РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

Латышев А.В., Курилов А.Д.
Московский государственный областной университет

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КАК МЕТОД РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается два класса линейных кинетических уравнений: с постоянной частотой столкновений и с постоянной длиной свободного пробега газовых молекул (т.е. с частотой столкновений молекул, пропорциональной модулю молекулярной скорости). На основе однородной краевой задачи Римана с коэффициентом, равным отношению граничных значений дисперсионной функции, развивается теория полупространственной ортогональности обобщенных сингулярных собственных функций соответствующих характеристических уравнений, к которым приводит разделение переменных.
На примере двух граничных задач кинетической теории (о диффузии легкой компоненты бинарного газа и задачи Крамерса об изотермическом скольжении) показано применение теории ортогональности собственных функций для аналитического решения указанных задач.
Ключевые слова: кинетическое уравнение, частота столкновений, граничные задачи, собственные функции, дисперсионная функция, аналитическое решение.

A. Latyshev, A. Kurilov
Moscow State Regional University (Moscow, Russia)

ORTHOGONALITY OF THE EIGENFUNCTIONS OF CHARACTERISTIC EQUATIONS AS A METHOD FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MODEL KINETIC EQUATIONS

Abstract. In the present work we consider two classes of linear kinetic equations: with constant collision frequency and constant mean free path of gas molecules (i.e., frequency of molecular collisions, proportional to the modulus molecular velocity). Based homogeneous Riemann

boundary value problem with a coefficient equal to the ratio of the boundary values dispersion function, develops the theory of the half–space orthogonality of generalized singular eigenfunctions corresponding characteristic equations, which leads separation of variables.
On the example of a two boundary value problems of the kinetic theory (diffusion light component of a binary gas and Kramers problem about isothermal slip) shows the application of the theory orthogonality eigenfunctions for analytical solutions these problems.
Key words: kinetic equation, collision frequency, boundary value problems, eigenfunctions, dispersion function, analytical solution.

1. Введение

Построение точных решений для содержательных граничных задач математической физики является большой удачей. Это в полной мере относится и к граничным задачам для кинетических уравнений.

В 1960 г. К. Кейз в работе [10] впервые предложил метод аналитического решения граничных задач для модельного уравнения переноса нейтронов

$$\boldsymbol{\mu}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{h}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2}}\int_{-1}^{1}\mathbf{h}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu}')\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}'. \qquad (1.1)$$

Общий метод разделения переменных Фурье приводит к подстановке

$$\mathbf{h}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})=\mathbf{exp}\left(-\frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{\eta}}\right)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu}). \qquad (1.2)$$

Подстановка (1.2) сводит уравнение (1.1) к характеристическому

$$(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{\eta}\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2}}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu}')\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}'. \qquad (1.3)$$

Гениальная догадка К. Кейза состояла в том, что он предложил искать решение характеристического уравнения (1.3) в пространстве обобщенных функций [1]:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{\eta}\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}\mathbf{P}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu}}+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu}), \qquad (1.4)$$

где $\lambda(z)$ – дисперсионная функция,

$$\lambda(z)=1+\frac{z}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

$\mathrm{P}x^{-1}$ – обобщенная функция (главное значение в смысле Коши при интегрировании x^{-1}), $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Свойства собственных функций (1.4), разложение решений уравнений (1.1) и их обобщений по собственным функциям изучались в работах [11–17].

Одной из первых граничных задач для модельного кинетического уравнения БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук), для которой было получено точное решение, была линеаризованная задача Крамерса об изотермическом скольжении. Эту задачу решил в 1962 г. К. Черчиньяни [18].

После работы Черчиньяни были предприняты многочисленные попытки решить аналитически задачу Смолуховского о температурном скачке и слабом испарении. Обзор таких попыток изложен в работах [2–4]. Эти попытки продолжались вплоть до появления работы [5], в которой был развит аналитический метод решения граничных задач для такого класса кинетических уравнений, которые сводятся к решению векторных интегро-дифференциальных уравнений типа уравнений переноса.

