

УДК.533.72.

*Голов А.Н., Филиппова А.П.**Московский Государственный Областной университет*

ПОЛУЧЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ВЕЩЕСТВА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ГАЗОПОДОБНОМ ОБЛАКЕ

Аннотация. Рассмотрена эволюция нестационарного широкого газоподобного облака в полупространстве. Рассмотрена плотность потока вещества в нестационарной газоподобной системе многих частиц. Найдено аналитическое выражение плотности потока вещества с учетом непотенциального слагаемого. Даны анализ и графическое представление полученных формул.

Ключевые слова: кинетическая теория, нестационарный газ, поток массы.

*A. Golov, A. Filippova**Moscow State Regional University (Moscow, Russia)*

DERIVATION AND INVESTIGATION OF THE FORMULA OF THE MATTER FLOW DENSITY IN A NONSTATIONARY SEMI-RESTRICTED GAS-LIKE CLOUD

Abstract. The evolution of a nonstationary wide gas-like cloud expanded into the half-space is considered. The density of the matter flow in a nonstationary gas-liked system of many particles is studied. The analytical formulae of the matter flow density with allowance for a nonpotential term are derived. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

Keywords: kinetics, kinetic theory, nonstationary gas, matter flow.

1. Целью данной работы является нахождение и исследование формулы плотности потока вещества в процессе расширения нестационарного газоподобного облака в полуограниченный объем вакуума.

Вопросы, связанные с процессами интенсивного испарения газов, представляют большой интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения и постоянно находятся в поле внимания исследователей ([1 – 5] и др.). Изучение этих процессов обусловлено, в частности, необходимостью

создания и развития новых наукоемких технологий. К этим технологиям относятся и вакуумные технологии. Исследование процессов интенсивного испарения, а также эволюции облака, возникшего в результате такого испарения, актуально для практических разработок приборов для вакуумного напыления, теплообменного оборудования, систем комплексной тепловой защиты летательных аппаратов. Таким образом, актуальность исследования рассматриваемого процесса определяется важными практическими приложениями в физике аэродисперсных систем, в аэродинамике, микроэлектронике, экологии, а также теоретическим интересом.

В настоящее время подобные процессы рассматривают в трех подходах: гидродинамики, газодинамики и неравновесной термодинамики и, наконец, статистической газодинамики. Из них наиболее глубоким и перспективным считается последний. Гидродинамическое описание ограничивается сложностью включения в теорию тепловых явлений и уравнения состояния, а также, обычно, не учитывает непостоянство плотности среды (модель несжимаемой жидкости). Второй подход, так же как и гидродинамический, не учитывает микроскопическое строение среды. К подобным задачам применяется также комбинированный подход, основанный на решении уравнения Больцмана в прилегающем к поверхности слое Кнудсена и использовании методов газодинамики за пределами этого слоя. Однако представляется желательным такое рассмотрение данного процесса, которое, исходя из микроскопической теории, позволяло бы дать и кинетическое описание его в представлении квазинепрерывной среды, включая эволюцию плотности потока вещества во времени и пространстве.

2. В данной работе мы используем модель и результаты статьи [6]. Как и в указанной работе, будем рассматривать систему N однородных слабо взаимодействующих частиц массы m , образованную путем быстрого испарения или диспергирования в вакуум достаточно тонкого плоского слоя, нанесенного на весьма широкую непроницаемую пластину (далее – стенку) площадью S . Частицами могут быть как молекулы, так и более крупные дисперсные частицы. Внешние поля в данной задаче не учитываем. Т. о., имеем полуограниченное

облако, для которого стенка, с микроскопической точки зрения, является бесконечно толстым и высоким потенциальным барьером.

