

УДК 538.945

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-88-97

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ УЧАСТКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДА *

Алиев И.Н., Самедова З.А

*Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается в классической постановке задача о постоянном токе в цилиндрическом проводнике с вставкой конечной длины из сверхпроводника. Приводится полученное решение без учета граничного растекания тока. Показано, что в рамках предложенной авторами модели имеется принципиально другое решение. *Постоянный ток*, как было показано авторами в предыдущей работе, в проводнике любого типа вытесняется на поверхность вместе с магнитным полем, что приводит к появлению так называемого поверхностного тока. Этот ток можно рассматривать как объемный, но протекающий в некотором тонком слое *конечной* толщины. И, поскольку эта толщина не зависит от материала и природы проводника, можно считать, что он порядка характерной глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводнике согласно теории Лондонов.

Ключевые слова: сверхпроводник, уравнения Лондонов, уравнения Максвелла, уравнение Лапласа, поверхностные и объемные токи, граничные условия в магнетизме, магнитные заряды.

CURRENT DISTRIBUTION IN A SUPERCONDUCTING SEGMENT OF A CYLINDRICAL WIRE

I. Aliev, Z. Samedova

*Bauman Moscow State Technical University,
ul. 2-ya Baumanskaya 5, 105005 Moscow, Russia*

Abstract. We consider the classical formulation of the problem of the direct current in a cylindrical conductor with an embedded superconductor of finite length. We present the

©Алиев И.Н., Самедова З.А., 2016

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (Проект №3.1526.2014/К)

solution obtained without boundary current spreading. It is shown that the authors' model has a fundamentally different solution. The direct current, as was shown in the previous work of the authors, is pushed in any type of a conductor to the surface together with the magnetic field, which leads to the so-called surface current. This current can be regarded as a volume one but flowing in a thin layer of finite thickness. Because this thickness does not depend on the thickness of the material and the nature of the conductor, it can be assumed that it is on the order of the characteristic depth of penetration of the magnetic field into the superconductor according to London's theory.

Key words: superconductor, London equation, Maxwell's equations, Laplace equation, surface and volume currents, boundary conditions in magnetism, magnetic charges.

1. Рассмотрим практически значимую задачу о постоянном токе в неоднородной цепи, одно из звеньев которой является сверхпроводником. Экспериментально подобную задачу реализовать несложно: для этого надо рассмотреть контакт двух материалов, один из них, у которого критическая температура выше экспериментальной, ведет себя как сверхпроводник, а у другого критическая температура, соответственно, ниже. Общепринятый подход к решению этой задачи выглядит следующим образом. Предположим, что у бесконечно длинного кругового цилиндрического провода есть участок от $z = -b$ до $z = b$, который является сверхпроводником (рис. 1), а участки провода до $z = -b$ и после $z = b$ выполнены из нормального материала. Пусть по проводнику течет постоянный электрический ток, заданной силы I . Требуется найти распределение тока по объему и поверхности цилиндрического провода.

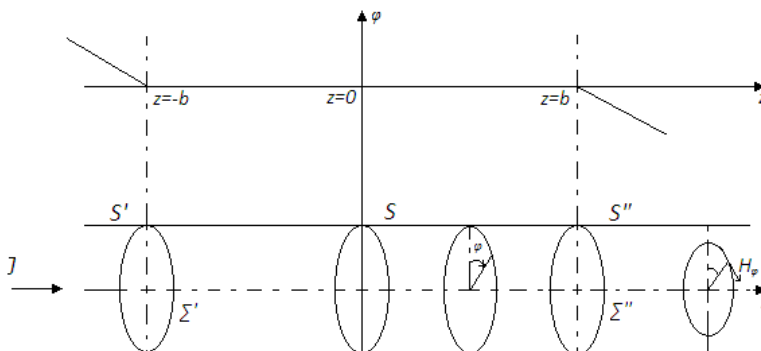


Рис. 1. Схема контакта в составной цепи – сверхпроводник и обычный проводник.

Видимо, впервые эта задача решалась в базовой работе Лондонов [1; 4], в которой исследовалась глубина проникновения магнитного поля и тока в сверхпроводник. В настоящей работе в рамках уравнений Максвелла вначале мы попытаемся показать внутреннюю непротиворечивость задачи. Используется также открытое Мейсснером и Оксенфельдом [2] основное свойство сверхпроводников – выталкивать магнитные поля на поверхность.

