речных систем могут быть выражены через возвратные последовательности; достаточно точно описывающие морфометрические связи и закономерности строения речной сети и водосборов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М. «Наука», 1978, с 144.
2. Выгодский М.А. Справочник по высшей математике. Гостехиздат. М. 1956, с 783.
3. Матвеев Н.П. Новая речная модель речных систем. Сб МОИП. «Землеведение». Нов. серия. Том XIV (LIV). МГУ. 1982, с 51-63.
4. Матвеев Н.П. Водосборы рек бассейнов Верхней Волги и Оки и влияние их на поймы. сб МОИП. «Землеведение». Нов. серия. Том XVI (LVI). МГУ, 1985, с 69-77.
5. Матвеев Н.П. Морфометрия пойм рек бассейнов бассейнов Верхней Волги и Оки. сб МОИП. «Землеведение». Нов. серия. Том XVII (LVII). МГУ, 1990, с 127-140.
6. Матвеев Н.П. Речная система как топологическая структура. Вестник МГОУ №1-2, серия «Естественные науки», 2004, с 115-124.
7. Матвеев Н.П. Речная система, «Вестник МГОУ. Естественные науки» №2, МГОУ. М. 2007, с 29-48.
8. Матвеев Н.П. Водосборы рек начального порядка Верхней Волги и Оки. Вестник МГОУ, серия «Естественные науки». №2, 2008, с 32-42.
9. Матвеев Н.П. Малые реки. Вестник МГОУ, серия «Естественные науки». №2, 2008, с 18-31.

N.P. Matveev

RETURNABLE SEQUENCES IN STUDYING OF STRUCTURE OF RIVER SYSTEMS

Abstract: It is shown the role and meaning can be use the principles of reflexive consecution in investigation of river systems.

Key words: returnable sequences, numbers of Fibonachchi, reccurent a number, river system, sides, knots, edges, a frame and filling network, density of a river network.