Задачу исследования процесса расширения нестационарного газоподобного облака в полуограниченный объём можно разбить на два этапа. На первом этапе целью является отыскание неравновесной, многочастичной, статистической функции распределения, удовлетворяющей уравнению Лиувилля - Гиббса и условиям поставленной задачи. Второй этап заключается в описании, с помощью найденной функции эволюции рассматриваемой системы в рамках кинетической теории. 1-й этап рассмотрен в статье [6], где получена функция распределения в виде:

$$F_N = \frac{1}{Z_N} \exp \left[- \sum_{i=1}^{3N} (k_1 p_i^2 + k_2 p_i + k_3 p_i q_i + k_4 q_i + b q_i^2 + k_5) \right], \quad (1)$$

где Z_N – статистический интеграл, определяемый условием нормировки, q_i, p_i – фазовые переменные, и введены для упрощения записи коэффициенты:

$$k_1 = a + \frac{ct}{m} + \frac{bt^2}{m^2}; \quad k_2 = -\frac{h_3 t}{m} - 2p_3 a - \frac{cp_3 t}{m} + g_3; \quad k_3 = -\frac{2bt}{m} - c; \quad k_4 = cp_3 + h_3; \quad k_5 = ap_3^2 - g_3 p_3. \quad (2)$$

a, b, c, g_3, h_3, p_3 – константы задачи, вводимые из соображений размерности [6] и определяемые из дополнительных условий. Далее, выберем систему координат так, что плоскость XY совпадает с плоскостью стенки, а OZ ортогональна этой плоскости. Входящие в (2) константы g_3, h_3, p_3 допускаются только в членах, связанных с z -компонентами фазовых переменных, для прочих членов они равны нулю. Следовательно, для этих членов аннулируются коэффициенты k_2, k_4, k_5 .

Задача 2-го этапа, в частности, нахождение и исследование формулы плотности потока вещества, является предметом данного исследования. Предшествующая задача – получение формулы плотности облака – рассмотрена в той же статье [6]. Найденное там выражение совместной плотности имеет вид:

$$\rho = \frac{2mN\sqrt{B} \cdot \exp[-B \cdot (z-Q)^2]}{LS\sqrt{\pi} \cdot [1 + \Phi(\sqrt{B}Q)]}, \quad (3)$$

где: z – координата точки в физическом пространстве, ортогональная плоскости стенки, L – толщина исходного слоя, $\Phi(\xi)$ – интеграл вероятности,

$$B = -k_4 + \frac{k_2 k_3}{2k_1} = \frac{bw}{u},$$

$$Q = \frac{(4abwp_3 - c \cdot h_3 - 2bg_3) \cdot t - 2amh_3 - cmg_3}{4mabw} \quad (4)$$

– координата максимума плотности. При этом:

$$w = 1 - \frac{c^2}{4ab}; \quad u = 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}.$$

Далее примем z равной сумме начальной координаты и её приращения:

$$z = z_0 + z_t. \quad (5)$$

При этом плотность в начальном состоянии системы (в слое конденсированного вещества на стенке при $t=0$), получаемая из (3) методом, предложенным в [7]:

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 \cdot \Delta(z_0, 0, L); \quad \rho_0 = Nm / V_0, \quad (6)$$

где $\Delta(z_0, 0, L)$ – функция, равная 1 при $z_0 \in [0, L]$ и нулю при $z_0 \notin [0, L]$.

Плотность в текущем состоянии системы:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\rho_0 \cdot \sqrt{\pi BL} \cdot \left\{ \Phi \left[\sqrt{B} \cdot (Q - z_t) \right] - \Phi \left[\sqrt{B} (Q - z_t - L) \right] \right\}}{\left\{ \sqrt{\pi BL} + \exp \left[-B(Q+L)^2 \right] - \exp \left[-BQ^2 \right] + \sqrt{\pi B} \cdot \left[(Q+L) \cdot \Phi \left[\sqrt{B} (Q+L) \right] - Q \cdot \Phi \left(\sqrt{B} Q \right) \right] \right\}}.$$

3. Для плотности потока в кинетической теории [8] вводится оператор:

$$\hat{\mathbf{j}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \delta_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{r}) \quad (7)$$

