

УДК 532.546

*Лекомцев Д.Г.**Орловский государственный университет*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ БАТАРЕИ СОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ**

*Аннотация. В статье ставится плоскопараллельная краевая задача о работе батареи совершенных скважин в анизотропно – однородном грунте, для случая, когда тензор проницаемости не симметричен, а контур питания моделируется прямой. В этом случае получена система уравнений, описывающая работу батареи скважин. В статье исследовано влияние анизотропии грунта на дебит батареи скважин. Изучен вклад отдельной скважины в общий дебит батареи скважин. Ключевые слова: скважина, дебит, анизотропный пласт, прямолинейный контур питания, тензор проницаемости.*

*D. Lekomtcev**Orel State University (Orel, Russia)*

## **MATHEMATICAL MODELING OF THE WORK OF A BATTERY OF DRILLED WELLS IN AN ANISOTROPIC BEDLAYER**

*Abstract. The article raises the plane-parallel boundary value problem of the battery performed well in anisotropic – homogeneous soil, for the case when the permeability tensor is not symmetric and simulated circuit power line. In this case, a system of equations describing the operation of the battery wells. The paper studied the effect of soil anisotropy on the battery discharge wells. Studied the contribution of a single well in the overall production rate of the battery wells. Key words: well, debit, anisotropic bedlayer, straight – line contour of feeding, tensor of penetrability.*

### **1. Постановка задачи.**

В известных работах [1, с. 394–397, 4, с. 323–330, 5, с. 30–71, 6, с. 129–139] изучается фильтрация жидкости (в частности, осесимметричное течение к несовершенной скважине) в ортотропных пористых средах (грунтах), проницаемость которых характеризуется симметричным тензором второго ранга.

Исследуем работу батареи  $n$  совершенных (по степени вскрытия пласта) эксплуатационных скважин дебита  $Q_v$ ,  $v=1,2,\dots,n$ , расположенных в однородном недеформируемом горизонтальном анизотропном пласте постоянной толщины. Дебит  $Q_v$  относится к единице мощности пласта. Грунт характеризуется коэффициентом проницаемости  $K$  – тензором второго ранга (в общем случае, несимметричным). В случае плоскопараллельной задачи тензор  $K = (K_{ij})$ ,  $i,j=1,2$ , компоненты тензора – постоянные величины.

Течение к скважине описывает обобщенный потенциал  $\varphi = -(p + \rho\Pi) / \mu$  ( $\Pi$  – потенциал массовой силы – силы тяжести,  $p$  – давление,  $\mu$  и  $\rho$  – вязкость и плотность жидкости). Как функция декартовых координат  $x, y$ , обобщенный потенциал  $\varphi$  удовлетворяет во всей области течения (за исключением особых точек  $\varphi$ ) уравнению [3, с. 240].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) относится к эллиптическому типу, при условии, что его коэффициенты –  $K_{ij}$ ,  $i,j=1,2$  удовлетворяют соотношениям

$$K_{11} > 0 \quad (K_{22} > 0), \quad D(K_s) = K_{11}K_{22} - (K_{12} + K_{21})^2 / 4 > 0.$$

Здесь  $D(K_s)$  – определитель симметричной части  $K_s = (K + K^T) / 2$  тензора  $K$  ( $K^T = (K_{ji})$  – транспонированный тензор).

Уравнение (1.1) записано в безразмерных величинах [3, с. 240].

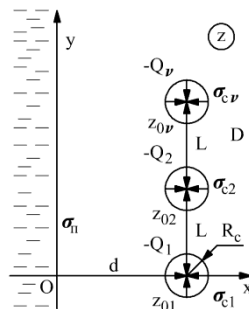


Рис. 1. Постановка задачи на физической плоскости  $Oxy$ .

На физической комплексной плоскости  $z=x+iy$  ( $x, y$  – декартовы координаты, рис. 1) скважина расположена в точке  $z_{0v} = x_{0v} + iy_{0v}$ , и течение происходит в области  $D$  с границей  $\Sigma$ , включающей контур питания  $\sigma_{\Pi}$  и контуры скважин  $\sigma_{Cv}$ , ( $\Sigma = \sigma_{\Pi} \cup_{v=1}^n \sigma_{Cv}$ ). Контур питания  $\sigma_{\Pi}$  – прямая (ось  $Oy$ ), а контур  $\sigma_{Cv}$ ,  $v=1,2,\dots,n$ , представим в виде малой окружности с центром в точке  $z_{0v}$ . Контуры  $\sigma_{\Pi}$  и  $\sigma_{Cv}$  не пересекаются,  $d$  – минимальное расстояние от контура питания до батареи скважин на физической плоскости  $Oxy$ ,  $L$  – расстояние между соседними скважинами на плоскости  $Oxy$ .

