УДК 338.4
DOI: 10.18384/2310-6646-2017-1-78-82

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Путятин А.Е., Тарасова Н.В., Орлова О.В.
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
125080, г. Москва, ул. Волоколамское шоссе, д. 4, Российская Федерация

Аннотация. В статье формализована задача оптимизации управления производственными мощностями предприятия во времени. Эта задача заключается в определении объемов производства технологически подобной продукции для достижения максимальной прибыли при условии определенных технико-экономических ограничений и при учёте изменения во времени цен и себестоимости выпускаемой продукции в связи с инфляционными процессами. Решение задачи оптимального управления мощностями представлено на основе принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: производственная мощность, оптимальное управление производственной мощностью, принцип максимума Понтрягина.

APPLYING PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE TO THE OPTIMAL CONTROL OF MANUFACTURING PRODUCTION CAPACITIES

A. Putyatin, N. Tarasova, O. Orlova
Moscow Aviation Institute (National Research University)
4, st. Volokolamskoye highway, Moscow, 125080, Russian Federation

Abstract. The article tackles the problem of optimization of manufacturing production capacities control. The task consists in determination of the volume of technologically similar production to gain the maximum profit under certain technical and economic restrictions and the change of the prices and the prime cost of products with account of inflationary processes. The optimal control of capacities is proposed on the basis of Pontryagin's maximum principle.

Keywords: production capacity, optimal control of production capacity, Pontryagin's maximum principle.

Оптимизация управления производственными мощностями заключается в определении объёмов производства для достижения максимальной прибыли в условиях технико-экономических ограничений и изменения себестоимости и цены продукции [2, с. 59]. Пусть предприятие выпускает товары двух видов i (i=1,2). Объёмы выпуска N_1 и N_2 в течение времени T зависят от распределения мощностей по видам продукции. Сами мощности охарактеризуем показателем

$\alpha=1$, а доли мощностей, отводимые в момент времени t на выпуск товаров – $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$. При использовании универсального и специализированного оборудования, доли $\alpha_i(t)$ должны удовлетворять неравенству: $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\le 1$.

Максимальные доли мощностей обозначим α_{imax}. Если за время T всей мощности $\alpha=1$ соответствует T_{max} нормо-часов, то максимальное число нормо-часов товара i составит $\alpha_{imax} \times T_{max}$. При нормо-часах, необходимых для выпуска изделия вида $i - T_{0i}$, максимальный объем выпуска i-го товара $N_{imax}=\alpha_{imax}\times T_{max} / T_{0i}$. Минимальное время T_1 для выпуска i-го товара при использовании всей мощности составит $T_i=T/N_{imax}$, где T_i – календарная длительность технологического процесса.

Производственный процесс характеризуется выпуском товаров $N_1(t)$ и $N_2(t)$, произведенных к моменту времени t. Скорости выпуска товаров $\frac{dN_i}{dt}$ прямо пропорциональны долям мощностей α_i и обратно пропорциональны календарным длительностям технологического цикла (уравнения решаются при нулевых начальных условиях t=0, $N_1=0$ и $N_2=0$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \frac{a_1(t)}{T_1} \\ \frac{dN_2}{dt} &= \frac{a_2(t)}{T_2} \end{aligned}\right\}$$

Цель управления мощностями – это максимизация прибыли на отрезке времени T: $\Pi(t) = \sum_{i=1}^{2}\left[Q_i(t) - C_i(t)\right]$, где Q(t) – доход, C(t) – себестоимость. Себестоимость содержит постоянные затраты $З_{oi}$, не зависящие от объёмов производства, и переменные, зависящие от них. Если цена – это функция времени $Ц_i(t)$, то доход к текущему моменту времени t: $Q(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\cdot dN_i(t)$ – или с учётом уравнений изменения выпуска во времени: $Q(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\cdot \frac{a_i(t)}{T_i} dt$.

Постоянные затраты $З_o$ разобьём по видам продукции пропорционально длительностям технологического процесса: $З_{oi} = З_o \frac{T_i}{T_1 + T_2}$ (i=1,2) – и будем полагать, что $З_o$ во времени возрастают линейно: $З_{oi}(t) = З_o \frac{T_i}{T_1+T_2} \cdot \frac{1}{T} \cdot t$. Изменение во времени долей переменных затрат обозначим $З_{ni}(t)$, а суммарную себестоимость ко времени t определим в виде [1, с. 89]:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{2}\left[З_{oi}(t) + \int_0^t З_{ni}(t)\, dN_i(t)\right]$$