(\mathbf{p}_i , \mathbf{q}_i – импульс и координата i -ой частицы в фазовом пространстве, \mathbf{r} – радиус-вектор в физическом пространстве). Тогда для динамической величины (плотности потока) имеем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{j}} F_N \cdot d\Gamma \quad (8)$$

($d\Gamma$ – элемент фазового объёма). Из (8) получим искомое выражение для плотности потока массы. В данной задаче нас интересует только z -проекция, которая имеет вид:

$$j = - \frac{(k_2 + k_3) N \sqrt{B} \cdot e^{(-B(z-Q)^2)}}{k_1 \sqrt{\pi} \cdot S \cdot (1 + \Phi(Q\sqrt{B}))}, \quad (9)$$

где, как и выше, $z = z_0 + z_t$, так что это – совместная плотность потока, зависящая от начальной координаты z_0 и приращения z_t .

4. В начальный момент времени ($t = 0$) плотность совместного потока имеет вид:

$$j_0 = \frac{(2ap_3 - g_3 + cz)N\sqrt{bw} \cdot \exp[-bw(z - Q_0)^2]}{aS\sqrt{\pi}[1 + \Phi(Q_0\sqrt{bw})]}, \quad (10)$$

где (см. (4))

$$Q_0 = -\frac{2ah_3 + cg_3}{4abw}.$$

На стенке (при $z = 0$) в начальный момент времени совместный поток:

$$j_{00} = \frac{(2ap_3 - g_3)N\sqrt{bw} \cdot \exp[-bw(Q_0)^2]}{aS\sqrt{\pi}[1 + \Phi(Q_0\sqrt{bw})]}. \quad (11)$$

Асимптотически, с течением времени, равно как и с увеличением координаты, имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} j = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} j = 0.$$

Условие неразрывности среды (при отсутствии источников массы):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

для данной задачи приводится к виду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

где ρ – совместная плотность облака (3), j – совместная плотность потока массы (9). Подставляя в (12) выражения (3) и (9), находим, что условие неразрывности действительно выполняется при любых значениях координат и времени. Сравнивая формулы (3) и (9), можем записать:

$$j = \frac{-(k_2 + k_3 \cdot z) \cdot \rho}{2mk_1}. \quad (13)$$

Совместный поток (13) можно разбить на части, выделив в нем конвективный поток, пропорциональный плотности (3) и неконвективный поток, пропорциональный градиенту плотности, причем первый равен произведению плотности на некоторую массовую скорость:

$$j_c = \rho \cdot v_m; \quad (v_m = \frac{k_2 + k_3 Q}{k_1 m}) \quad (14)$$

Неконвективный (кондуктивный) поток пропорционален градиенту плотности, аналогично потоку диффузии:

$$j_g = \frac{k_3 \cdot \text{grad}(\rho)}{4mB \cdot k_1}, \quad (15)$$

где

$$\text{grad}(\rho) = -\frac{4mN \cdot B^{(3/2)}(z-Q) \cdot e^{(-B(z-Q)^2)}}{\sqrt{\pi} \cdot (1 + \Phi(\sqrt{BQ}))}.$$

Очевидно, с течением времени оба потока стремятся к нулю, причем множители в правых частях (14) и (15) зависят от времени. Поэтому, в зависимости от времени, один из этих потоков может преобладать. Важно, что условие неразрывности выполняется для полного потока массы, а не отдельно для конвективного и неконвективного потока, как это имеет место в модели несжимаемой жидкости и в линейной теории переноса.