Так как магнитное поле внутри сверхпроводника равно нулю, то полная объемная плотность тока (истинная и намагничивания) также равна нулю внутри сверхпроводящего цилиндрического участка. Следовательно, может считаться общепринятым фактом: по сверхпроводящему участку цилиндра может течь только поверхностный ток.

2. Решим сначала задачу о распределении тока в нормальных участках цилиндрического провода. Используем следующие уравнения:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi, \quad (1)$$

где σ – электропроводность нормального металла цилиндрического провода. Первое очевидное граничное условие на боковой цилиндрической поверхности S' и S'' имеет вид: $j_n|_{S',S''} = 0$, где S' , S'' – боковые поверхности нормального участка. Рассмотрим теперь второе граничное условие. Поверхности Σ' и Σ'' , ограничивающие нормальные участки цилиндрического провода от центрального сверхпроводящего участка, имеют одинаковый электрический потенциал. Действительно, поверхность сверхпроводника является эквипотенциальной поверхностью, так как электрической поле в любой точке внутри сверхпроводника равно нулю $\vec{E} = 0$. Таким образом, на поверхностях Σ' и Σ'' имеем условие: $\varphi|_{\Sigma',\Sigma''} = \varphi_0$, где φ_0 – некоторая постоянная. Значит, для потенциала внутри нормальных участков цилиндрического провода нужно решить уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2)$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi|_{\Sigma',\Sigma''} = \varphi_0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S',S''} = 0. \quad (3)$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что решением этой задачи является потенциал φ постоянный на любом сечении Σ провода и линейно убывающий при увеличении Z . На рис. 1 показан график зависимости $\varphi = \varphi(z)$, отсчитываемой вдоль цилиндрического провода. Заметим, что наклон

прямых на рисунке, равный k ($k > 0$), может быть каким угодно. Аналитически можно записать:

$$\varphi = \varphi_0 - k(z + b) \text{ при } z < -b$$

$$\varphi = \varphi_0 - k(z - b) \text{ при } z > b.$$

$$\text{Откуда: } E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = k, \quad j_z = \sigma k.$$

Следовательно, ток распределен по сечению нормальной части цилиндра равномерно. Константу k можно определить из условия:

$$I = \pi a^2 j_z = \pi a^2 k \quad k = \frac{I}{\pi a^2}$$

Как видим, электрический ток I равномерно распределен по сечению прямых участков провода. Он натекает равномерным потоком и упирается в поверхность Σ' . Далее в объеме сверхпроводника этот ток течь не может. Электрический ток превратится в поверхностный ток, который сначала будет растекаться по радиусам круговой поверхности Σ' и, в конце концов, протечет через окружность, ограничивающую поверхность Σ' и лежащую на поверхности цилиндрического провода. Затем ток I будет течь по поверхности сверхпроводящего участка, а потом, пройдя через окружность, ограничивающую поверхность Σ'' , он начнет двигаться по радиусам к центру поверхности Σ'' . При этом от этого поверхностного тока будет отрываться объемный ток, который равномерным потоком будет течь далее в нормальной части провода, расположенной справа от поверхности Σ'' . Естественно, в переходных областях (вблизи Σ' и Σ'') картина распределения токов намного сложнее.

Подтвердим указанную интересную физическую картину непосредственными расчетами. Для этого определим индукцию \vec{B} в пространстве около цилиндрического провода и внутри него. Поле вне провода ($r > a$) на всем участке одинаково и находится обычным способом:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I \quad H \equiv H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}.$$

При $r < a$ магнитное поле внутри сверхпроводящего участка равно нулю, а внутри нормального участка снова определяется из теоремы Стокса:

$$2\pi H_\varphi = j\pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \quad H_\varphi = \frac{I r}{2\pi a^2}.$$

Плотность поверхностных токов, у которых нас интересуют азимутальные

(тангенциальные) составляющие, могут быть вычислены по стандартным формулам граничного условия:

$$\begin{cases} [\vec{H} - \vec{H}_0, \vec{n}]|_S = \vec{i} \\ (\vec{B} - \vec{B}_0, \vec{n}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Азимутальные составляющие найдем с помощью первого из этих уравнений.

