

УДК 517.5

**О ФОРМИРОВАНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ  
В ЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ  
С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ**

**Д.Е. Пелиновский<sup>1,2</sup>, А.Р. Гиниятуллин<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Нижегородский Государственный Технический Университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24

<sup>2</sup>Университет МакМастера  
Гамильтон, Онтарио, Канада

*Аннотация.* Рассматривается формирование особенностей в линейном уравнении адвекции-диффузии с переменной скоростью на полу-бесконечной линии. Переменная скорость определяется дополнительным условием на границе, которое моделирует динамику линии соприкосновения гидродинамического потока под углом  $180^\circ$ . Используя априорные оценки энергии, выведены условия на переменную скорость, которые гарантируют, что достаточно гладкое решение линейного уравнения адвекции-диффузии взрывается за конечное время. Используя класс самоподобных решений, найдена скорость роста решения вблизи особенности. Эта скорость не совпадает с полученными ранее численными решениями поставленной задачи.

*Ключевые слова:* уравнение адвекции-диффузии, переменная скорость, переопределённые граничные условия, формирование особенностей, априорные оценки энергии, самоподобные решения

**Введение**

Контактные линии определяются пересечением твердой и свободной границ потока. Потоки с контактной линией с углом контакта  $180^\circ$  были рассмотрены в [2,6], где было показано, что соответствующие решения уравнений Навье-Стокса не имеют физического смысла. В последнее время другой подход, основанный на приближении смазки и уравнениях тонких пленок, был разработан в недавней работе [1].

Для очень простого гидродинамического потока, изображенного на рис. 1, авторами [1] получено нелинейное уравнение адвекции-диффузии для свободной границы потока:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{3} \left( \alpha^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + (1 - V(t))h \right] = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (1)$$

где  $\alpha$  числовая константа. Контактная линия зафиксирована при  $x = 0$  в системе координат, движущейся со скоростью  $-V(t)$  и определена граничными условиями  $h(0,t) = 1$  и  $h_x(0,t) = 0$ . Сохранение потока обеспечивает граничное условие для  $h_{xxx}(0,t) = -3/2\alpha^3$ . Пусть далее  $\alpha^3 = 3$ . Наличие слабого решения уравнения тонких пленок (1) для постоянной скорости  $V(t)$  и граничных условий Неймана на конечном интервале было недавно показано в работах [3,4].

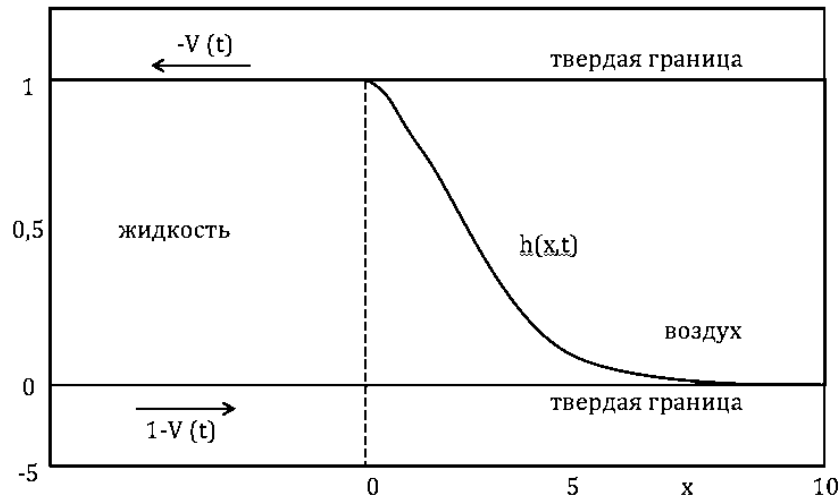


Рис. 1. Схематическая картина потока между твердых границ

Используя асимптотическую редукцию с

$$h-1 = O(|V|^{-1}), \quad x = O(|V|^{-1/3}), \quad t = O(|V|^{-4/3}), \quad \text{при } |V| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