Зададим начальные условия. Примем, что в начальный момент плотность облака на стенке максимальна. Отсюда следует: 1) кондуктивный поток на стенке равен нулю, ввиду обнуления градиента плотности; 2) полный поток в момент $t=0$ создается только конвективным потоком. Из этого следует:

$$h_3 = -\frac{g_3 c}{2a}. \quad (16)$$

Выше p_3 мы ввели формально, как некоторый постоянный импульс, приходящийся на одну частицу, вследствие придания слою начальной массовой скорости v_0 в момент его отрыва от стенки. Дополнительным условием выбираем $p_3 = m \cdot v_0$. Используя определение массовой скорости (14) в начальный момент времени, находим:

$$p_3 = mv_0 + \frac{g_3}{2a}.$$

При выборе $p_3 = m \cdot v_0$ имеем $g_3 = 0$, следовательно, и $h_3 = 0$. Тогда все вышеприведенные выражения для плотности и плотности потоков упрощаются.

Далее найдем значения потоков в начальном и текущем состояниях, аналогично тому, как это сделано выше для плотности с помощью представления (5) и взаимно дуального интегрирования. В начальный момент

имеем с некоторой вероятностью частицы, имеющие координаты со значениями от нуля до L . Для нахождения значений конвективного и кондуктивного потоков в начальном состоянии интегрируем их выражения по z_t в пределах от $-z_0$ до ∞ и подставим $t = 0$. В результате получаем:

$$j_{c0} = \frac{Nmv_0}{LS}; \quad j_{g0} = \frac{Nc}{2aLS\sqrt{\pi bw}}, \quad (17)$$

где j_{c0} – конвективный поток в начальном состоянии; j_{g0} – кондуктивный поток в начальном состоянии. Из формул (17) видно, что начальный конвективный поток равен плотности направленного импульса всех частиц, а кондуктивный поток, в отличие от конвективного, создается средней скоростью хаотического движения и не равен нулю при $c \neq 0$. Следует обратить внимание на то, что начальное значение кондуктивного потока в составе формулы полного потока (9) не равно значению кондуктивного потока в начальном состоянии, определённое выше. Если градиент плотности большой, температура велика, а масса частиц мала, то кондуктивный поток может преобладать над конвективным. Полный поток в начальном состоянии создается суммой потоков (17).

Для нахождения значений потоков в текущем состоянии используем второй нормировочный множитель C_2 (дополнительная нормировка), полученный из условия неизменности полной массы [6]. Тогда конвективный поток в текущем состоянии оказывается пропорционален текущей плотности с коэффициентом пропорциональности, имеющим смысл начальной скорости:

$$j_{ct} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi B}N(k_2 + k_3Q)(\Phi(-\sqrt{B}z_t + \sqrt{B}Q) + \Phi(\sqrt{B}L + \sqrt{B}z_t - \sqrt{B}Q))}{(L\sqrt{\pi B} + e^{-B(L+Q)^2} - e^{-BQ^2} + (Q+L)\sqrt{\pi B} \cdot \Phi(\sqrt{B}(L+Q)) - \Phi(\sqrt{B}Q)\sqrt{\pi B}Q) \cdot k_1 \cdot S}. \quad (18)$$

Кондуктивный поток в текущем состоянии:

$$j_{gt} = \frac{Nk_3(e^{-B(L+z_t-Q)^2} - e^{-B(-z_t-Q)^2})}{(L\sqrt{\pi B} + e^{-B(L+Q)^2} - e^{-BQ^2} + (Q+L)\sqrt{\pi B} \cdot \Phi(\sqrt{B}(L+Q)) - \Phi(\sqrt{B}Q)\sqrt{\pi B}Q) \cdot k_1 \cdot S}. \quad (19)$$

Полный поток в текущем состоянии равен сумме потоков (18) и (19) и имеет вид:

$$j_t = -\frac{1}{2} \frac{N(2k_3 e^{-B(z_t-Q)^2} - e^{-B(L+z_t-Q)^2}) + \sqrt{\pi B}(k_2 + k_3Q) \cdot \Phi(\sqrt{B}(L+z_t-Q) + \Phi(\sqrt{B}(-z_t+Q)))}{k_1 \left[\sqrt{\pi B}(Q+L)\Phi(\sqrt{B}(Q+L)) + L\sqrt{\pi B} + e^{-B(L+Q)^2} - e^{-BQ^2} - \Phi(\sqrt{B}Q) \cdot Q\sqrt{\pi B} \right] S}$$

