

УДК: 572.33+519.634

**ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА
ПРИ ИСПАРЕНИИ ФЕРМИ-ГАЗА
С ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЯ МОЛЕКУЛ**

Е.А. Бедрикова, А.В. Латышев

*Московский государственный областной университет
105005, Москва, ул. Радио, 10а*

Аннотация. Рассматривается испарение бинарной смеси для случая, когда испаряющейся компонентой является ферми-газ. Получено аналитическое решение задачи о скачке химического потенциала ферми-газа для случая, когда частота столкновений молекул испаряющейся компоненты является переменной величиной. Найдены величины скачка химического потенциала и концентрации газа. Исследована зависимость коэффициента скачка химического потенциала от коэффициента испарения. Проведено графическое исследование коэффициента скачка химического потенциала и коэффициента концентрации.

Ключевые слова: ферми-газ, испарение, аналитическое решение, скачок химического потенциала.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к решению кинетических уравнений для квантовых газов был заложен в работе [14]. В настоящее время по-прежнему наблюдается интерес к решению граничных задач для квантовых газов [2,13]. Из многочисленного потока работ выделим аналитические работы, посвященные точным решениям [1-3,5-8].

Значительный интерес вызывает поведение разреженных бинарных газовых смесей. Будем считать, что одной из компонентов бинарной газовой смеси является ферми-газ.

Целью настоящей работы является построение аналитического решения БГК (Бхатнагар – Гросс – Крук) модели кинетического уравнения Больцмана для бинарной смеси газов с использованием модели зеркально-диффузного отражения молекул газа от плоской поверхности. Имеется смесь двух газов испаряющихся с плоской поверхности в полупространство. Испаряющийся компонентой является газ ферми и его концентрация много меньше второго газа. В качестве второго газа можно выбрать, например воздух или любой другой газ, в том числе и квантовый. Вдали от поверхности задан постоянный градиент концентрации первого газа.

Требуется построить функцию распределения первого компонента, а также найти его макропараметры: коэффициент диффузии, скачок и профиль химического потенциала и концентрации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача об испарении ферми-газа с плоской поверхности в бинарную смесь квантовых газов. Полагается, что концентрация испаряющегося компонента смеси n_1 много меньше концентрации неиспаряющегося компонента n_2 : $n_1 \ll n_2$ (случай разбавленной смеси).

В квазиклассическом приближении уравнение Больцмана для бинарной газовой смеси имеет вид [9]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = J_{ii} + J_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2,$$

где f_i — функция распределения i -го компонента смеси, J_{ii} и J_{ij} — интегралы столкновений молекул i -го компонента между собой и с молекулами j -го компонента соответственно.

Заметим, что $J_{11} \sim n_1^2$, а $J_{12} \sim n_1 n_2$ (так как $f_i \sim n_i$). Величина $\varepsilon = n_1/n_2$ является малым параметром ($\varepsilon \ll 1$), т. к. $n_1 \ll n_2$. Отсюда следует, что $|J_{11}| = |J_{12}| \sim \varepsilon$. Поэтому в первом приближении по ε величиной J_{11} можно пренебречь по сравнению с величиной J_{12} . Заметим также, что в этом приближении по ε воздействием первого компонента на функцию распределения второго можно пренебречь. Значит, в условиях рассматриваемой задачи функцию распределения второго компонента газовой смеси можно считать равновесной со средней нулевой скоростью и постоянными температурой T_2 и концентрацией n_2 . В силу неравенства $n_1 \ll n_2$ температура второго компонента $T_2 = T$ является равновесной температурой системы.