авторы [1] свели нелинейное уравнение (1) при  $\alpha^3 = 3$  к линейному уравнению адвекции-диффузии:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = V(t) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

с граничными условиями вида

$$h(0,t) = 1, \quad h_x(0,t) = 0, \quad h_{xxx}(0,t) = -1/2, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Мы предполагаем, что  $h, h_x, h_{xx} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ : на самом деле, благодаря инвариантности линейного уравнения адвекции-диффузии (3) по отношению к сдвигу и масштабным преобразованиям на бесконечности допускается любое постоянное значение  $h$ . Действительно, если  $h(x,t)$  решает краевую задачу (3)-(4), то функция

$$\tilde{h}(x,t) = H + (1-H)h(\xi, \tau), \quad \xi = \frac{x}{(1-H)^{1/3}}, \quad \tau = \frac{t}{(1-H)^{4/3}} \quad (5)$$

с постоянной  $H < 1$ , решает то же уравнение (3) с теми же граничными условиями (4), переменной скоростью  $\tilde{V}(t) = V(\tau)/(1-H)$ , и асимптотикой  $h \rightarrow H$  при  $x \rightarrow \infty$ .

С тремя граничными условиями при  $x = 0$  и убыванием к нулю на бесконечности, задача Коши для уравнения (3) является переопределённой и третье (переопределяющее) граничное условие при  $x = 0$  используется для нахождения зависимости  $V$  от  $t$ . Локальное существование решений краевой задачи (3)-(4) было доказано в нашей работе [7] с использованием преобразования Лапласа по  $x$  и разложения в дробно-степенной ряд по  $t$ .

Рассмотрим, далее, эволюцию во времени краевой задачи (3)-(4) начиная с исходного значения  $h(x,0) = h_0(x)$  для соответствующей функции  $h_0$ . В частности, будем считать, что профиль  $h_0(x)$  монотонно убывает к нулю при  $x \rightarrow \infty$  и что  $x = 0$  является невырожденным максимумом  $h_0$  таким, что  $h_0(0) = 1$ ,  $h_0'(0) = 0$ , и  $h_0''(0) < 0$ . Если решение  $h(x,t)$  теряет монотонность по  $x$ , например, за счет величины

$$\beta(t) := h_{xx}(0,t) \tag{6}$$

пересекающей ноль с отрицательной стороны, то поток становится нефизическим и модель (4) является недействительной. Одновременно это может означать, что скорость  $V(t)$  растет так, как это определено для достаточно сильных решений уравнения адвекции-диффузии (3) точечным уравнением:

$$h_{xxxxx}(0,t) = V(t)\beta(t), \tag{7}$$

которое получается при дифференцировании (3) по  $x$  и устремлении  $x \rightarrow 0$ .

Согласно результатам работы [1], основанным на численных расчетах уравнений (1) и (3), для любого подходящего  $h_0$ , существует конечный положительный момент времени  $t_0$  такой, что  $V(t) \rightarrow -\infty$  и  $\beta(t) \rightarrow 0^-$  при  $t \uparrow t_0$ . Более того, в [1] утверждается, что  $V(t)$  ведет себя вблизи  $t_0$  как логарифмическая функция от  $t$ , т.е.

$$V(t) \sim C_1 \log(t_0 - t) + C_2, \text{ при } t \uparrow t_0, \tag{8}$$

где  $C_1, C_2$  положительные константы.

Целью данной работы является проверка возможной скорости роста решения вблизи особенности краевой задачи (3)-(4).