5. Ниже даны графическое представление и анализ полученных результатов. На рис. 1 представлены профили совместных кондуктивного и конвективного потоков (14) и (15) с учетом определенных выше констант. Область отрицательных значений кондуктивного потока обусловлена движением максимума плотности от стенки и отрицательным значением градиента в области слева от максимума. Конвективный поток всегда знакопостоянен, вектор его плотности направлен прочь от стенки и по модулю на порядок больше модуля плотности кондуктивного потока при выбранных нами масштабных константах. Все профили плотности потока имеют промежуточные экстремумы в интервале $z \in (0, \infty)$.

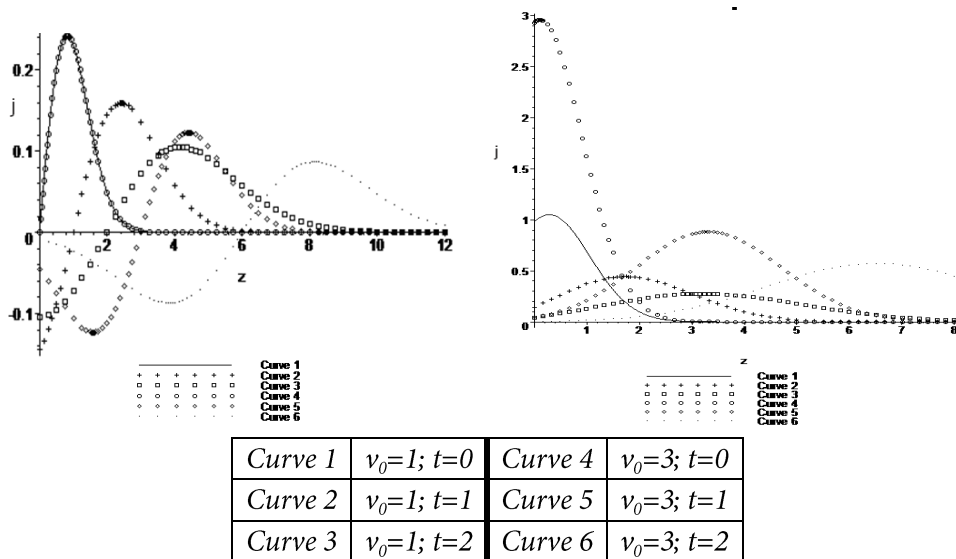


Рис. 1. Профили кондуктивного (слева) и конвективного (справа) потоков в разные моменты времени при разных значениях скорости v_0 .

Графики зависимости от времени кондуктивного (14) и конвективного (15) потоков представлены на рис. 2. Видно, что данные графики так же в общем случае имеют экстремумы на интервале $t \in (0, \infty)$.

В зависимости от v_0 возможны различные соотношения полного, конвективного и кондуктивного потоков.