К. Черчиньяни [18] свел решение задачи об изотермическом скольжении к решению следующей граничной задачи:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x}+h(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\,h(x,\mu')d\mu',\ \ x>0,-\infty<\mu<+\infty,$$

$$h(0,\mu)=0,\ \ \mu>0,$$

$$h(x,\mu)=h_{as}(x,\mu)+o(1),\ \ x\to+\infty.$$

Здесь $h_{as}(x,\mu)$ – асимптотическая функция распределения Чепмена-Энскога,

$$h_{as}(x,\mu)=2U_0+2G_v(x-\mu),$$

U_0 – неизвестная безразмерная скорость скольжения газа, подлежащая отысканию, G_v – заданный вдали от стенки градиент безразмерной массовой скорости, $\mu=C_x,\vec{C}=\vec{v}/v_T,v_T=1/\sqrt{\beta}$ – тепловая скорость газа, $\beta=m/(2kT),m$ – масса молекулы газа, k – постоянная Больцмана, $T=const.$ – температура газа.

В задаче об испарении легкой компоненты бинарного газа (см., например, [6]) изучалось однопараметрическое семейство уравнений

$$\boldsymbol{\mu}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{h}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})=\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{exp}\left(-\boldsymbol{\mu}'^2\right)\mathbf{h}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu}')\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}',\tag{1.5}$$

где c – числовой параметр, $0<c<1,x>0,-\infty<\mu<+\infty$.

В работах [7] и [8] при решении граничных задач для модельного кинетического уравнения с частотой столкновений, пропорциональной модулю молекулярной скорости, рассматривалось уравнение

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x}+h(x,\mu)=\frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\mu'^2\right)h(x,\mu')d\mu',\ x>0,-1<\mu< \qquad (1.6)$$

В настоящей работе развивается теория ортогональности собственных функций характеристических уравнений, отвечающих уравнениям (1.5) и (1.6). В основе этой теории лежит решение краевой задачи Римана [9] из теории функций комплексного переменного. Эта теория затем применяется для решения граничных задач для уравнений (1.5) и (1.6).

2. Собственные функции в задаче о диффузии легкой компоненты бинарного газа и их ортогональность

Рассмотрим уравнение (1.5). Общий метод Фурье разделения переменных приводит к подстановке

$$h_\eta(x,\mu)=\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu), \qquad (2.1)$$

где η – спектральный параметр, вообще говоря, комплексный.

Подставляя (2.1) в (1.5), сразу получаем характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\eta\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\mu'^2\right)\Phi(\eta,\mu)d\mu'. \qquad (2.2)$$

Обозначим

$$n(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\mu'^2\right)\Phi(\eta,\mu)d\mu' \qquad (2.3)$$

и перепишем уравнение (2.2) в виде

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\eta\frac{c}{\sqrt{\pi}}n(\eta). \qquad (2.4)$$

В силу однородности уравнения (1.1) без ограничения общности можно считать, что

$$n(\eta)\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\mu'^2\right)\Phi(\eta,\mu)d\mu'\equiv 1. \qquad (2.5)$$

Из уравнений (2.3) и (2.5) в пространстве обобщенных функций [1] находим собственные функции, отвечающие непрерывному спектру

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta}\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}\boldsymbol{P}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{exp}(\boldsymbol{\eta}^2)\,\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu}). \tag{2.6}$$

Здесь $\lambda_c(z)$ – дисперсионная функция,

$$\lambda_c(z) = 1 + z\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\tau^2)\,d\tau}{\tau - z}.$$

В основу теории ортогональности положим скалярное произведение с весом $\rho(\mu) = \exp(-\mu^2)\,\gamma(\mu)$, где

$$\gamma(\mu) = \mu\frac{X^+(\mu)}{\lambda_c^+(\mu)}.$$

Здесь $X(z)$ – решение однородной краевой задачи Римана из [6]