Во-первых, мы будем использовать априорные энергетические оценки для того, чтобы показать, что для гладких решений краевой задачи (3)-(4) функция  $V(t)$  не может оставаться все время положительной. Этот результат одновременно означает две вещи: если  $V(t)$  остается положительной, то гладкое решение разрушается за ограниченное время, и если гладкое решение всегда существует, то  $V(t)$  либо колеблется, либо становится отрицательной. Также, мы покажем, что по той же причине функции  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  не могут оставаться всегда отрицательными: если  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  остаются отрицательными, то гладкое решение разрушается за ограниченное время, и если гладкое решение всегда существует, то  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  либо колеблются, либо становятся положительными. Сочетание обоих результатов показывает, что гладкое решение может всегда существовать, только при условии, что переменная скорость  $V(t)$  колеблется от положительных значений к отрицательным, и обратно.

Во-вторых, мы рассмотрим класс самоподобных решений, основанных на масштабных преобразованиях (2). Класс самоподобных решений определяется линейным

уравнением адвекции-диффузии (3), с убыванием к нулю на бесконечности, и с первыми двумя граничными условиями (4). Третье граничное условие  $h_{xxx}(0,t) = -1/2$  для самоподобных решений не выполняется, и мы заменяем его новым условием вида  $h_{xxx}(0,t) = \gamma_0 V(t)$  при фиксированном  $\gamma_0 < 0$ . Мы покажем, что самоподобное решение взрывается за конечное время при положительном  $V(t)$  и положительном  $\beta(t)$ , что согласуется с масштабным преобразованием (2), но не соответствует физическим требованиям потока на рис. 1.

Наконец, используя точечное уравнение (7) и его производную, мы покажем как в течение конечного времени  $\beta(t)$  может обратиться в ноль, а  $V(t)$  – стать бесконечной. При этом рост решения вблизи особенностей опять отличается от показателя, основанного на масштабном преобразовании (2) и на численно полученных результатах (8). Таким образом, дальнейшие исследования краевой задачи (3)-(4), в том числе более точное численное моделирование требуется для лучшего понимания динамики формирования особенностей в поставленной задаче.

#### Априорные оценки энергии

Рассмотрим уравнение адвекции-диффузии (3) с граничными условиями (4) и убыванием  $h$ ,  $h_x$ ,  $h_{xx}$  к нулю на бесконечности. Мы будем предполагать существование гладкого решения краевой задачи и покажем, что функция  $V(t)$  не может оставаться положительной всё время.

**Теорема 1.** Решения краевой задачи (3)-(4) не существует в классе функций  $h \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$  если  $V(t) \geq V_0 > -1$  для всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Из уравнения адвекции-диффузии (3), получаем баланс энергии:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} h^2 \right) + \partial_x \left( h h_{xxx} - h_x h_{xx} - \frac{1}{2} V(t) h^2 \right) + (h_{xx})^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (4) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|h(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|h_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = -(1 + V(t)). \quad (9)$$

Если у нас есть решение в классе  $h \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (9), мы получим

$$\|h(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|h_{xx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|h_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t (1 + V(\tau)) d\tau. \quad (10)$$

Поскольку левая часть строго положительная, то Теорема 1 доказана.

Далее, перепишем уравнение адвекции-диффузии (3) для переменной  $u = h_x$  в виде:

$$u_t + u_{xxxx} = V(t)u_x, \quad x > 0, t > 0, \quad (11)$$

с граничными условиями на контактной линии:

$$u(0,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = -1/2, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

где граничное условие  $u_{xxx}(0,t) = h_{xxxx}(0,t) = 0$  следует из граничных условий  $h(0,t) = 1$  и  $h_x(0,t) = 0$ , а также из уравнения адвекции-диффузии (3) при  $x \rightarrow 0$ . Пусть  $\beta(t)$  задано уравнением (6) и учтем, что изначально  $\beta(0) < 0$ . Опять же, мы будем предполагать существование гладкого решения краевой задачи (11)-(12) и покажем, что функции  $\beta(t)$  и  $V(t)\beta^2(t)$  не могут оставаться отрицательными все время.