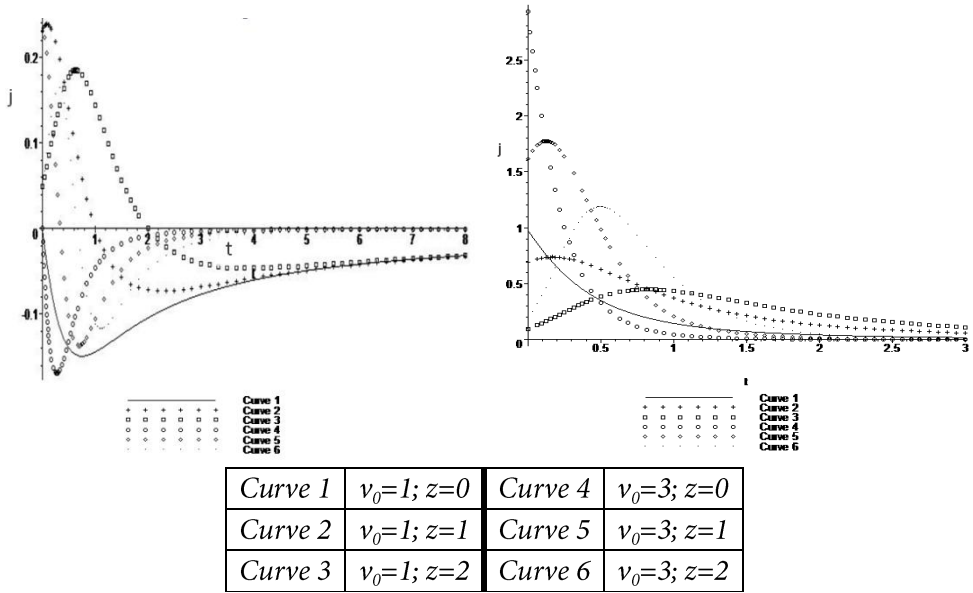
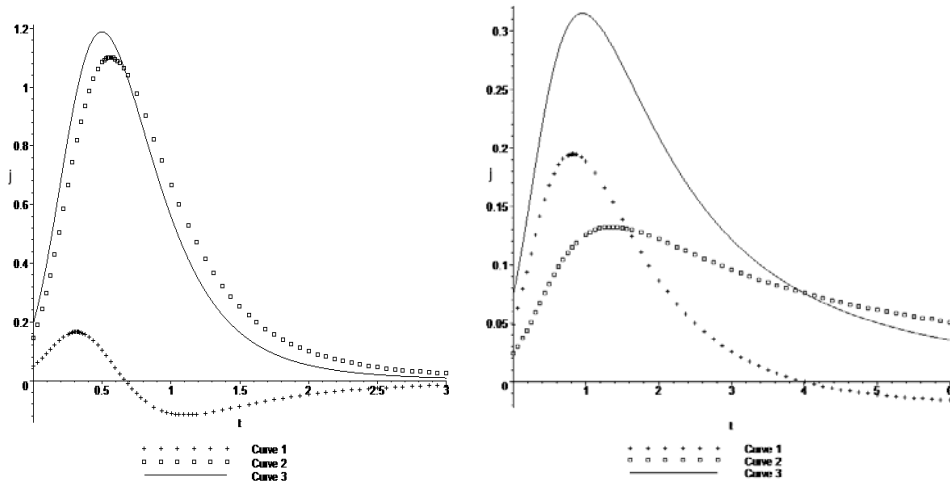


Рис. 2. Зависимость от времени кондуктивного (слева) и конвективного (справа) потоков для различных значений координаты z при разных значениях скорости v_0 .

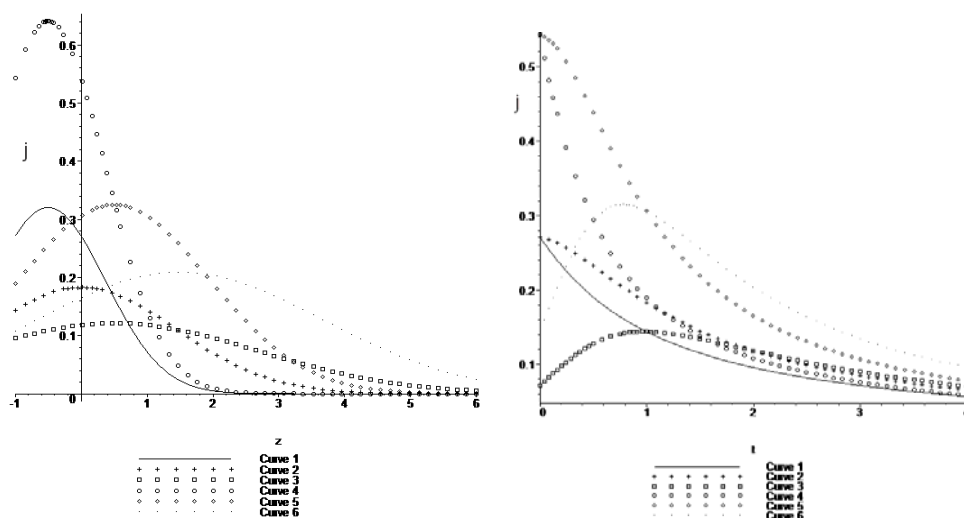
На рис. 3 показано поочередное превышение одного потока над другим для больших и малых скоростей.