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)},\;\; \mu > 0.$$

Решение этой задачи (см. [5]) дается равенствами

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp V(z)\,,\;\; V(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\theta(\mu)-\pi}{\mu - z}d\mu,$$

$$\theta(\mu) = \arg\lambda_c^+(\mu) = \operatorname{acot}\frac{\operatorname{Re}\lambda_c^+(\mu)}{\operatorname{Im}\lambda_c^+(\mu)},\;\; \theta(0) = 0,$$

$$\lambda_c^+(\mu) = \operatorname{Re}\lambda_c^+(\mu) + i\operatorname{Im}\lambda_c^+(\mu) = \lambda_c(\mu) + ic\sqrt{\pi}\mu\exp(-\mu^2),$$

$$\lambda_c(\mu) = 1 - 2c\mu^2\exp(-\mu^2)\int_0^1\exp(\mu^2)\,\tau^2 d\tau.$$

Скалярное произведение на множестве функций, зависящих от скоростной переменной μ, введем равенством

$$(f,g) = \int_0^{\infty}\exp(-\mu^2)\,\gamma(\mu)f(\mu)g(\mu)d\mu.$$

Для удобства собственные функции $\Phi(\eta,\mu)$ будем обозначать через $\Phi_\eta(\eta,\mu)$.

ТЕОРЕМА 1. Скалярное произведение единицы и собственной функции непрерывного спектра равно спектральному параметру, т. е.

$$(\mathbf{1},\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{\eta},\;\; \boldsymbol{\eta} > 0. \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определение скалярного произведения имеем:

$$\left(1,\Phi_\eta\right)=\int\limits_0^\infty \exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)\Phi_\eta(\tau)d\tau.$$

Представим это выражение в явном виде:

$$\left(1,\Phi_\eta\right)=\int\limits_0^\infty \exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)\left[\frac{c\eta}{\sqrt{\pi}}\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\tau}+\exp(\eta^2)\,\lambda_c(\eta)\delta(\eta-\tau)\right]d\tau=$$

$$=-\frac{c\eta}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)d\tau}{\tau-\eta}+\gamma(\eta)\lambda_c(\eta)\theta_+(\eta),$$

где θ_+ – функция Хэвисайда.

Воспользуемся теперь интегральным представлением (см. [6])

$$X(z)=1+\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

С помощью этого представления получаем:

$$\left(1,\Phi_\eta\right)=-\eta X(\eta)+\eta+\eta\frac{X^+(\eta)}{\lambda_c(\eta)}\frac{\lambda_c^+(\eta)+\lambda_c^-(\eta)}{2}=\eta,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Собственные функции $\Phi_\eta(\mu)$ образуют ортогональное семейство и имеет место равенство

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\eta}},\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\eta}'}\right)=\mathbf{N}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu}),\tag{2.8}$$

где

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\eta})=\mathbf{exp}\left(\boldsymbol{\eta}^2\right)\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{c}}^+(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{c}}^-(\boldsymbol{\eta}).\tag{2.9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению скалярного произведения имеем:

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\int\limits_0^\infty \exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)\left[\frac{c\eta}{\sqrt{\pi}}\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\tau}+\exp(\eta^2)\,\lambda_c(\eta)\delta(\eta-\tau)\right]\cdot$$

$$\left[\frac{c\eta'}{\sqrt{\pi}}\mathrm{P}\frac{1}{\eta'-\tau}+\exp(\eta'^2)\,\lambda_c(\eta')\delta(\eta'-\tau)\right]d\tau=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Здесь

$$I_1=c^2\frac{\eta\eta'}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)d\tau}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)},$$

$$I_2 = \frac{c\eta}{\sqrt{\pi}} \exp(\eta'^2)\, \lambda_c(\eta') \int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)\delta(\eta'-\tau)}{\eta-\tau} d\tau,$$

$$I_3 = \frac{c\eta'}{\sqrt{\pi}} \exp(\eta^2)\, \lambda_c(\eta) \int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)\delta(\eta-\tau)}{\eta'-\tau} d\tau,$$

$$I_4 = \exp(\eta^2+\eta'^2)\, \lambda_c(\eta)\lambda(\eta') \int\limits_0^\infty \exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)\delta(\eta-\tau)\delta(\eta'-\tau) d\tau.$$