Рассмотрим величину J_{12} , которую можно аппроксимировать кинетической моделью типа БГК [10,12]. Тогда кинетическое уравнение для первого компонента будет иметь вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{w}{l} (f^* - f), \quad (1.1)$$

где

$$f^* = \left[1 + \exp \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu^*(r)}{kT} \right) \right]^{-1}, \quad -\infty < \mu^*(r) < +\infty,$$

f^* — аналог фермиевской функции распределения для первого компонента, k — постоянная Больцмана, $\mu^*(r)$ — аналог химического потенциала первого компонента, T — температура смеси, считающаяся постоянной, l — средняя длина свободного пробега молекул, $w = |\mathbf{v} - \mathbf{u}_0(\mathbf{r})|$ — модуль скорости молекулы в системе отсчета, относительно которой газ покоится, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ — среднемассовая скорость в лабораторной системе координат, $\nu(\mathbf{v}) = \frac{w}{l}$ — эффективная частота столкновений молекул первого компонента с молекулами второго.

Рассмотрим декартову систему координат с центром на поверхности, с которой происходит испарение. Ось x_1 проведем перпендикулярно поверхности. При испарении с поверхности вдали от поверхности существует постоянный градиент концентрации первого компонента:

$$g_v = \left(\frac{dn}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty},$$

n – концентрация (числовая плотность) первого компонента.

Будем считать испарение слабым, т. е. предположим, что относительное изменение концентрации первого компонента на длине свободного пробега молекул l много меньше единицы:

$$|G_n| \ll 1, \quad G_n = \frac{l}{n_s} |g_n|.$$

Здесь n_s — концентрация насыщенного пара (газа) первого компонента на поверхности испарения, соответствующая температуре поверхности $T_s \equiv T$.

В этих условиях задача допускает линеаризацию. Перейдем к безразмерной скорости $C = v/v_T$, безразмерной координате $x = x_1/l$ и безразмерному аналогу химическому потенциалу $\alpha^*(x) = \mu^*(x)/(kT)$. Здесь $v_T = 1/\sqrt{\beta}$ – тепловая скорость первого компонента, $\beta = m/(2kT)$, $l = v_T \tau$ – средняя длина пробега молекул первого компонента с тепловой скоростью, τ – среднее время между двумя последовательными столкновениями молекул первого компонента. Теперь после линеаризации частоты столкновений уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x} = f_F^*(C, x) - f(C, x), \quad (1.2)$$

где

$$\mu = \frac{C_x}{C}, \quad f_F^*(C, x) = [1 + \exp(C^2 - \alpha^*(x))]^{-1}.$$

Линеаризацию задачи проведем относительно абсолютного фермиана

$$f_F^S \equiv f_F^S(C, \alpha_s) = [1 + \exp(C^2 - \alpha_s)]^{-1},$$

где α_s – значение безразмерного химического потенциала на стенке т.е.

$$\alpha^*(x) = \alpha_s + \delta \alpha^*(x).$$

Линеаризуя f_F^* относительно f_F^S , получаем:

$$f_F^S(C, \alpha) = f_F^S(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s) \cdot \delta \alpha^*(x), \quad (1.3)$$

где

$$g(C, \alpha_s) = \exp(C^2 - \alpha_s) [1 + \exp(C^2 - \alpha_s)]^{-2}.$$

Функцию распределения будем искать в виде:

$$f(x, C) = f_F^S(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)h(x, \mu, C). \quad (1.4)$$

С помощью (1.4) уравнение (1.2) записывается в виде:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} = \delta a^*(x) - h(x, \mu, C). \quad (1.5)$$

Параметр $\delta a^*(x) = a^*(x) - \alpha_s$ найдем с помощью закона сохранения числа частиц:

$$\int C [f(x, C) - f_F^*(x, C)] d^3C = 0.$$

Отсюда мы приходим к уравнению, из которого находим

$$\delta a^*(x) = \frac{\int C g(C, \alpha_s) h(x, \mu, C) d^3C}{\int C g(C, \alpha_s) d^3C} = \frac{1}{4\pi g_1(\alpha_s)} \int C g(C, \alpha_s) h(x, \mu, C) d^3C. \quad (1.6)$$