Для поверхностей S' и S'' : $\vec{H} = \vec{H}_0$ и поэтому $\vec{i} = 0$

Для сверхпроводящей поверхности из этого же уравнения следует: $i_z = \frac{I}{2\pi a}$.

Полный поверхностный ток в сверхпроводнике равен: $I' = i_z 2\pi a = I$, как и должно быть по закону сохранения тока.

3. При решении этой задачи использовался общеизвестный факт: магнитное поле в сверхпроводнике равно нулю. При этом мы предполагали равенство нулю напряженности магнитного поля. Что интересно, если в упомянутой выше первой работе Лондонов [1] фигурировала именно напряженность магнитного поля, то уже в следующей работе, изданной годом позже, произошел переход к записи в терминах магнитной индукции [3, формула 2A], причем из-за использования абсолютной системы единиц переход от одной формы записи к другой выглядел предельно простым: $\vec{B} = \vec{H}$. Ясно, что при подобной записи магнитные свойства вещества полностью игнорируются, однако в дальнейшем в большинстве классических задачах об ослаблении поля в сверхпроводниках используется именно этот подход [4]. Ясно, что даже при простом переходе к другой системе единиц появляются множители, не говоря уже о магнитной проницаемости вещества.

В предыдущем разделе расчеты базировались на первом из граничных условий (4) с учетом $\vec{H} = 0$. Это условие естественным образом получается из уравнений Максвелла, достоверность которых никоим образом не вызывает сомнений. Более подробно этот вопрос анализируется в работе авторов [5]. Если же перейти к подходу $\vec{B} = 0$, то задача физически простого решения не имеет.

В связи со всем вышесказанным возникает естественный вопрос – в чем физический смысл и отличие векторов \vec{H} и \vec{B} ? Почему магнитное поле в намагниченной среде характеризуется не одним, а сразу двумя векторами? Часто на эти вопросы отвечают так, как на них ответил еще В. Томсон

(K.W. Thomson. Reprint of papers on electrostatics and magnetism. 1872), и говорят, что \vec{B} – это вектор, определяющий силу, действующую на точечный магнитный заряд g , помещенный в полость, вырезанную в намагничивающейся среде в виде бесконечно тонкого диска перпендикулярно силовой линии. Указанная сила равна $\vec{F} = g\vec{B}$. Вектор \vec{H} – это вектор, определяющий силу, действующую на точечный магнитный заряд g , помещенный в полость в виде бесконечно тонкого длинного цилиндра, вырезанного в намагничивающейся среде вдоль магнитной силовой линии. В этом случае сила равна $\vec{F} = g\vec{H}$ (рис. 2)

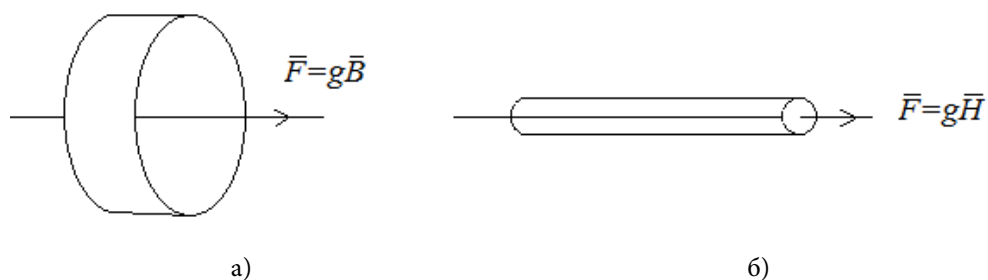


Рис. 2. Схема экспериментального способа определения \vec{H} и \vec{B} .

Такой ответ на поставленные вопросы, разумеется, нельзя считать полным, хотя он и указывает, конечно, простые экспериментальные способы измерения векторов \vec{H} и \vec{B} внутри намагничивающейся среды. В нашем исследовании, в отличие от работы авторов [5], мы не используем понятие магнитных зарядов, поэтому подход через магнитный закон Кулона здесь неприемлем.