Второй, третий и четвертый интегралы легко вычисляются как свертки с дельта-функций Дирака:

$$I_2 = \frac{c\eta\lambda_c(\eta')\gamma(\eta')}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')},$$

$$I_3 = \frac{c\eta'\lambda_c(\eta)\gamma(\eta)}{\sqrt{\pi}(\eta'-\eta)},$$

$$I_4 = \exp(\eta^2)\, \lambda_c^2(\eta)\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta').$$

Вычислим первый интеграл. Воспользуемся разложением на элементарные дроби

$$\frac{1}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)} = \frac{1}{\eta-\eta'}\left(\frac{1}{\tau-\eta} - \frac{1}{\tau-\eta'}\right),$$

а также формулой Пуанкаре-Бертрана

$$\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu}\mathrm{P}\frac{1}{\eta'-\mu} = \mathrm{P}\frac{1}{\eta-\eta'}\left(\mathrm{P}\frac{1}{\eta'-\mu} - \mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu}\right) + \pi^2\delta(\eta-\mu)\delta(\eta'-\mu).$$

В результате получаем, что

$$I_1 = c^2\frac{\eta\eta'}{\pi}\left[\frac{1}{\eta-\eta'}\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)d\tau}{\tau-\eta} - \frac{1}{\eta-\eta'}\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)d\tau}{\tau-\eta'}\right] +$$

$$+c^2\eta\eta'\pi\int\limits_0^\infty \exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)\delta(\eta-\tau)\delta(\eta'-\tau)d\tau.$$

Воспользуемся теперь интегральным представлением [6]

$$X(z) = 1 + \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\tau^2)\,\gamma(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

С его помощью интеграл I_1 равен:

$$I_1 = c\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}}\frac{X(\eta)-X(\eta')}{\eta-\eta'} + \pi c^2\eta^2\exp(-\eta^2)\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta').$$

Воспользуемся определением функции $\gamma(\tau)$. Тогда получаем, что

$$I_2+I_3=\frac{c\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\lambda_c(\eta')\frac{X^+(\eta')}{\lambda_c^+(\eta')}-\lambda_c(\eta)\frac{X^+(\eta)}{\lambda_c^+(\eta)}\right].$$

Значение дисперсионной функции на разрезе в этом равенстве заменим полусуммой ее граничных значений, а также воспользуемся однородной краевой задачей Римана. В результате получаем, что

$$I_2+I_3=\frac{c\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\frac{X^+(\eta')+X^-(\eta')}{2}-\frac{X^+(\eta)+X^-(\eta)}{2}\right]=\frac{c\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}[X(\eta')-X(\eta)].$$

Складывая выражения I_1, I_2+I_3 и I_4, получаем, что

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=[\exp(\eta^2)\,\lambda_c^2(\eta)+c^2\pi\eta^2\exp(-\eta^2)]\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')=$$
$$=\left[\lambda_c(\eta)+i\sqrt{\pi}c\eta\exp(-\eta^2)\right]\left[\lambda_c(\eta)-i\sqrt{\pi}c\eta\exp(-\eta^2)\right]e^{\eta^2}\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')=$$
$$=\exp(\eta^2)\,\gamma(\eta)\lambda_c^+(\eta)\lambda_c^-(\eta)\delta(\eta-\eta')=N(\eta)\delta(\eta-\eta'),$$

что и требовалось доказать.

Применим доказанную теорему к решению задачи о диффузии легкой компоненты бинарного газа. В [6] показано, что решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения

$$\frac{\mathbf{G_n}}{\mathbf{1-c}}=\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\mu})\mathbf{a}(\boldsymbol{\eta}')\mathbf{dn}'. \qquad (2.10)$$

Здесь $G_n=g_nl, g_n=d\ln n(y)/dy\,, l=v_T\tau$ – длина свободного пробега газовых молекул, $\tau=1/(\nu_1+\nu_2)$, ν_1 и ν_2 – частоты столкновений молекул первого и второго компонента газа между собой.