На контуре  $\Sigma$  течение должно удовлетворять условиям для обобщенного потенциала  $\varphi$ , эти условия запишем в виде [1, с. 394]

$$\varphi^+(z) = \alpha_{\Pi}(z), \quad z \in \sigma_{\Pi}, \quad (1.2)$$

$$\varphi(z) = \alpha_{Cv}(z), \quad z \in \sigma_{Cv}, \quad v=1,2,\dots,n \quad (1.3)$$

Здесь  $\alpha_{\Pi}(z)$  и  $\alpha_{Cv}(z)$  – непрерывные периодические функции, знаком «+» обозначено предельное значение обобщенного потенциала на контуре питания  $\sigma_{\Pi}$  при подходе к нему со стороны орта нормали  $\vec{n}$ . Так как контур  $\sigma_{Cv}$  мал, то можно требовать выполнения условия (1.3) в любой точке  $z_* \in \sigma_{Cv}$ .

Для практики представляют интерес два случая исследования работы скважины в пласте грунта заданной проницаемости  $K$ . В первом из них определяются дебит  $v$  – скважины  $Q_v$  по заданным на контуре  $\Sigma$  давлениям (на контуре  $\Sigma'$  заданы  $\alpha'_{\Pi}(z)$  и  $\alpha'_{Cv}(z)$ ). Во втором случае находятся давления (значения  $\alpha_{Cv}(z)$ ,  $z = z_* \in \sigma_{Cv}$  на контуре скважины) по заданному дебиту  $Q_v$  и давлению (задана функция  $\alpha_{\Pi}(z)$ ) на контуре питания  $\sigma_{\Pi}$ . Для определенности решим задачу в первом случае.

Итак, на физической плоскости  $z$  ставится следующая граничная задача. Задана проницаемость пласта  $K = (K_{ij})$  и условия (1.2), (1.3). Нужно найти дебит  $Q_v$  скважины. Задача сводится к решению уравнения (1.1) при условиях (1.2) и (1.3). Эта задача относится к первой внутренней краевой задаче (задаче Дирихле) которая имеет единственное решение [3, с. 243].

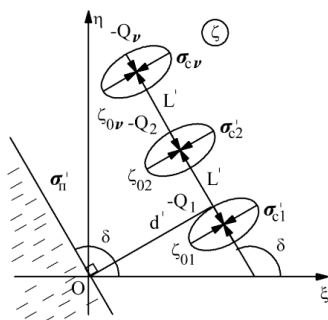


Рис. 2. Постановка задачи на вспомогательной плоскости  $O\xi\eta$ .

Сложный вид уравнения (1.1) затрудняет решение поставленной задачи, поэтому для исследования течения введем вспомогательную плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  ( $\xi, \eta$  – декартовы координаты, рис. 2). Перейдем на плоскость  $\zeta$ , для этого применим гомеоморфное (взаимно однозначное и непрерывное) аффинное прямое (и обратное) преобразование [1, с.395]

$$\zeta = z + \mu_0 \bar{z} \quad \left( z = \frac{\zeta + \mu_0 \bar{\zeta}}{1 - |\mu_0|^2} \right) \quad (1.4)$$

где  $\mu_0 = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, |\mu_0| < 1.$

Из (1.4) следуют формулы связывающие координаты физической ( $x, y$ ) и вспомогательной плоскостей ( $\xi, \eta$ ):

$$\xi = (1 + a)x + by, \quad \eta = bx + (1 - a)y \quad (1.5)$$

$$x = \frac{(1 - a)\xi - b\eta}{1 - a^2 - b^2}, \quad y = \frac{(1 + a)\eta - b\xi}{1 - a^2 - b^2}$$

в которых  $a = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}, b = -\frac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}},$

$$\alpha = \frac{K_{22}}{K_{11}} > 0, \quad \beta = \frac{K_{12} + K_{21}}{2K_{11}}, \quad \gamma = \frac{K_{12} - K_{21}}{2K_{11}} \quad (\beta^2 < \alpha).$$

Сформулируем поставленную задачу на вспомогательной плоскости  $\zeta$ . На плоскости  $\zeta$  течение описывает следующее из (1.1), согласно преобразованиям (1.4) (или (1.5)), уравнение Лапласа для  $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (1.6)$$

На плоскости  $\zeta$ , область течения  $D'$  ограничена кривой  $\Sigma' = \sigma'_{\Pi} \cup_{\nu=1}^n \sigma'_{C\nu}$  ( $\sigma'_{\Pi}$  – контур питания,  $\sigma'_{C\nu}$  – эллипс с центром в точке  $\zeta_{0\nu}$ ), являющейся в соответствии с (1.4) образом кривой  $\Sigma$ . Таким образом  $\nu$  – скважина того же дебита  $Q_\nu$  расположена в точке  $\zeta_{0\nu} = z_\nu + \mu_0 \bar{z}_\nu$  этой плоскости.