или

$$C(t) = \sum_{i=1}^{2}\left[З_{oi}(t) + \int_0^t З_{ni}(t)\frac{a_i(t)}{T_i}\, dt\right].$$

Прибыль, зависящая от управляемых мощностей $\alpha_i(t)$, – это критерий оптимального управления производственными мощностями:

$$\Pi(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{a_i(t)}{T_i}\, dt -$$

$$- \sum_{i=1}^{2}\left[З_{oi}(t) + \int_0^t З_{ni}(t)\frac{a_i(t)}{T_i}\, dt\right].$$

Ограничения по управлению долями мощностей определяются как $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\le 1$. При заданном значении доли мощности $\alpha_1(t)$ можно определить максимальное значение другой доли $\alpha_2(t)$. Может быть также определена функциональная связь $\alpha_2=\xi(\alpha_1)$, ограничивающая максимальные и предельные возможности и определяющая ограничения на управляющие воздействия. Эта зависимость может быть аппроксимирована многочленом второй степени $\alpha_2(t) = b_0 + b_1\alpha_1(t) + b_2[\alpha_1(t)]^2$.

Задача оптимального управления мощностями формулируется следующим образом: необходимо определить управления $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, удовлетворяющие уравнению ограничения $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)=0$ и доставляющие максимум критерию $\Pi(t)$, если выпуск товаров описывается дифференциальными уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \frac{a_1(t)}{T_1}, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \frac{a_2(t)}{T_2}, \end{aligned}\right\} \quad \text{где } N_1 = N_2 = 0,$$

при $t = 0$.

Решить задачу оптимального управления мощностями можно на основе принципа максимума Понтрягина [3, с. 281]. Введем новую переменную $N_3(t)=\Pi(t)$ и дополнительное уравнение:

$$\frac{dN_3}{dt} = \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} -$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{d З_{oi}(t)}{dt} + З_{ni}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i}\right]$$

Начальное условие $t = 0$, $N_3(0) = -\sum_{i=1}^{2},_{oi}(0)$. При отсутствии ограничений на выпуск критерий оптимальности $\pi=N_3(t_k)$. В соответствии с принципом максимума вектор управления $\overline{\alpha}\,[\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$ будет оптимальным и критерий $\pi(t)$ будет принимать максимальное значение на всем интервале управления $[0,t_k]$ при условии, что функция Гамильтона $H[\overline{\alpha}, \overline{N}]$ на всем интервале управления будет принимать минимальное значение:

$$H = \sum_{i=1}^{3}\Psi_i f_i = \Psi_1\frac{\alpha_1(t)}{T_1} + \Psi_2\frac{\alpha_2(t)}{T_2} +$$

$$+\Psi_3\left\{\sum_{i=1}^{2}\ldots_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} - \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{d_{oi}(t)}{dt} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +,_{ni}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i}\right]\right\},$$

где f_i – правые части основных и дополнительного уравнений; Ψ_i – присоединенные функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям вида:

$$\dot{\Psi}_i = -\sum_{j=1}^{3}\Psi_j\frac{df_j}{dN_i}, \quad i = 1,2,3.$$

Уравнения решаются при заданных конечных условиях:

$$\Psi_i(t) = -\frac{d\pi}{dN_i}, \quad i = 1,\ldots 3.$$

Подставляя соответствующие выражения для f_j и π, получим:

$$\dot{\Psi}_1 = -\Psi_1\cdot 0 - \Psi_2\cdot 0 - \Psi_3\cdot 0 = 0,$$

$$\dot{\Psi}_2 = -\Psi_1\cdot 0 - \Psi_2\cdot 0 - \Psi_3\cdot 0 = 0,$$

$$\Psi_3 = 0.$$

Функции $\Psi_i(t)$ принимают стационарные значения, которые могут быть определены из конечных условий $\Psi(t_к)=0$, $\Psi_2(t_к)=0$, $\Psi_3(t_к)=-1$. С учётом выражения $\Psi_i(i=1,..\ 3)$ функция Гамильтона преобразуется к виду:

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[,_{ni}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} + \frac{d_{oi}(t)}{dt} \right] - \sum_{i=1}^{2} \cdots_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} \cdot$$

Подставляя выражения для $З_{oi}(t) = З_o \frac{T_i}{T_1 + T_2} \cdot \frac{1}{T} \cdot t$, получим:

