

during illumination on the phenomenon has been considered. Formulae for the refraction index and birefringence characteristics are obtained. As an example, the possible application of the theory to the investigation of the optical properties of shock compressed condensed matter was also considered.

*Key words:* non-stationary polarization, photo-anisotropy, shock compression.

УДК 533.6.011

## **ТЕОРЕМЫ О МАКСИМУМЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВЫСОКОСКОРОСТНОГО «ПЕРЕХЛЁСТА» В БИМОДАЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ**

**М.М. Кузнецов, Ю.Д. Кулешова, Л.В. Смотрова**

*Московский государственный областной университет  
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

*Аннотация.* Доказаны две теоремы о максимуме относительной величины высокоскоростного «перехлёста» в гиперзвуковой ударной волне. Рассмотрен однокомпонентный газ с внутренними степенями свободы, описываемый бимодальным распределением Тамма-Мотт-Смита. Максимум достигается как по координате вдоль потока в ударной волне, так и по величине относительной скорости молекул.

*Ключевые слова:* кинетика, уравнение, неравновесный, энергия активации, ударная волна, распределение, молекулярный.

Работа посвящена аналитическому исследованию эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в сильных ударных волнах, когда относительная скорость молекул, сталкивающихся внутри фронта ударной волны, значительно превосходит по величине скорость звука в газовом потоке перед волной. Несмотря на протекшие три десятилетия с начала исследования этого эффекта (в основном численных), в его понимании остается все еще много невыясненных вопросов, в разрешении которых свою полезную роль может сыграть аналитическая бимодальная модель ударной волны. С точки зрения практических приложений наибольший интерес представляет исследование т.н. высокопороговой, высокоскоростной поступательной неравновесности, возникающей при протекании неравновесных химических реакций с высокими энергиями активации в сильно сжатых газовых смесях. Однако и при рассмотрении структуры сильных ударных волн в однокомпонентных, многоатомных газах с неупругими столкновениями можно, как оказалось, установить существенное, четко определенное свойство высокоскоростной поступательной неравновесности, с необходимостью следующее из аналитической бимодальной модели ударной волны. Это свойство, по-видимому, незамеченное в численных исследованиях, сводится к тому, что в высокоскоростном «хвосте» бимодальной Тамм-Мотт-Смитовской функции распределения пар молекул, известный ранее [1] эффект «перехлёста», т.е. преобладания числа  $N_{\text{неq}}$  высокоскоростных пар внутри фронта волны над числом  $N_{\text{eq}}$  в поступательно равновес-

ной зоне за фронтом, имеет строгий максимум по величине  $N_{\text{неq}} / N_{\text{eq}}$ , зависящий от степени сжатия в сильной ударной волне.

Воспользуемся аппроксимацией Тамма-Мотт-Смита для одночастичной функции распределения  $F(b, c)$  и функции распределения пар молекул  $\bar{G}(\bar{g}, b)$ , следуя работе [2].

$$F(b, \tilde{n}) = \{(1-b)n_0 F_0(c) + bn_1 F_1(c)\} [(1-b)n_0 + bn_1]^{-1}. \quad (1)$$

Здесь  $F_0, F_1$  - «холодное» и «горячее» распределения перед и за волной;

$$F_i(c) = \left( \frac{m}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(c-u_i)^2}{2kT_i} \right], \quad (2)$$

$m$  – масса молекулы;  $u_i, T_i, n_i$  – скорости, температуры и концентрации газового потока перед ( $i = 0$ ) и за ( $i = 1$ ) волной,  $k$  – постоянная Больцмана,  $(c-u_i)$  – собственная скорость молекулы, коэффициент  $b$  задавался параметрически в интервале  $0 \leq b \leq 0$  при прохождении газа через фронт ударной волны [2].

Величина относительной функции распределения  $\bar{G}(\bar{g}, b)$  пар молекул имеет вид:

$$\tilde{G} = [(1-b)^2 \varepsilon_0^2 \tilde{G}_0 + b^2 + 2b(1-b)\varepsilon_0 \tilde{G}_{01}] \cdot [\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)b]^2, \quad (3)$$

где  $\bar{G} = \frac{G}{G_1}$ ,  $\tilde{G}_0 = \frac{G_0}{G_1}$ ,  $\tilde{G}_1 = 1$ ,  $\tilde{G}_{01} = \frac{G_{01}}{G_1}$ ,  $G_0, G_1, G_{01}$  – соответственно «холодная» (перед волной), «горячая» (за волной) и «перекрестная» моды распределений.

Распределения  $G_0$  и  $G_1$  являются максвелловскими функциями по относительным скоростям  $g$ :

$$G_i(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{kT_i} \right)^{3/2} g^2 \exp \left[ -\frac{mg^2}{4kT_i} \right].$$

Перекрестная мода имеет вид [2]:

$$G_{01}(g) = \left[ \frac{m}{2\pi k(T_0 + T_1)} \right]^{3/2} \frac{g}{u} \left\{ \exp \left[ -\frac{m(g-u)^2}{2k(T_0 + T_1)} \right] - \exp \left[ -\frac{m(g+u)^2}{(T_0 + T_1)} \right] \right\}.$$

Макроскопические параметры, входящие в соотношения (1) - (3), связаны законами сохранения потоков массы, импульса и энергии в сечениях  $i = 0$  (перед волной) и  $i = 1$  (за волной):

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + m_0(1 - \varepsilon_0^2),$$

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{u_1}{u_0} = \varepsilon_0 = \varepsilon(1 + m_0^{-1}),$$

$$u = u_0 - u_1 = u_0(1 - \varepsilon_0).$$

Здесь  $m_0 = \varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1} M_0^2$ ,  $\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ ,  $\gamma$  - отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении  $c_p$  и объеме  $c_v$ ,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1}$ ,  $M_0$  - число Маха перед волной,  $M_0 = \frac{u_0}{a_0}$ ,  $a_0$  - скорость звука перед волной,  $a_0 = \sqrt{\frac{\gamma k T_0}{m}}$ .