**Теорема 2.** Решения краевой задачи (11)-(12) не существует в классе функций  $u \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$  если  $\beta(t) \leq \beta_0 < 0$  для всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Из уравнения адвекции-диффузии (11), получаем баланс энергии:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \partial_x \left( uu_{xxx} - u_x u_{xx} - \frac{1}{2} V(t) u^2 \right) + (u_{xx})^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (12) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = \beta(t). \quad (13)$$

Если у нас есть решение в классе  $u \in C(R_+, L^2(R_+)) \cap L^2(R_+, H^2(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (13), мы получим

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|u_{xx}(\cdot, \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t \beta(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Поскольку левая часть строго положительная, то Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** Решение краевой задачи (11)-(12) не существует в классе функций  $u \in C(R_+, H^1(R_+)) \cap L^2(R_+, H^3(R_+))$  если  $V(t) \leq V_0 < 0$  и  $|\beta(t)| \geq \beta_0 > 0$  при всех  $t \geq t_0 \geq 0$ .

**Доказательство.** Умножая уравнение адвекции-диффузии (11) на  $u_{xxx}$ , интегрируя это уравнение по  $x$  на  $(0, \infty)$  и используя граничные условия (12) и убывание к нулю на бесконечности, получаем априорную оценку энергии:

$$\frac{d}{dt} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(R_+)}^2 = V(t) \beta^2(t). \quad (15)$$

Если у нас есть решение в классе  $u \in C(R_+, H^1(R_+)) \cap L^2(R_+, H^3(R_+))$ , то, интегрируя априорную оценку энергии (15), получаем

$$\|u_x(\cdot; t)\|_{L^2(R_+)}^2 + 2 \int_0^t \|u_{xxx}(\cdot; \tau)\|_{L^2(R_+)}^2 d\tau = \|u_0'\|_{L^2(R_+)}^2 - \int_0^t V(\tau) \beta^2(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Так как левая часть строго положительная, то Теорема 3 доказана.

### Самоподобные решения для формирования особенностей

Рассмотрим класс самоподобных решений уравнения (3):

$$V(t) = \frac{t_0 V_0}{(t_0 - t)^{3/4}}, \quad h(x, t) = f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(t_0 - t)^{1/4}}, \quad (17)$$

где  $t_0$  произвольный положительный параметр для конечного времени разрушения,  $V_0$  произвольный параметр начальной скорости, и  $f(\xi)$  решение дифференциального уравнения:

$$\frac{d^4 f}{d\xi^4} + \frac{1}{4}(\xi - 4t_0 V_0) \frac{df}{d\xi} = 0, \quad \xi > 0. \quad (18)$$

Рассмотрим решение краевой задачи, связанное с первыми двумя граничными условиями на контактной линии:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad (19)$$

и убыванием  $f(\xi), f'(\xi)$  к нулю на бесконечности. Отметим, что третье условие на контактной линии  $h_{xxx}(0, t) = -1/2$  не выполняется для самоподобного решения (17). Новое третье граничное условие задается выражением

$$h_{xxx}(0, t) = \frac{f'''(0)}{(t_0 - t)^{3/4}} = \gamma_0 V(t), \quad (20)$$

где  $\gamma_0$  константа такая, что  $f'''(0) = t_0 V_0 \gamma_0$ . Также отметим, что класс самоподобных решений (17) совместим с асимптотическим масштабированием (2) использованным при выводе линейного уравнения адвекции-диффузии (3).

Пусть

$$g(z) = f'(\xi), \quad z = \xi - 4t_0 V_0,$$

тогда краевая задача (18)-(19) сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} 4g'''(z) + zg(z) = 0, & z > z_0 \\ g(z_0) = 0, \\ g(z), g'(z) \rightarrow 0 & \text{при } z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (21)$$

где  $z_0 = -4t_0 V_0$ . Подходящее решение данной краевой задачи строится в соответствии со следующей теоремой.

**Теорема 4.** Существует единственное (с точностью до скалярного умножения) положительное решение краевой задачи (21) на  $(z_0, \infty)$  при  $z_0 < 0$ .