Здесь:

$$g_1(\alpha_s) = \frac{1}{2} \ln(1 + \exp(\alpha_s)),$$

в общем виде:

$$g_n(\alpha_s) = \int_0^{\infty} C^{n+2} g(C, \alpha_s) dC.$$

Следовательно, уравнение (1.5) принимает следующий вид:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu, C) = \frac{1}{4\pi g_1(\alpha_s)} \int C g(C, \alpha_s) h(x, \mu, C) d^3C. \quad (1.7)$$

Из постановки задачи будет видно, что граничные условия не зависят от модуля молекулярной скорости, т.е. считать, что $h(x, \mu, C) \equiv h(x, \mu)$. Тогда уравнение (1.7) упрощается и принимает вид:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu) d\mu. \quad (1.8)$$

Найдем истинное значение химпотенциала и сравним его с аналогом. Для этого воспользуемся свойством равновесной функции

$$\int [f(x, C) - f_{eq}(x, C)] d^3 C = 0, \quad (1.9)$$

где f_{eq} – равновесная фермиевская функция распределения,

$$f_{eq} = \left[1 + \exp\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu(r)}{kT}\right) \right]^{-1}, \quad \mu(r) < 0.$$

Рассмотрим локально равновесную функцию $f_F(C, x)$, которая имеет вид:

$$f_F(C, x) = \left[1 + \exp(C^2 - \alpha(x)) \right]^{-1},$$

где $\alpha(x)$ – значение безразмерного химического потенциала, причем $\alpha(x) = \alpha_s + \delta\alpha(x)$. Линеаризуя эту функцию относительно абсолютного фермиана f_F^s получаем:

$$f_F^s(C, \alpha) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s) \cdot \delta\alpha(x). \quad (1.10)$$

С учетом формул (1.10), (1.3) и закона сохранения (1.9) получаем равенство:

$$\delta\alpha^*(x) = \delta\alpha(x). \quad (1.11)$$

Таким образом, истинное значение химпотенциала совпадает с его аналогом и равно:

$$\delta\alpha(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x, \mu) d\mu. \quad (1.12)$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим граничное условие на поверхности испарения для молекул первого компонента, учитывающее влияние свойств поверхности путем введения коэффициента испарения q (см [4,11]):

$$f(0, C) = qf_F^s(C, \alpha_s) + (1 - q)f_F^0(C, \alpha_0), \quad C_x > 0, \quad (2.1)$$

где

$$f_F^0(C, \alpha_0) = \left[1 + \exp(C^2 - \alpha_0) \right]^{-1}.$$

Величины q и $(1-q)$ – вероятности того, что молекула, падающая на стенку, соответственно конденсируется на ней и отражается от нее без конденсации.

Граничное условие на стенке для функции $h(x, \mu)$ выведем из условия (2.1). Для этого результат линеаризации следующей функции

$$f_F^0(C, \alpha_0) = f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s)$$

подставим в условие (2.1)

$$f(0, C) = f_F^s(C, \alpha_s) + (1-q)g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad (2.2)$$

а затем, подставив условие (2.2) в уравнение (1.4) получим:

$$h(0, \mu) = (1-q)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad \mu > 0. \quad (2.3)$$

Величина $(\alpha_0 - \alpha_s)$ определяется из условия непротекания для молекул, отразившихся от поверхности без конденсации на ней (вероятность такого процесса равна $1 - q$)

$$(1-q) \int C_x [f_F^0(C, \alpha_0) \theta_+(C_x) + f(0, C) \theta_+(-C_x)] d\Omega = 0,$$

где $\theta_+(x)$ – функция Хэвисайда.