Умножим уравнение (2.10) на выражение $\exp(-\mu^2)\,\gamma(\mu)\Phi(\eta,\mu)$ и проинтегрируем полученное уравнение по μ. В результате получаем, что

$$\frac{G_n}{1-c}\int\limits_0^\infty\exp(-\mu^2)\,\gamma(\mu)\Phi(\eta,\mu)d\mu=\int\limits_0^\infty a(\eta')dn'\int\limits_0^\infty\exp(-\mu^2)\,\gamma(\mu)\Phi(\eta',\mu)\Phi(\eta,\mu)d\mu,$$

или, с помощью введенных обозначений и доказанной теоремы,

$$\frac{G_n}{1-c}\left(1,\Phi_\eta\right)=\int\limits_0^\infty a(\eta')N(\eta)\delta(\eta-\eta')dn'.$$

Отсюда с помощью теоремы 1 имеем:

$$a(\eta) = \frac{G_n}{1-c}\frac{\eta}{N(\eta)} = \frac{G_n}{1-c}\frac{\eta}{\exp(\eta^2)\,\gamma(\eta)\lambda_c^+(\eta)\lambda_c^-(\eta)} = \frac{G_n}{1-c}\frac{\exp(-\eta^2)}{X^+(\eta)\lambda_c^-(\eta)},$$

что в точности совпадает с результатом из [6].

Введем еще одно скалярное произведение на множестве собственных функций с интегрированием по спектральному параметру и весом $r(\eta) = 1/N(\eta)$:

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{1}{N(\eta)} f(\eta) g(\eta) d\eta.$$

Аналогично теореме 2 доказывается

ТЕОРЕМА 3. Собственные функции характеристического уравнения, отвечающие непрерывному спектру, ортогональны и имеет место соотношение

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\mu}')\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\mu})}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}'). \tag{2.11}$$

Представим в явном виде равенство (2.11):

$$\langle \Phi_\eta(\mu), \Phi_\eta(\mu')\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\eta^2)}{\gamma(\eta)\lambda_c^+(\eta)\lambda_c^-(\eta)} \Phi_\eta(\mu)\Phi_\eta(\mu') d\eta =$$

$$= \frac{\exp(\mu^2)}{\gamma(\mu)}\delta(\mu-\mu').$$

Из теорем 2 и 3 видно, что при переходе к ортогональности по спектральному параметру меняются местами вес и нормировочный интеграл.

3. Кинетическое уравнение с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул

Перейдем к рассмотрению уравнения (1.6). Подстановка (2.1) сводит это уравнение к характеристическому

$$(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\eta} \tag{3.1}$$

с единичной нормировкой

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\eta}) \equiv \int\limits_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{1}} \left(\mathbf{1}-\boldsymbol{\mu}'^{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu}')\mathbf{d}\boldsymbol{\mu}' \equiv \mathbf{1}. \tag{3.2}$$

Из уравнений (3.1) и (3.2) находим собственные функции характеристического уравнения

$$\boldsymbol{\Phi(\eta,\mu) = \frac{3}{4}\eta P\frac{1}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1-\eta^2}\delta(\eta-\mu)}, \qquad (3.3)$$

где $\lambda(z)$ – дисперсионная функция,

$$\lambda(z) = 1 + \frac{3}{4}z\int\limits_{-1}^{1}\frac{1-\tau^2}{\tau-z}d\tau = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(1-\tau^2)}{\tau-z}d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(1-z^2)\lambda_0(z),$$

$$\lambda_0(z) = 1 + \frac{z}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\tau-z} = 1 + \frac{z}{2}\ln\frac{1-z}{1+z}.$$

Дискретный спектр характеристического уравнения, как показано в [2, 6], состоит из одной точки $\eta_i = \infty$ кратности два. Этой точке отвечает собственная функция $\Phi_\infty = 1$, отвечающая нормировке $n(\eta) = 4/3$.