**Доказательство.** При  $z \rightarrow \infty$ , существуют три фундаментальных решения линейного уравнения

$$4g'''(z) + zg(z) = 0. \quad (22)$$

Одно решение монотонно стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , а два других решения колеблются и расходятся при  $z \rightarrow \infty$ . Таким образом, пространство решений краевой задачи (21) образовано частным решением (обозначим его  $G$ ) стремящимся к нулю на бесконечности. Чтобы определить  $G$  однозначно, построим затухающие решения дифференциального уравнения (22) асимптотически, используя анализ ВКБ [5]:

$$G(z) = \exp\left(\frac{-3z^{4/3}}{2^{8/3}}\right) \left[ \frac{1}{z^{1/3}} + O\left(\frac{1}{z^{2/3}}\right) \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (23)$$

где поправочные слагаемые могут быть определены в слагаемых степенного ряда по обратным степеням  $z^{1/3}$ . Решение  $G$  линейного уравнения (22) может быть глобально расширено для всех  $z \in \mathbb{R}$ . Чтобы удовлетворить граничному условию при  $z_0$ , нужно показать, что существует  $z_0 \in \mathbb{R}$  такое, что  $G(z_0) = 0$ .

Очевидно, что  $z_0 \in \mathbb{R}$  существует. Действительно, если бы  $z_0$  не существовало, то  $G(z)$  оставалось бы положительным для всех  $z \in \mathbb{R}$ , что возможно только в том случае, если бы  $G(z)$  монотонно убывало до 0 при  $z \rightarrow -\infty$  (остальные два решения опять колеблются и расходятся при  $z \rightarrow -\infty$ ). Однако, тогда  $G \in H^2(\mathbb{R})$  являлось бы глобальным решением дифференциального уравнения (22) для всех  $z \in \mathbb{R}$ . Умножая это уравнение на  $G'$  и интегрируя по частям, получаем противоречие

$$4 \int_{\mathbb{R}} (G'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} G^2 dz = 0, \quad (24)$$

которое доказывает, что  $G \in H^2(\mathbb{R})$  не может существовать. Кроме того,  $z_0 < 0$  потому что  $G(z)$  монотонно убывает для всех  $z > 0$ . Чтобы убедиться в этом, используем тот факт, что дифференциальное уравнение (22) инвариантно относительно преобразования  $z \rightarrow -z$ , так что  $\tilde{G}(z) := G(-z)$  удовлетворяет тому же уравнению (22). Функция  $\tilde{G}(z)$  монотонно возрастает при больших отрицательных  $z$ . Так как  $4\tilde{G}'''(z) = -z\tilde{G}(z) > 0$  для всех  $z < 0$ , то  $\tilde{G}(z)$  остается монотонно возрастающей при всех  $z \leq 0$  и, следовательно,  $G(z)$  монотонно убывает для всех  $z \geq 0$ . Таким образом,  $z_0 < 0$ , то есть,  $V_0 > 0$  (если  $t_0 > 0$ ). Значение  $z_0$  однозначно определяется как наибольший отрицательный ноль положительной функции  $G(z)$ . Теорема 4 доказана.

На рис. 2 показано численное приближение решения  $G(z)$  удовлетворяющее граничным условиям задачи (21). Численная аппроксимация получена с использованием стандартного метода Гойна.