Условие непротекания преобразуем, учитывая определение функции Хэвисайда к виду:

$$\int_{C_x > 0} C_x f_F^0(C, \alpha_0) d^3C + \int_{C_x < 0} C_x f(0, C) d^3C = 0. \quad (2.4)$$

Далее, подставляя в (2.4) функцию (1.4) и функцию (2.2), получаем:

$$\int_0^1 \mu h(0, \mu) d\mu = \frac{1}{2} (1-q)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad \mu > 0.$$

Вдали от поверхности - вне слоя Кнудсена толщиной порядка длины свободного пробега молекул - функция $h(x, \mu)$ имеет вид:

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.5)$$

где

$$h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu),$$

G_α - градиент безразмерного химического потенциала, заданный вдали от стенки:

$$G_\alpha = \left(\frac{d\alpha(x)}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty}.$$

A_α – скачок химического потенциала - неизвестная величина, которая находится из решения задачи.

Подставляя функцию $h_{as}(x, \mu)$ в формулу (1.6) и учитывая (1.11) получаем асимптотическое распределение безразмерного химпотенциала:

$$a(x) = A_\alpha + G_\alpha x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует, что $A_\alpha = a_{as}(0) = \alpha_{as}(0) - \alpha_s$, т.е. скачок химпотенциала определяется как разность между экстраполированным значением химпотенциала на стенке и его значением непосредственно у стенки.

В явном виде условия непротекания (2.4) имеет вид с учетом того, что функцию распределения мы ищем в виде (1.4):

$$\int_{C_x > 0} C_x [f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s)] d^3 C + \int_{C_x < 0} C_x [f_F^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)h(0, \mu)] d^3 C$$

Отсюда, производя необходимые вычисления, приходим к выражению:

$$(\alpha_0 - \alpha_s) = \frac{4G_\alpha}{3q}. \quad (2.6)$$

Таким образом, с учетом равенства (2.6) граничное условие (2.3) принимает вид:

$$h(0, \mu) = B, \quad \mu > 0, \quad B = \frac{4G_\alpha(1-q)}{3q} \quad (2.7)$$

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение уравнения (1.8) будем искать в виде:

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu), \quad (3.1)$$

где принята следующая единичная нормировка собственной функции характеристического уравнения

$$\int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu) d\mu \equiv 1,$$

η - спектральный параметр, или параметр разделения.

Подставляя (3.1) в уравнение (1.8) найдем характеристическое уравнение:

$$\Phi(\eta, \mu)(\eta - \mu) = \frac{1}{2} \eta. \quad (3.2)$$

Решая уравнение (3.2) в классе обобщенных функций и получим собственные функции:

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta^P \frac{1}{\eta - \mu} + \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu).$$

где символ Px^{-1} означает главное значение интеграла от x^{-1} , $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ - дисперсионная функция:

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{z\pi i d\mu}{\mu - z}.$$

Теорема: Существует и причем единственное решение кинетического уравнения (1.8) с граничными условиями (2.5) и (2.7) в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения.

Решение задачи (1.8), (2.5) и (2.7) будем искать в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения:

$$h(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta, \quad (3.3)$$

где $A(\eta)$ - неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра), а A_α - неизвестная постоянная (коэффициент дискретного спектра).

Причем коэффициенты A_α и G_α связаны линейным соотношением:

$$A_\alpha = C(\alpha, q) G_\alpha, \quad (3.4)$$

где функция $C(\alpha, q)$ - коэффициент скачка химического потенциала.

Найдем коэффициенты дискретного и непрерывного спектров. Для этого подставим собственные функции в разложение (3.3) и учитывая условие (2.7) получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$B = A_\alpha - G_\alpha \mu + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta A(\eta)}{\eta - \mu} d\eta + \lambda(\mu) A(\mu), \quad \mu > 0. \quad (3.5)$$

Введем вспомогательную функцию:

$$M(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta A(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

граничные значения которой на положительной полуоси сверху и снизу связаны формулами Сохоцкого:

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = \pi i \mu A(\mu), \quad \mu > 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{M^+(\mu) + M^-(\mu)}{2} = M(\mu),$$

где

$$M(\mu) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta A(\eta)}{\eta - \mu} d\eta,$$

причем интеграл $M(\mu)$ понимается как особый интеграл в смысле главного значения по Коши.