Работу  $\nu$  – скважины моделируем стоком мощности  $Q_\nu$  ( $Q_\nu > 0$ ), расположенном в точке  $\zeta_{0\nu}$ . Течение в отсутствие границы  $\Sigma'$  описывает обобщенный потенциал  $\varphi_0(\zeta)$ , который запишем в виде

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{\nu=1}^n Q_\nu \Phi_\nu(\zeta, \zeta_{0\nu}) \quad (1.7)$$

Здесь  $\Phi_\nu(\zeta, \zeta_{0\nu})$  – первое фундаментальное решение по переменной  $\zeta$  уравнения (1.6), которое имеет вид [3, с.395]:

$$\Phi_\nu(\zeta, \zeta_{0\nu}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_{0\nu}|} \\ \left( |\zeta - \zeta_{0\nu}| = [(\xi - \xi_{0\nu})^2 + (\eta - \eta_{0\nu})^2]^{1/2} \right) \quad (1.8)$$

Обобщенный потенциал течения  $\varphi(\zeta)$  представим в виде:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta),$$

где  $\varphi_*(\zeta)$  – обобщенный потенциал возмущений (гармоническая функция), обусловленный существованием границы  $\Sigma'$ . В этом случае условия (1.2), (1.3) для  $\varphi_*(\zeta)$  можно записать в виде:

$$\varphi_*^+(\zeta) = \alpha'_{\Pi}(\zeta) - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_{\Pi}, \quad (1.9)$$

$$\varphi_*(\zeta) = \alpha'_{C\nu}(\zeta) - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_{C\nu}, \quad \nu=1,2,\dots,n. \quad (1.10)$$

Условие (1.10) выполняется на контуре скважины  $\sigma'_{C\nu}$ , размер которого мал в сравнении с характерным размером области  $D'$ . Поэтому можно потребовать выполнение условия (1.10) в какой-нибудь точке  $\zeta_*$  контура  $\sigma'_{C\nu}$  ( $\zeta = \zeta_* \in \sigma'_{C\nu}$ ). Согласно (1.5) контур скважины  $\sigma'_{C\nu}$  – эллипс с полуосями  $A_C = R_C(1 + \mu_0)$  и  $B_C = R_C(1 - \mu_0)$  [2, с. 71]. Заменим эллиптический контур

скважины  $\sigma'_{c\nu}$  окружностью  $\tilde{\sigma}'_{c\nu}$  «эффективного» радиуса  $R'_c$ . Радиуса  $R'_c$  выберем так, чтобы площадь круга ограниченного окружностью  $\tilde{\sigma}'_{c\nu}$  была равна площади ограниченной контуром  $\sigma'_{c\nu}$ :  $\pi R'^2_c = \pi A_C B_C$ . Отсюда следует  $R'_c = \sqrt{A_C B_C}$  или, как показано в [2, с. 71],  $R'_c = R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2}$ .

Следовательно, решение задачи о дебите  $\nu$ -скважины сводится в плоскости  $O\xi\eta$  к нахождению гармонической функции  $\varphi$  (потенциала скорости), удовлетворяющего уравнению (1.6) с учетом условий (1.9), (1.10).

## 2. Дебит скважины.

Следуя [2, с. 72, 6, с. 107], задачу о работе системы скважин с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта сведем к решению системе уравнений

$$\begin{cases} \varphi_n - \varphi_{c1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left( Q_1 \ln \frac{2d'}{R'_c} + Q_2 \ln \frac{2d'}{r_{2,1}} + Q_3 \ln \frac{2d'}{r_{3,1}} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{r_{n,1}} \right) \\ \varphi_n - \varphi_{c2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left( Q_1 \ln \frac{2d'}{r_{1,2}} + Q_2 \ln \frac{2d'}{R'_c} + Q_3 \ln \frac{2d'}{r_{3,2}} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{r_{n,2}} \right) \\ \dots \\ \varphi_n - \varphi_{c\nu} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left( Q_1 \ln \frac{2d'}{r_{1,\nu}} + Q_2 \ln \frac{2d'}{r_{2,\nu}} + \dots + Q_\nu \ln \frac{2d'}{R'_c} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{r_{n,\nu}} \right) \\ \dots \\ \varphi_n - \varphi_{cn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \left( Q_1 \ln \frac{2d'}{r_{1,n}} + Q_2 \ln \frac{2d'}{r_{2,n}} + Q_3 \ln \frac{2d'}{r_{3,n}} + \dots + Q_n \ln \frac{2d'}{R'_c} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\varphi_{c\nu}$  - забойное давление  $\nu$  - скважины,  $r_{1,\nu}$ ,  $r_{2,\nu}$ , ...,  $r_{n,\nu}$  - расстояние от центров остальных скважин до центра  $\nu$  - скважины.