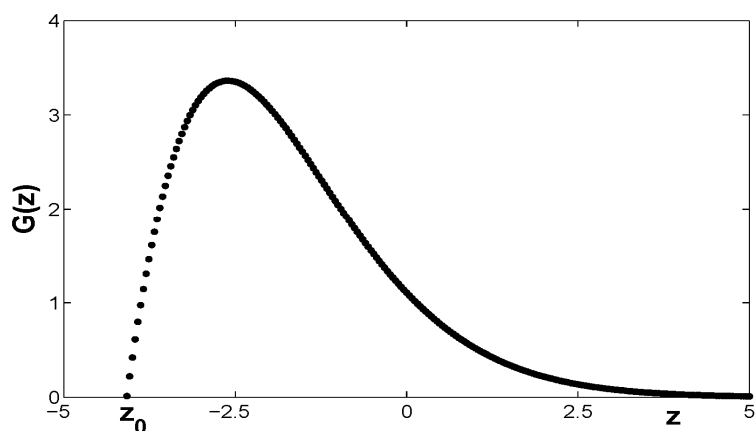


Рис. 2. Численная аппроксимация решения  $G(z)$  краевой задачи (21)

Общее решение краевой задачи (21) имеет вид  $g(z) = CG(z)$ . Для определения константы  $C$ , используем модифицированные граничные условия (20). Если  $h_{xxx}(0,t) < 0$  как следует из третьего граничного условия в (4), то мы имеем  $g''(0) = f'''(0) < 0$  или  $CG''(z_0) < 0$ . Далее мы покажем, что  $G''(z_0) < 0$  и, следовательно,  $C > 0$ . Действительно,  $\tilde{G}(z) := G(-z)$  монотонно возрастает для всех  $z \leq 0$  и  $4\tilde{G}'''(z) = -z\tilde{G}''(z) > 0$ . Если  $z > 0$ ,  $\tilde{G}'''(z) < 0$  при условии, что  $\tilde{G}''(z) > 0$ , то существует  $\tilde{z}_0 \in (0, z_0)$ , такое, что  $\tilde{G}''(z) < 0$  для всех  $z \in (-\tilde{z}_0, -z_0]$ , или, эквивалентно,  $G''(z) < 0$  для всех  $z \in [z_0, \tilde{z}_0)$ . Таким образом,  $G''(z_0) < 0$  как это показано на рис. 2.

По той же причине, существует  $\tilde{\tilde{z}}_0 \in (\tilde{z}_0, z_0]$  такое, что  $\tilde{G}'(z) < 0$  для всех  $z \in (\tilde{\tilde{z}}_0, -z_0]$ , или, эквивалентно,  $G'(z) > 0$  for all  $z \in [z_0, \tilde{\tilde{z}}_0)$ . Таким образом,  $G'(z_0) > 0$ , как это показано на рис. 2, следовательно

$$\beta(t) = \frac{f''(0)}{(t_0 - t)^{1/2}} = \frac{CG'(z_0)}{(t_0 - t)^{1/2}} > 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Таким образом, класс самоподобных решений (17) не удовлетворяет физическим требованиям потока (рис. 1), потому что  $\beta(t)$  должно быть отрицательным по крайней мере для начальных значений  $t \geq 0$ .

### Точечные уравнения

Мы приведем здесь дополнительные оценки того, как решение краевой задачи (3)-(4) может неограниченно расти за конечное время, на основе точечного уравнения (7) и его производной. Рассмотрим краевую задачу (11)-(12) и предположим, что существует



достаточно гладкое решение. Переходя к пределу  $x \rightarrow 0$ , мы вернемся к точечному уравнению (7) переписанному в новых переменных в виде:

$$u_{xxxx}(0,t) = V(t) \beta(t), \quad t \geq 0, \quad (25)$$

где  $\beta(t) = u_x(0,t)$ .

Взяв производную от линейного уравнения адвекции-диффузии (11) по  $x$  и предел  $x \rightarrow 0$ , мы получим другое точечное уравнение:

$$\frac{d\beta}{dt} + u_{xxxx}(0,t) = -\frac{1}{2}V(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Система уравнений (25) и (26) может быть переписана в частично замкнутом виде:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{u_{xxx}(0,t)}{2\beta(t)} - u_{xxxx}(0,t), \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Предположим теперь, что существует  $t_0 > 0$  такое, что

$$\beta(t) \rightarrow 0, \quad u_{xxxx}(0,t) \rightarrow a_4, \quad u_{xxxxx}(0,t) \rightarrow a_5, \quad \text{при } t \uparrow t_0, \quad (28)$$