С помощью граничных значений функций $\lambda(z)$ и $M(z)$ сверху и снизу на разрезе $(0,1)$ сведем сингулярное уравнение (3.5) к краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu)(M^+(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B) = \lambda^-(\mu)(M^-(\mu) + A_\alpha - G_\alpha \mu - B), \quad \mu > 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0.$$

Ее решение [8] имеет вид:

$$X(\mu) = \frac{1}{\mu} e^{V(\mu)},$$

где

$$V(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta(\tau)}{\tau - \mu} d\tau, \quad \zeta(\mu) = \theta(\mu) - \pi = \operatorname{arccctg} \frac{2\lambda(\mu)}{\mu\pi}.$$

С помощью однородной задачи неоднородную краевую задачу Римана сведем к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$X^+(\mu)(M^+(\mu) + A_\alpha - G_\alpha\mu - B) = X^-(\mu)(M^-(\mu) + A_\alpha - G_\alpha\mu - B), \mu > 0.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$M(\mu) = -A_\alpha + G_\alpha\mu + B - \frac{G_\alpha}{X(\mu)}.$$

Из условия разрешимости $M(\infty) = 0$ найдем величину скачка безразмерного химического потенциала:

$$A_\alpha = B + G_\alpha V_1,$$

где

$$V_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta(\tau) d\tau \approx 0.71045. \quad (3.9)$$

Коэффициент непрерывного спектра $A(\eta)$ найдем, если подставим решение краевой задачи в равенство (3.6):

$$A(\eta) = 2G_\alpha \frac{\sin \zeta(\eta)}{\pi\eta X(\eta)}.$$

Таким образом, неизвестные коэффициенты разложения (3.3) найдены. Это означает, что функция распределения испаряющейся компоненты полностью построена и представляется в виде:

$$\frac{h(x, \mu)}{G_\alpha} = C(q, \alpha) + x - \mu + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\Phi(\eta, \mu)}{\eta X(\eta)} \sin \zeta(\eta) d\eta.$$

Отсюда видно, что задача имеет единственное решения в виде разложения по собственным функциям характеристического уравнения.

4. СКАЧОК И ПРОФИЛЬ ХИМПОТЕНЦИАЛА

Сравнивая равенства (3.4) и (3.9), с учетом второго из равенств (2.7) находим коэффициент скачка безразмерного химпотенциала:

$$C(q) = \frac{4(1-q)}{3q} + V_1.$$

Распределение химпотенциала в полупространстве $x \geq 0$ задается равенством (1.12). Поставляя разложение функции распределения (3.3) в (1.12) находим профиль химпотенциала:

$$\frac{\delta a(x)}{G_\alpha} = C(q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \zeta(\eta) d\eta.$$

5. КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим функцию

$$f_{as}(x, C) = f_F^S(C, \alpha) + g(C, \alpha) h_{as}(x, \mu),$$

где $h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu)$. Эта функция называется функцией распределения Чепмена-Энскога [4,9].

Вычислим коэффициент диффузии D_{12} с помощью функции $h_{as}(x, \mu)$. Диффузный поток \mathbf{i} возникает в результате наличия в газе градиента плотности $\nabla \rho$, поэтому при малых $\nabla \rho$ имеем: $\mathbf{i} = -D_{12} \nabla \rho$ [10]. Отсюда согласно постановке задачи

$$D_{12} = -\frac{i_x}{\rho'_x} = -\frac{m \int f_{as} v_x d\Omega}{m \int (f_{as})'_{x_1} d\Omega} = \frac{1}{3} \frac{l}{\sqrt{\beta}} \frac{g_1(\alpha)}{g_0(\alpha)}.$$