Curve 1	Конвективный n-к	Curve 2	Кондуктивный n-к	Curve 3	Полный n-к
---------	------------------	---------	------------------	---------	------------

Рис. 3. Сравнение потоков при больших (слева) и малых (справа) начальных скоростях.

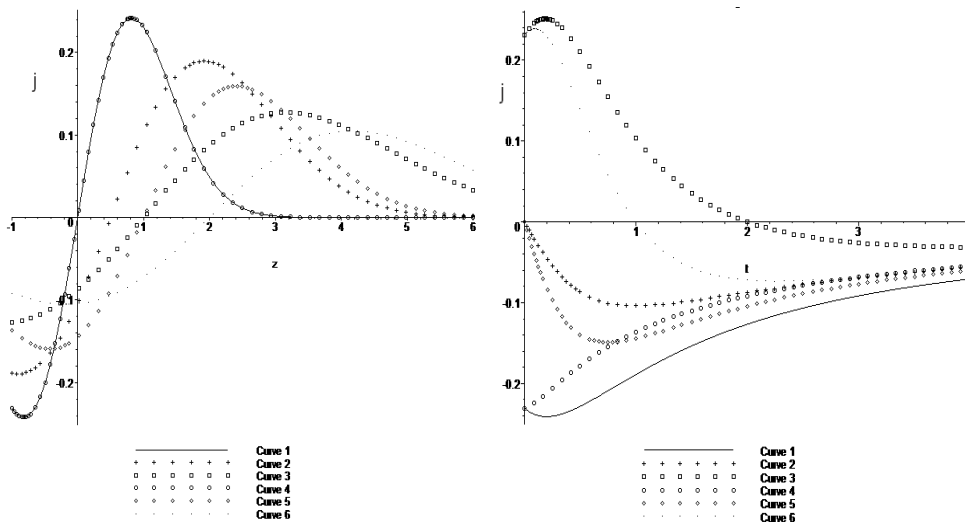
На рис. 4 показаны профили конвективного потока в текущем состоянии и его зависимость от времени. Графики профилей по оси абсцисс построены от $z = -1$, т.к. выбрана толщина слоя $L = 1$, и максимальная отрицательная координата не превышает толщины слоя. Видно, что поток всюду неотрицателен и асимптотически стремится к нулю.



Curve 1	$v_0=1/2; t=0$	Curve 1	$v_0=1/2; z=-1$
Curve 2	$v_0=1/2; t=1$	Curve 2	$v_0=1/2; z=0$
Curve 3	$v_0=1/2; t=2$	Curve 3	$v_0=1/2; z=1$
Curve 4	$v_0=1; t=0$	Curve 4	$v_0=1; z=-1$
Curve 5	$v_0=1; t=1$	Curve 5	$v_0=1; z=0$
Curve 6	$v_0=1; t=2$	Curve 6	$v_0=1; z=1$

Рис. 4. Профили конвективного потока в текущем состоянии (слева) и его зависимость от времени (справа) при различных значениях начальной скорости.