Однородная краевая задача Римана

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad 0 < \mu < 1,$$

как показано в [2, 6] имеет решение

$$\mathbf{X(z) = \frac{1}{z}\exp V(z)}, \qquad (3.4)$$

где

$$V(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{\theta(\mu)-\pi}{\mu-z}d\mu.$$

Здесь $\theta(\mu) = \arg\lambda^+(\mu)$, или

$$\theta(\mu) = \operatorname{acot}\frac{4\lambda(\mu)}{3\pi\mu(1-\mu^2)}.$$

Введем скалярной произведение

$$(f,g) = \int\limits_{0}^{1}(1-\mu^2)\gamma(\mu)f(\mu)g(\mu)d\mu,$$

в котором

$$\gamma(\mu) = \mu\frac{X^+(\mu)}{\lambda^+(\mu)}.$$

Точно так же, как теорема 1, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Имеют место следующие соотношения

$$(\mathbf{\Phi}_\infty, \mathbf{\Phi}_\infty) = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, \tag{3.5}$$

$$(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Phi}_\infty) = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\mathbf{V_1}, \tag{3.6}$$

где

$$V_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 [\theta(\mu) - \pi]d\mu \approx 0.581946\ \dots,$$

и

$$(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta} > 0. \tag{3.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенства (3.5) и (3.6). Воспользуемся интегральным представлением [6]

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\tau}^2)\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\tau})}{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{z}}\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}. \tag{3.8}$$

Разложим в окрестности бесконечно удаленной точки функцию $X(z)$, представленную равенствами (3.8) и (3.4):

$$X(z) = -\frac{1}{z}\cdot\frac{3}{4}\int\limits_0^1 (1 - \mu^2)\gamma(\mu)d\mu -$$

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z^2}}\cdot\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}^2)\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{d}\boldsymbol{\mu} - \cdots, \quad \mathbf{z} \to \infty, \tag{3.9}$$

и

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}} + \frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{z^2}} + \cdots, \quad \mathbf{z} \to \infty \tag{3.10}$$

Из сравнения коэффициентов рядов (3.9) и (3.10) вытекают равенства

$$\frac{3}{4}\int\limits_0^1 (1 - \mu^2)\gamma(\mu)d\mu = -1$$

и

$$\frac{3}{4}\int\limits_0^1 \mu(1 - \mu^2)\gamma(\mu)d\mu = -V_1,$$

которые и доказывают равенства (3.5) и (3.6).

Остальные равенства доказываются аналогично теореме 1.

ТЕОРЕМА 5. Собственные функции непрерывного спектра ортогональны между собой и имеют место следующие отношения ортогональности

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_\infty, \boldsymbol{\Phi}_\eta\right) = \mathbf{0}, \qquad (3.11)$$

$$\left(\boldsymbol{\Phi}_\eta, \boldsymbol{\Phi}_{\eta'}\right) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}'), \qquad (3.12)$$

где

$$N(\eta) = \gamma(\eta)\frac{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}{1-\eta^2}.$$

Доказывается теорема 5 аналогично теореме 2.

Примением развитую теорию к решению задачи Крамерса. В [2, 6] показано, что решение задачи Крамерса сводится к решению интегрального уравнения

$$\mathbf{2U_0 - 2G_v\mu + \int\limits_0^\infty \Phi(\eta', \mu)a(\eta')d\eta' = 0}. \qquad (3.13)$$

Здесь U_0 – неизвестная безразмерная скорость скольжения, подлежащая отысканию, а G_v – заданный вдали от стенки градиент безразмерной массовой скорости.