где  $0 < |a_4| < \infty$  и  $|a_5| < \infty$ . Тогда, асимптотический анализ уравнения (27) показывает, что

$$\beta^2(t) = a_4(t_0 - t) + O(t_0 - t)^{3/2}, \quad V(t) = \sqrt{\frac{a_4}{t_0 - t}} + O(1), \quad \text{при } t \uparrow t_0, \quad (29)$$

при условии, что  $a_4 > 0$ . Скорость роста решения вблизи особенности в (29) отличается от скорости роста самоподобного решения (17) и численно полученного результата (8). В рамках численного результата (8), этот точечный анализ может означать, что либо  $a_4 = 0$  либо  $a_5 \rightarrow \infty$  в предположении (28).

Таким образом, три различных скорости роста решения вблизи особенности, утверждаемые в (8) и полученные в (17) и (29) показывают сложность динамики краевой задачи (3)-(4) или же ее эквивалентной версии (11)-(12). Таким образом, необходимы дальнейшие исследования поставленной задачи, в том числе более точное численное моделирование.

**Благодарность:** Авторы выражают благодарность Евгению Бенилову и Роману Таранцу за полезные обсуждения и доступ к их неопубликованным результатам на ранних этапах исследований. Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benilov E.S. and Vynnycky M.* "Contact lines with a  $180^\circ$  contact angle", submitted to *J. Fluid Mech.* (2012)
2. *Benney D.J. and Timson W.J.* "The rolling motion of a viscous fluid on and off a rigid surface", *Stud. Appl. Math.* **63** (1980), 93-98.
3. *Chugunova, M. Pugh, and R. Taranets,* "Nonnegative solutions for a long-wave unstable thin film equation with convection", *SIAM J. Math. Anal.* **42**, 1826-1853 (2010).
4. *Chugunova M. and Taranets R.* "Qualitative analysis of coating flows on a rotating horizontal cylinder", *Int. J. Diff. Eqs.* **2012** (2012), Article ID 570283, 30 pages.
5. *Murdock J.A.,* *Perturbations: Theory and Methods* (SIAM, Philadelphia, 1987).
6. *Ngan C.G. and Dussan V.E.B.,* "The moving contact line with a  $180^\circ$  advancing contact angle", *Phys. Fluids* **24** (1984), 2785-2787.
7. *Pelinovsky D.E., Giniyatullin A.R., and Panfilova Y.A.* "On solutions of a reduced model for the dynamical evolution of contact lines" // *Труды НГТУ.* 2012. № 4(97).

**ON THE FORMATION OF SINGULARITIES  
IN THE LINEAR ADVECTION-DIFFUSION EQUATION  
WITH A REDEFINITION OF THE BOUNDARY CONDITION**

**D. Pelinovsky<sup>1,2</sup>, A. Giniyatullin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Alexeev Nizhny Novgorod State Technical University  
24, Minin Street, Nizhny Novgorod, 603950, Russia*

<sup>2</sup>*McMaster University  
Hamilton, Ontario, Canada*

*Abstract.* We study finite-time singularities in the linear advection–diffusion equation with a variable speed on a semi-infinite line. The variable speed is determined by an additional condition at the boundary, which models the dynamics of a contact line of a hydrodynamic flow at a  $180^\circ$  contact angle. Using apriori energy estimates, we derive conditions on variable speed that guarantee that a sufficiently smooth solution of the linear advection–diffusion equation blows up in a finite time. Using the class of self-similar solutions to the linear advection–diffusion equation, we find the blow-up rate of singularity formation. This blow-up rate does not agree with previous numerical simulations of the model problem.

*Key words:* advection-diffusion equation, variable speed, determined boundary conditions, the formation of singularities, apriori energy estimates, self-similar solutions.