Анализируя полученное, можно попытаться сформулировать физический смысл магнитных векторов \vec{H} и \vec{B} следующим образом. Какое из этих магнитных полей следует считать истинным магнитным полем намагниченного образца? Намагниченность образца, по гипотезе Ампера, является проявлением имеющихся внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов, то есть, в конечном счете, связана с магнетизмом токов. Поэтому магнитное поле \vec{B} является истинным магнитным полем, оно имеет реальный физический смысл, в то время как магнитное поле \vec{H} внутри образца физического смысла не имеет. Это формальное математическое поле. Такой категоричный ответ, по-видимому, не верен, так как с атомно-молекулярной

точки зрения, кроме магнетизма внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов существует магнетизм спиновых магнитных дипольных моментов электронов и атомных ядер. Последний, как известно, к магнетизму электрических токов свести, по-видимому, нельзя. Для того, чтобы ответить на вопрос о том, как следует определять истинное магнитное поле внутри намагничивающегося материала, необходимо, по-видимому, покинуть феноменологический подход и заняться выяснением в каждой конкретной ситуации микроскопической атомно-молекулярной физической природы вектора намагничивания \vec{M} .

4. В чисто формальной постановке задачи мы использовали, казалось бы, довольно простое условие – в цилиндрическом сечении сплошной твердой среды равномерно распределен ток с объемной плотностью, определяемой стандартным образом $\vec{j} = \frac{dl}{dS}$. Однако в этой ситуации возникает вопрос об отсутствии поверхностного тока. Конечно, в принципе, возможно плавное зануление тока к периферии, но тогда не ясен механизм этого явления, в каком-то смысле обратный эффекту Мейсснера. Интересно отметить, что принципиально невозможно прямым экспериментом измерить объемную плотность тока в толще *сплошного твердого тела*.

5. В работе авторов [6] для нахождения равновесного распределения поверхностных и объемных *стационарных* токов в сплошном теле была применена термодинамическая гипотеза Гиббса, позволяющая решить задачу с помощью магнитного принципа виртуальных работ. Вариация магнитной энергии рассматривалась с дополнительными условиями, определяющими постоянство токов, два из которых, носящих дифференциальный характер, необходимы и достаточны для решения задачи в случае односвязного тела. Если же рассматриваемое тело двусвязное (тор, толстое кольцо) оказывается необходимым ввести еще одно условие. В работе показано, что этим условием, заодно обеспечивающим условие единственности решения, может быть или постоянство тока, протекающего через поперечное сечение тора, или задание постоянного потока магнитной индукции через отверстие тора. При постановке задачи был выбран первый вариант как более наглядный. Задача была решена с помощью метода множителей Лагранжа. Основным полученным результатом является то обстоятельство, что индукция магнитного поля и

объемный ток внутри сплошного твердого проводника обращаются в нуль, то есть магнитное поле вместе с токами выдавливается на поверхность. Единственное условие, как и было указано – *постоянство токов*. В этом случае предлагаемая нами модель выглядит следующим образом. Никаких переходных процессов физических величин на границах раздела сред Σ' и Σ'' нет. На всем протяжении проводников по их цилиндрическим поверхностям текут токи одной и той же величины, так как структура среды согласно результатам, полученным в [6], не влияет на поведение токов. И, самое главное, под поверхностным током мы понимаем ток, в каком-то смысле объемный, текущий в тонком приповерхностном слое *конечной толщины*, причем эта толщина соизмерима с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник. В этом случае большинство вопросов, возникших при решении поставленной задачи, снимаются. Учитывая, что толщина слоя проникновения для сверхпроводников просчитывается с помощью уравнений Лондонов [8] и измеряется экспериментально (так, для $Nb \delta = 10^{-6}$ см), можно считать, что именно нанослой с такой толщиной и есть область, в которой распространяется поверхностный ток. Интересно также отметить, что принципиально, в отличие от объемных токов, поверхностные можно экспериментально померить – ведь инородные проводящие вкрапления в поверхность, согласно нашей теории, не должны исказить общую картину. Авторы понимают, что ряд положений предлагаемой работы являются дискуссионными и поэтому будут признательны за любые замечания по сути изложения.