Для нахождения скорости скольжения умножим уравнение (3.13) на $\rho(\mu) = (1-\mu^2)\gamma(\mu)$ и проинтегрируем по μ от 0 до 1. В результате получаем уравнение

$$\mathbf{2U_0(1,1) - 2G_v\mu(1,\mu) + \int\limits_0^\infty a(\eta')\left(1, \Phi_{\eta'}\right)d\eta' = 0}. \qquad (3.14)$$

Согласно теореме 5, $\left(1, \Phi_{\eta'}\right) = 0$. Поэтому из уравнения (3.14) с учетом теоремы 5 получаем известный из [2, 6] результат:

$$U_0 = \frac{(1,\mu)}{(1,1)}G_v = V_1 G_v.$$

Для нахождения коэффициента непрерывного спектра $a(\eta)$ умножим уравнение (3.14) на $(1-\mu^2)\gamma(\mu)\Phi(\eta',\mu)$ и проинтегрируем по μ от 0 до 1. В результате получаем уравнение

$$\mathbf{2U_0\left(1, \boldsymbol{\Phi}_{\eta'}\right) - 2G_v\mu\left(\mu, \boldsymbol{\Phi}_{\eta'}\right) + \int\limits_0^\infty a(\eta')\left(\boldsymbol{\Phi}_\eta, \boldsymbol{\Phi}_{\eta'}\right)d\eta' = 0} \qquad (3.15)$$

Согласно теореме 5

$$(1, \Phi_{\eta'}) = 0, \qquad (\mu, \Phi_{\eta'}) = \eta, \qquad (\Phi_\eta, \Phi_{\eta'}) = N(\eta)\delta(\eta - \eta').$$

Поэтому из уравнение (3.15) получаем, что

$$a(\eta) = \frac{\eta}{N(\eta)}(2G_v) = \frac{(1-\eta^2)}{X^+(\eta)\lambda^-(\eta)}(2G_v),$$

что в точности совпадает с известным результатом из [2, 6, 7].

4. Заключение

В настоящей работе развивается теория ортогональности собственных функций характеристических уравнений, отвечающих двум кинетическим уравнениям. Эта теория развивается на положительной действительной полуоси (и в интервале $0 < \eta < 1$) с помощью краевой задачи Римана [9] с коэффициентом, равным отношению граничных значений дисперсионной функции на разрезе. Ортогональность применяется для решения граничных задач для рассматриваемых уравнений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит. 2000. 399 с.
2. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач кинетической теории. М.: МГОУ. 2008. 288 с.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ. 2004. 271 с.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для квантовых газов. – М.: МГОУ. 2012. 266 с.
5. Латышев А.В. Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК уравнения в задаче о температурном скачке // Прикл. Матем. и мех. 1990. Т. 54. Вып. 4. 581 – 586 с.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории. М.: МГОУ. 2008. 280 с.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о скольжении газа с использованием модельного уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Поверхность. № 1. 1997. 92–99 с.
8. Латышев А.В., Юшканов А.А. Тепловое скольжение для газа с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул // Инженерно физический журнал. Т. 71. № 2, 1998. 353–359 с.

9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
10. Case K. M. Elementary solutions of the transport equations and their applications // Ann. Phys. V. 9. № 1. 1960. P. 1–23.
11. Greenberg W., Zweifel P.F. The Riemann Hilbert problem for nonsymmetric system // J. Math. Phys. V. 32. № 12. 1991, P. 3540–3545.
12. Greenberg W., Zweifel P.F. The Case eigenfunction expansion for a conservative medium // J. Math. Phys. V. 17. №2, 1976. P. 163–167.
13. Greenberg W., van der Mee C., Protopopescu V. Boundary value problems in abstract kinetic theory. Birkhauser Verlag. Basel. 1987.
14. Greenberg W., van der Mee C., Zweifel P.F. Generalized kinetic equation // Integral Equat. Operator Theory. № 7. 1984. P. 60–95.
15. Kuscer I., McCormick N.J., Summerfield G.C. Orthogonality of Case's eigenfunctions in one speed transport theory // Ann. Phys. V. 30. № 4. 1964. P. 411–421.
16. Slawny J., Zweifel P.F. A note on the singular eigenfunction method in transport theory // Transport Theory and Statistical Physics. V 17(2&3). 1988. P. 283–294.
17. Zweifel P.F. Completeness theorems in transport theory // Transport Theory and Statistical Physics. V. 13(1&2). 1984. P. 57–67.
18. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip flow problem //Ann. Phys. (USA) 1962. V. 20. № 2. P. 219–233.