Выражение (3) позволяет сформулировать следующие теоремы о «перехлесте» сверхскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне.

**Теорема 1.** Для сверхскоростного превышения («перехлеста»,  $\tilde{G} > 1$ ) величины поступательно неравновесной функции распределения пар молекул внутри фронта ударной волны над соответствующей равновесной величиной за волной необходимо и достаточно, чтобы величина перекрестной моды  $\tilde{G}_{01}$  удовлетворяла соотношению

$$2\tilde{G}_{01} > 1 + \tilde{G}_0. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Величина сверхскоростного превышения ( $\tilde{G} > 1$ ) в бимодальном однокомпонентном газе при выполнении соотношения (4) достигает своего максимального значения

$$\tilde{G} = \tilde{G}_{\max} = (\tilde{G}_{01}^2 - \tilde{G}_0) / (2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0).$$

Справедливость утверждений обеих теорем непосредственно следует из выражения (3), рассматриваемого как квадратное уравнение относительно параметра  $b$  и анализа его дискриминанта на положительную определенность. Для представления о том, как выполняется неравенство (4), рассмотрим асимптотический гиперзвуковой предельный переход в параметрах функции распределения пар молекул (3).

$$M_0 \square 1, (M_0 \rightarrow \infty)$$

$$m_0 \equiv \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} M_0^2 \square 1, (m_0 \rightarrow \infty)$$

Физически этот предельный переход соответствует случаю бесконечно сильной гиперзвуковой ударной волны, когда  $M_0 \rightarrow \infty$ ,  $\frac{T_0}{T_1} \rightarrow 0$ .

В результате для выражений, входящих в формулы (2-3) получим:

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{u_1}{u_0} \rightarrow \varepsilon,$$

$$u \rightarrow u_0(1 - \varepsilon),$$

$$G_0 \rightarrow m_0^{3/2} \exp\left(-\frac{\gamma M_0^2}{4} g^{-2}\right),$$

$$G_{01} \rightarrow \sqrt{2\varepsilon(1-\varepsilon)}g^{-1} \left\{1 - \exp\left[\frac{-2g}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]\right\} \exp\left[\frac{2-(g-2)^2}{4\varepsilon(1-\varepsilon)}\right].$$

Применение асимптотического гиперзвукового предельного перехода позволяет получить простое аналитическое выражение для величины высокоскоростного «перехлеста» функции пар молекул:

$$G_{*,\max} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} e^{2\varepsilon},$$

где  $\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho_1}$ ,  $\varepsilon^{-1}$  - степень сжатия в волне.

Значения этой функции приведены в таблице.

Газ	A	(A <sub>2</sub> ) лин.	(A <sub>2</sub> ) не- лин.	(A <sub>3</sub> ) не- лин.	Равновесный диссоциирующий воздух	C <sub>8</sub> H <sub>16</sub>
$\gamma$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{22}{21}$
$\varepsilon$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{43}$
$G_{*,\max}$	1,31	2,37	4,84	36,28	1226	$3,6 \cdot 10^8$

В этой таблице величина  $\varepsilon$  задавалась в качестве параметра для случаев молекул газов с различным количеством атомов: одноатомных (A), двухатомных (A<sub>2</sub>), трехатомных (A<sub>3</sub>), многоатомных (типа C<sub>8</sub>H<sub>16</sub>). В ней также учтен случай равновесного диссоциирующего воздуха с эффективным значением параметра  $\varepsilon = \varepsilon_a = \frac{1}{21}$

$\left(\gamma = \gamma_a = \frac{h}{a} = 1,1\right)$  за скачком уплотнения [3] и, кроме того, рассмотрены отдельно случаи  $\varepsilon = \frac{1}{6}$  ( $\gamma=1,4$ ) и  $\varepsilon = \frac{1}{8}$  ( $\gamma = \frac{9}{7}$ ), соответствующие отсутствию или наличию возбужденных колебательных степеней свободы у двухатомных газов ( $A_2$ ). Где  $\gamma$  - отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении  $c_p$  и постоянном объеме  $c_v$ ,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ .

Таким образом, в данной работе показано, что в бимодальной ударной волне в однокомпонентном многоатомном газе эффект поступательной неравновесности (сверхзвуковой «перехлест») ограничен сверху величиной  $\tilde{G} = \tilde{G}_{\max}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Генич, А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л.* Поступательная релаксация в ударных волнах // Черноголовка, Препринт ОИХФ АН СССР. 1991. 68 с.
2. *Куликов, С.В., Терновая О.Н., Черешнев С.Л.* Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. – 1993. – Т. 12, № 3. – С. 340-342.
3. *Агафонов, В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю.* Неравновесные физико-химические процессы в газодинамике. – М.: Машиностроение, 1972, 344с.

#### THEOREMS ON MAXIMUM OF RELATIVE HIGH VELOCITY “OVERSHOOT” IN BIMODAL SHOCK WAVE

**M. Kuznetsov, Ju. Kuleshova, L. Smotrova**

*Moscow Region State University  
10a Radio st., Moscow, 105005, Russia*

*Abstract.* Two theorems on maximum of the relative high velocity “overshoot” in bimodal Hypersonic shock wave are proved. The one-component gas with internal degrees of freedom and Tamm-Mott-Smith distribution is considered. The maximum is achieved as the coordinate along the flow in the shock wave, and the largest relative speed of molecules.

*Key words:* kinetic, equation, nonequilibrium, activation energy, shock wave, distribution, molecular.