Мы благодарим С.О. Юрченко, который при обсуждении работы [9] указал на еще одно важное, на наш взгляд, обстоятельство. Если верна теория о поверхностном характере всех постоянных токов, то тогда находит объяснение общеизвестный экспериментальный факт о том, что при разогревании проводников постоянными токами плавление последних начинается с поверхности. Это обстоятельство может быть использовано в качестве верхнего ограничения силы постоянного тока в проводнике.

Мы приносим благодарности В.В. Толмачеву, при обсуждении с которым статьи [7] и родилась идея настоящего исследования, А.М. Макарову и А.Н. Морозову за постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. London H. The electromagnetic equations of the superconductor // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 149. pp. 71–88.
2. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. Vol. 21. Issue 44. pp. 787–788.
3. London H. Phase-equilibrium of superconductors in a magnetic field // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 152. pp. 650–663.
4. Линтон Э., Мак-Лин У. Сверхпроводники II рода // Успехи физических наук. 1969. Т. 97. № 3. С. 495–523.
5. Алиев И.Н., Копылов И.С. Использование формализма монополей Дирака в некоторых задачах магнетизма // Вестник МГТУ. Серия: Естественные науки. 2015. № 6. С. 25–39.
6. Алиев И.Н., Копылов И.С. Применение метода множителей Лагранжа к вычислению магнитного поля постоянного тока // Динамика сложных систем. 2015. № 4. С. 3–10.
7. de Llano M., Tolmachev V. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // Physica A. Vol. 317. 2003. pp. 546–564.
8. Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О теоремах Пойтинга и Абрагама в электродинамике сверхпроводников Лондонов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 83–91.
9. Yurchenko S., Komarov K., Pustovoit V. Multilayer-graphene-based amplifier of surface acoustic waves. AIP advances 5, 057144. (2015).

REFERENCES

1. London H. The electromagnetic equations of the superconductor // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 149. pp. 71–88.
2. Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. Vol. 21. Issue 44. pp. 787–788.
3. London H. Phase-equilibrium of superconductors in a magnetic field // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 152. pp. 650–663.
4. Linton E., Mak-Lin U. Sverkhprovodniki II roda [The type-II superconductors] // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1969. Vol. 97. no. 3. pp. 495–523.
5. Aliev I.N., Kopylov I.S. Ispol'zovanie formalizma monopolei Diraka v nekotorykh zadachakh magnetizma [Using the formalism of Dirac monopoles in some problems of magnetism] // Vestnik MGTU. Seriya: Estestvennyye nauki. 2015. no. 6. pp. 25–39.
6. Aliev I.N., Kopylov I.S. Primenenie metoda mnozhitelei Lagranzha k vychisleniyu magnitnogo polya postoyannogo toka [The application of the method of Lagrange

- multipliers to the calculation of the DC magnetic field] // *Dinamika slozhnykh sistem*. 2015. no. 4. pp. 3–10.
7. de Llano M., Tolmachev V. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // *Physica A*. no. 317. 2003. pp. 546–564.
 8. Aliev I.N., Melikyants D.G. О теоремах Поинтинга и Абрагана в электродинамике сверхпроводников Лондонов [On theorems of Poynting and Abraham in electrodynamics of London superconductors] // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika*. 2015. no. 4. pp. 83–91.
 9. Yurchenko S., Komarov K., Pustovoi V. Multilayer-graphene-based amplifier of surface acoustic waves. *AIP advances* 5, 057144. (2015).
-

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
e-mail: alievprof@yandex.ru

Самедова Зарифа Алышан кызы – студент Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана;
e-mail: samezara@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aliev Ismail Novruz ogy – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Chair of Physics at the Bauman Moscow State Technical University; e-mail: alievprof@yandex.ru

Samedova Zarifa Alyshan kyzy – student at the Bauman Moscow State Technical University, e-mail: samezara@bk.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Алиев И.Н., Самедова З.А. Распределение тока в сверхпроводящем участке цилиндрического провода // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*. 2016. № 1. С. 88–97.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-88-97.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

I. Aliev, Z. Samedova Current distribution in a superconducting segment of a cylindrical wire // *Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics*. 2016. no. 1. pp. 88–97.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-88-97.