В соответствии с преобразованием (2.1) контур питания в плоскости  $O\xi\eta$  - прямая  $\sigma'_\Pi$ :

$$(1-a)\xi - b\eta = 0 \quad (2.2)$$

Согласно [2, с. 71] прямая  $\sigma'_\Pi$  образует с осью  $O\xi$  угол  $\delta$  ( $\operatorname{tg}\delta = (1-a)/b$  при  $b \neq 0$ ;  $\delta = \pi/2$  при  $b=0$ ). Используя преобразование (1.4) можно найти расстояния  $d'$  и  $L'$  на вспомогательной плоскости  $O\xi\eta$ . Минимальное расстояние от контура питания до батареи скважин:

$$d' = \frac{d(1 - |\mu_0|^2)}{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}}. \quad (2.3)$$

Кратчайшее расстояние между соседними скважинами на вспомогательной плоскости  $O\xi\eta$  выражается соотношением:

$$L' = \frac{L(1 - |\mu_0|^2)}{\sqrt{(1-a)^2 + b^2}} \quad (2.4)$$

Дебит  $Q_v$  ищем из (2.1) с учетом выражений (2.3) и (2.4). Если  $n=1$ , то система (2.1) переходит в уравнение, описывающее работу совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта [2, с.72].

Для исследования влияния анизотропии грунта на дебит введем величину  $\varepsilon$  - относительный дебит.

$$\varepsilon = \frac{\sum_{v=1}^n Q_v}{Q_0} - 1 \quad (2.5)$$

где  $Q_0$  - дебит скважины с прямолинейным контуром питания в изотропной среде [6, с. 106].

$$Q_0 = \frac{2\pi(\varphi_n - \varphi_c)}{\ln \frac{2d}{R_c}}. \quad (2.6)$$

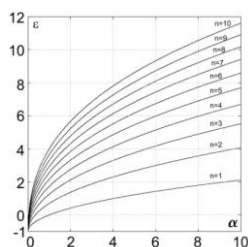


Рис. 3. Зависимости относительного дебита  $\varepsilon$  от коэффициента  $\alpha$  ( $\beta=0, \gamma=0, d=10L, L=1000 R_C$ ).

На рис. 3 показаны рассчитанные зависимости относительного дебита  $\varepsilon$  от значений коэффициента  $\alpha$ . Анизотропия грунта может значительно изменять дебит батареи (возможно, его увеличение или уменьшение по

сравнению с  $Q_0$ ). Для случая  $n=1$ , кривая отражает работу одиночной совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта, результат совпадает с [2, с. 72]. Данных характеризующие вклад каждой последующей скважины в общий дебит батареи представлены в таблице 1. Величина  $\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$  характеризует изменение дебита батареи из  $n+1$  скважин, по сравнению с дебитом батареи из  $n$  скважин. Видно, что вклад каждой последующей скважины в общий дебит батареи уменьшается.

Таблица 1

**Вклад скважин в дебит батареи,  $\alpha=10$  ( $\beta=0, \gamma=0, d=10L, L=1000 R_C$ ).**

Число скважин $n$	Дебит батареи $\varepsilon$	$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$
1	2.11	-
2	4.07	0.927
3	5.52	0.355
4	6.69	0.212
5	7.69	0.150
6	8.59	0.116
7	9.41	0.096
8	10.18	0.082
9	10.91	0.072
10	11.61	0.064

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Орловской области в рамках научного проекта №12-01-97522 р\_центр\_а.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Пивень В.Ф. Задача о работе системы скважин в анизотропном пласте грунта // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», Херсон, 8-12 июня 2009 г. Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2009. С. 394–397.
2. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины



- с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 3. С. 69–74.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», Херсон, 11–16 июня 2007 г. Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2007. С. 239–243.
  4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 664 с.
  5. Радьгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: учеб. пособие для студентов педвузов. М.: Высшая школа, 1983. 160 с.
  6. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы. 1963. 397 с.