Переходя к безразмерным координатам и вычисляя необходимые интегралы, получаем:

$$D_{12} = \frac{2}{3} \frac{kT}{m v_1} \frac{g_1(\alpha)}{g_0(\alpha)}, \quad (5.1)$$

где $v_1 = \frac{1}{\tau}$, $g_0(\alpha_s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dC}{1 + \exp(C^2 - \alpha_s)}$

Отметим, что при $\alpha_s \rightarrow -\infty$ этот результат переходит в классический. Используя асимптотику

$$g_0(\alpha_s) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{\alpha_s}, \quad g_1(\alpha_s) = \frac{1}{2} e^{\alpha_s}, \quad \alpha_s \rightarrow -\infty,$$

получаем известный результат [5]:

$$D_{12} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{l}{\sqrt{\beta}}.$$

6. КОЭФФИЦИЕНТ СКАЧКА ХИМПОТЕНЦИАЛА

Равенство (3.4) представляет собой величину скачка безразмерного химпотенциала. Перейдем в (3.4) к размерным величинам и учитывая, что $l = \frac{1}{v_1 \sqrt{\beta}}$, получим:

$$\delta\mu(0) = C(q) \sqrt{\frac{2kT}{m}} \frac{1}{kTv_1} \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty}.$$

Частоту столкновений v_1 выразим через коэффициент диффузии D_{12} согласно формуле (5.1). В результате получаем:

$$\delta\mu(0) = K(\alpha, q) \frac{1}{kT} \sqrt{\frac{m}{2kT}} D_{12} \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty},$$

где $K(\alpha, q)$ - коэффициент скачка химического потенциала,

$$K(\alpha, q) = 3 \frac{g_0(\alpha)}{g_1(\alpha)} \left[\frac{4(1-q)}{3q} + V_1 \right]. \quad (6.1)$$

Отметим, что при $\alpha_s \rightarrow -\infty$ коэффициент скачка химического потенциала переходит в ранее известный для классического газа результат [5]:

$$K(\alpha, q) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{4(1-q)}{3q} + V_1 \right], \quad \alpha_s \rightarrow -\infty.$$

Поведение коэффициента скачка химпотенциала (6.1) можно описать с помощью графиков (рис 1,2,3).

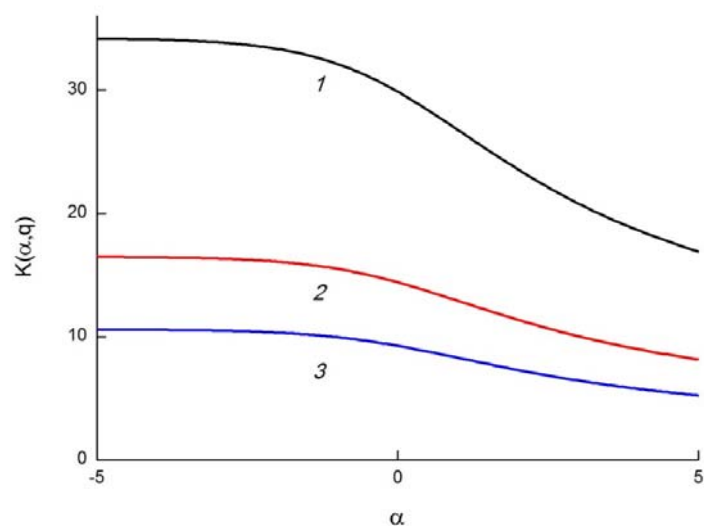


Рис.1. Зависимость коэффициента скачка безразмерного химического потенциала от величины α , кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям коэффициента испарения $q=0.1$, $q=0.2$, и $q=0.3$.