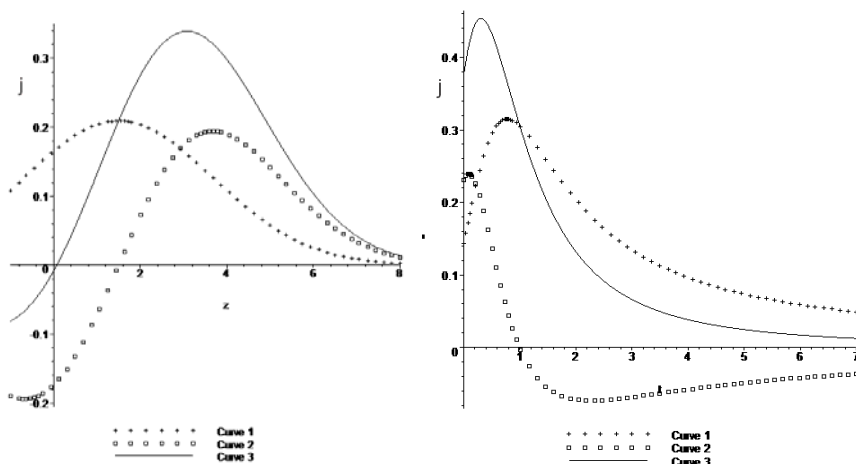
Графики для кондуктивного потока в текущем состоянии – см. рис. 5.



Curve 1	$v_0=1/2; t=0$	Curve 1	$v_0=1/2; z=-1$
Curve 2	$v_0=1/2; t=1$	Curve 2	$v_0=1/2; z=0$
Curve 3	$v_0=1/2; t=2$	Curve 3	$v_0=1/2; z=1$
Curve 4	$v_0=1; t=0$	Curve 4	$v_0=1; z=-1$
Curve 5	$v_0=1; t=1$	Curve 5	$v_0=1; z=0$
Curve 6	$v_0=1; t=2$	Curve 6	$v_0=1; z=1$

Рис. 5. Профили кондуктивного потока в текущем состоянии (слева) и его зависимость от времени (справа) при различных значениях начальной скорости.

Плотность потока знакопеременная и асимптотически стремится к нулю. Область с отрицательной плотностью потока образуется «в хвосте» прошедшего максимума. По графику зависимости плотности текущего кондуктивного потока от времени видно, что при достаточно больших t для любого z значения z -проекции плотности потока отрицательны. Область, где преобладает конвективный поток, будет возрастать с течением времени ввиду удаления максимума плотности от стенки, поэтому с течением времени полный текущий поток будет стремиться к нулю из области отрицательных значений (см. рис. 6).



Curve 1	Конвективный n -к	Curve 2	Кондуктивный n -к	Curve 3	Полный n -к
---------	---------------------	---------	---------------------	---------	---------------

Рис. 6. Сравнение профилей конвективного, кондуктивного и полного потоков в текущем состоянии (слева) и их зависимости от времени (справа).

Полученные результаты согласуются с результатами предыдущей работы [6] и имеют ясный физический смысл. Важно, что полученная общая формула плотности потока массы автоматически включает как конвективную, так и неконвективную части, причём описывает нестационарные состояния системы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бёрд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. С. 320.
2. Анисимов С.И., Рахматуллина А. Х. Динамика расширения пара при испарении в вакуум // ЖЭТФ. 1973.Т. 64. Вып. 3. С. 869 – 876.
3. Кузнецова И. А., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Интенсивное испарение молекулярного газа с поверхности сферической частицы в вакуум // ЖТФ. 2000.Т. 70, Вып. 11. С. 140–142.
4. Анисимов С.И., Лысыков Ю.И. // О расширении газового облака в вакууме. // ПММ. 1970. № 34. С. 926.
5. Яламов Ю.И., Голов А.Н. Эволюция облака, созданного быстрым распылением широкой пластины в вакууме. // Труды Центра фундаментальных научных исследований Московский государственный областной университет. № 1. М., Издательство Московский государственный областной университет, 2005. С. 15–26.
6. Голов А.Н. // Эволюция полуограниченного нестационарного плоского газоподобного облака. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. № 2, 2014. С. 69–78.

7. Голов А.Н., Яламов Ю.И. Статистическая и кинетическая теория нестационарных газоподобных и газодисперсных систем М.: изд. Московский государственный областной университет. 2011. С. 230.
8. Гуров К.П. Основания кинетической теории. М.: Наука, 1966. С. 351.