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[З_{ni}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} + \frac{З_o T_i}{(T_1 + T_2)\cdot T} \right] - \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} =$$

$$= \beta_0 + \beta_1(t)\,\alpha_1(t) + \beta_2(t)\,\alpha_2(t)$$

где $\beta_0 = \frac{З_o T_i}{(T_1 + T_2)T}$; $\beta_i(t) = \frac{З_{ni}(t) - Ц_i(t)}{T_i}$, $i = 1,2$

Если $Ц_i(t) > З_{ni}(t)$, то $\beta_i(t) < 0$ и функция Гамильтона принимает минимальные значения при $\max|H|$, экстремум функции H (если $\bar{\alpha}$ удовлетворяет уравнению $\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=0$) соответствует безусловному экстремуму функции Лагранжа $L=\beta_0+\beta_1(t)\alpha_1(t)+\beta_2(t)\alpha_2(t)+\lambda\varphi(\alpha_1,\alpha_2)$, где λ – неопределенный множитель. Значения переменных α_1, α_2, λ, доставляющих экстремум H, определяются из условий равенства нулю частных производных:

$$\left.\frac{dL}{d\alpha_1} = \beta_1(t) + \lambda\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = 0\right\},$$

$$\left.\frac{dL}{d\alpha_2} = \beta_2(t) + \lambda\frac{d\varphi}{d\alpha_2} = 0\right\},$$

$$\left.\frac{dL}{d\lambda} = \varphi(\alpha_1,\alpha_2) = 0\right\}.$$

Таким образом, внедрение принципа максимума Понтрягина в практику деятельности предприятия поможет в решении конкретных практических задач оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мищенко А.В., Джамай Е.В. Динамическая задача определения оптимальной производственной программы // Менеджмент в России и за рубежом. 2002. № 2. С. 86–90.
2. Путятина Л.М., Джамай Е.В., Лаврова Л.А. Основные аспекты разработки товарной политики машиностроительного предприятия как важного элемента его стратегии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. 2015. № 1. С. 58–61.
3. Путятин А.Е. Оптимизация управления производственными мощностями предприятия на основе принципа максимума Понтрягина // Труды вольного экономического общества России. 2006. Т. 74. С. 279–285.

REFERENCES

1. Mishchenko A.V., Dzhamai E.V. Dinamicheskaya zadacha opredeleniya optimal'noi proizvodstvennoi programmy [The dynamic problem of determining the optimal production program] // Menedzhment v Rossii i za rubezhom. 2002, no 2, pp. 86–90.
2. Putyatina L.M., Dzhamai E.V., Lavrova L.A. Osnovnye aspekty razrabotki tovarnoi politiki mashinostroitel'nogo predpriyatiya kak vazhnogo elementa ego strategii [The main aspects of trade policy design of machine-building enterprise as an important element of its strategy] // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics, 2015, no 1, pp. 58–61.
3. Putyatin A.E. Optimizatsiya upravleniya proizvodstvennymi moshchnostyami predpriyatiya na osnove printsipa maksimuma Pontryagina [Optimization of management of manufacturing production capacities on the basis of Pontryagin's maximum principle] // Trudy vol'nogo ekonomicheskogo obshchestva Rossii. [The Works of the Free Economic Society of Russia]. 2006, Vol. 74, pp. 279–285.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Путятин Александр Евгеньевич – кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры производственного менеджмента Московского авиационного института (национального исследовательского университета)»;
e-mail: putyatinal@gmail.com

Тарасова Наталья Владимировна – кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры производственного менеджмента Московского авиационного института (национального исследовательского университета)»;
e-mail: tarasova_n@mail.ru

Орлова Ольга Викторовна – доцент кафедры производственного менеджмента Московского авиационного института (национального исследовательского университета)»;
e-mail: olga10206@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander Putyatin – Ph.D. in Economics, Associate Professor at the Department of Production Management at Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: putyatinal@gmail.com

Tarasova Natalya Vladimirovna – Ph.D. in Economics, Associate Professor at the Department of Production Management at Moscow Aviation Institute (National Research University); e-mail: tarasova_n@mail.ru

Olga Orlova – Associate Professor at the Department of Production Management at Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: olga10206@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА

Путятин А.Е., Тарасова Н.В., Орлова О.В. Применение принципа максимума Понтрягина к задаче оптимального управления производственными мощностями предприятия // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. 2017. № 1. С. 78-82.
DOI: 10.18384/2310-6646-2017-1-78-82

CORRECT REFERENCE

A. Putyatin, N. Tarasova, O. Orlova Applying Pontryagin's Maximum Principle to the Optimal Control of Manufacturing Production Capacities // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics, 2017, no. 1, pp. 78-82.
DOI: 10.18384/2310-6646-2017-1-78-82