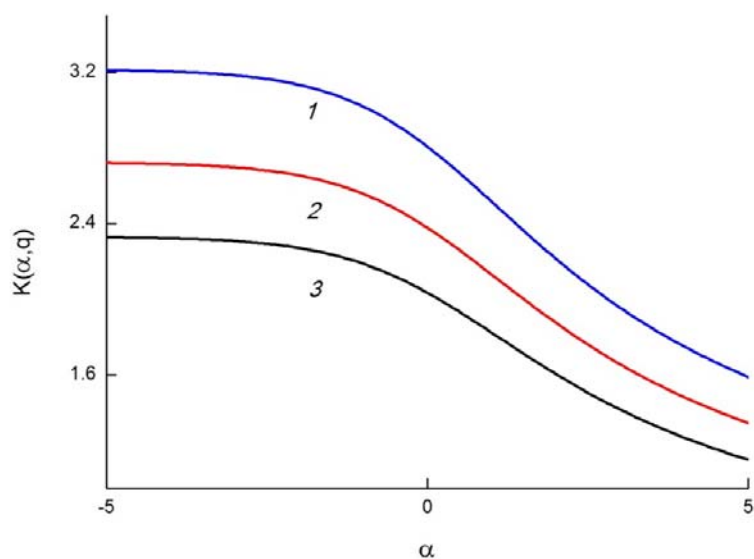


Рис.2. Зависимость коэффициента скачка безразмерного химического потенциала от величины α , кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям коэффициента испарения $q=0.8$, $q=0.9$ и $q=1$.

Анализ графиков на рис.1 и на рис.2 показывает что значение коэффициента скачка химпотенциала тем больше, чем меньше значение коэффициента испарения.

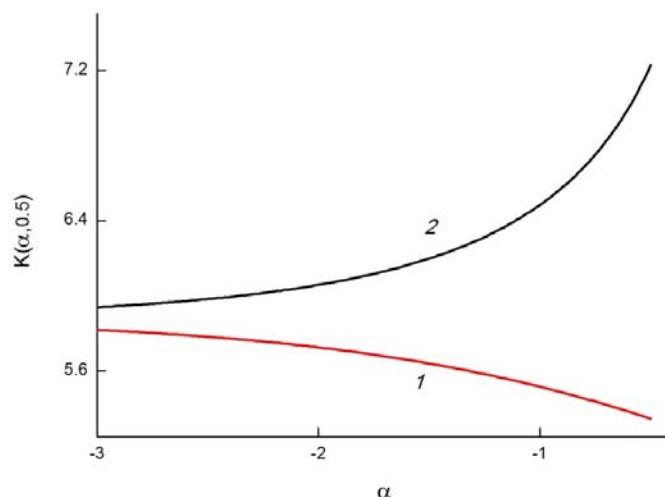


Рис.3: Зависимость коэффициента скачка безразмерного химического потенциала от величины α , кривая 1 отвечает случаю бозе-газ с переменной частотой столкновений, кривая 2 отвечает случаю ферми-газ с переменной частотой столкновений.

Сравнение коэффициента скачка химпотенциала отвечающего случаю бозе-газа с переменной частотой столкновения молекул с коэффициентами отвечающими случаям ферми-газа с переменной частотой столкновения показано на рис. 3. При этом хорошо видно, что коэффициент скачка химпотенциала для ферми-газа больше соответствующих значений для коэффициента для бозе-газа во всем диапазоне значений безразмерного химпотенциала.

7. СКАЧОК И ПРОФИЛЬ КОНЦЕНТРАЦИИ

Профиль концентрации газа $N(x)$ в полупространстве $x \geq 0$ дается равенством

$$N(x) = N_s + n(x) ,$$

где

$$N_s = \int f_B(C, \alpha) d\Omega , \quad n(x) = \int h(x, \mu) g(C, \alpha) d\Omega .$$

Нетрудно найти, что $N_s = N_0 l(\alpha)$, где

$$N_0 = \frac{4\pi(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3}, \quad l(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \ln|1 + \exp(\alpha - C^2)| dC ,$$

а отклонение концентрации насыщенного пара вычисляется так:

$$n(x) = P_N G_N$$

где

$$P_N = g_0(\alpha) \left[C(\alpha, q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \zeta(\eta) d\eta \right],$$

$$G_N = N_0 G_\alpha \quad (7.1)$$

P_N - коэффициент профиля концентрации, G_N - величина градиента концентрации (по безразмерной координате)

$$G_N = \left(\frac{dN}{dx} \right)_{x=+\infty}$$

Равенство (7.1) означает, что градиент химического потенциала есть градиент логарифма концентрации:

$$G_\alpha = \left(\frac{d \ln N}{dx} \right)_{x=+\infty}$$

Нетрудно найти связь между отклонениями концентрации и химпотенциала от соответствующих значений у стенки

$$n(x) = N_0 g_0(\alpha) a(x). \quad (7.2)$$

Из соотношения (7.2) при $x=0$ находим величину скачка концентрации:

$$n_{as}(0) = G_N C_N(\alpha, q),$$

где $C_N(\alpha, q) = g_0(\alpha) C(\alpha, q)$ - коэффициент скачка концентрации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически решена задача об испарении одной из компонент бинарного газа в случае, когда частота столкновений молекул испаряющейся компоненты является переменной величиной. Испаряющейся компонентой является ферми-газ. На основе аналитического решения задачи получено явное представление функции распределения, выражение скачка химпотенциала и распределение химпотенциала в полупространстве. Также найден скачок концентрации и построен профиль концентрации испаряющейся компоненты газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бедрикова Е.А., Латышев А.В. Chemical Potential Jump during Evaporation of a Quantum Bose Gas// arXiv:1301.1196v1 [math-ph] 7 Jan 2013
2. Квашинин А.Ю., Латышев А.В., Юшканов А.А. Изотермическое скольжение ферми-газа с зеркально-диффузным отражением от границы // Известия высших учебных заведений. Физика. 2009. Т. 52. № 12. С. 3-7.
3. Костиков А.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Скачок химического потенциала при испарении ферми-газа // Журнал технической физики. 2008. Т. 79. Вып. 4. С. 1-8.
4. Козырев А.В., Ситников А.Г. Испарение сферической капли в газе среднего давления// Успехи физ. наук. 2001. Т. 171, №7. С. 765-774.
5. Латышев А.В., Юшканов А.А. Влияние коэффициента испарения на параметры газа вблизи поверхности// ИФЖ. 2007. Т. 80, № 2. С. 121-125.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Новый метод решения граничных задач кинетической теории// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52, №3 С. 539-552.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Метод решения граничных задач для кинетических уравнений//Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1107-1118.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории. Монография. М.: МГОУ, 2008. 280 с.
9. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. Наука, Москва, 1971.
10. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. Мир, Москва, 1976.
11. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. Metallurgia, Москва, 1966.
12. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. Мир, Москва, 1978.
13. Modugno G. Fermi - Bose mixture with tunable interactions // Archiv: cond-mat/0702277.
14. Uehling E.A., Uhlenbeck G.E. Transport Phenomena in Einstein - Bose and Fermi - Dirac Gases// Physical Review. 1933, April, Vol.43. P. 552 – 561.

**CHEMICAL POTENTIAL JUMP DURING EVAPORATION
OF FERMI GAS WITH VARIABLE COLLISIONS FREQUENCY
OF MOLECULES**

E. Bedrikova, A. Latyshev

Moscow State Regional University

Abstract. Evaporation of a binary mixture is considered. Evaporating component is fermi-gas. The case when collision molecules frequency of evaporating components is proportional to the module of molecular velocity is considered. The analytical solution this problem is received. Dependence of chemical potential jump coefficient on evaporation coefficient is investigated. Concentration evaporating components is supposed much less concentration of bearing gas. Graphic research of coefficient of chemical potential jump is carried out.

Keywords: Fermi-gas, evaporation, analytical solution, chemical potential jump, concentration jump