

УДК 331.1

DOI: 10.18384/2310-6646-2017-2-54-60

## УПРАВЛЕНИЕ ЛОЯЛЬНОСТЬЮ СОТРУДНИКОВ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ

**Гордеев А.А.<sup>1</sup>, Самойлова И.А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, Российская Федерация

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена анализу модели процесса изменения лояльности сотрудников под воздействием нескольких управляющих факторов. Представлены краткий анализ возможных аналитических решений системы дифференциальных уравнений и результаты числовых расчётов для случаев нестационарных коэффициентов. Построенная математическая модель объясняет качественные изменения настроений в организации и позволяет прогнозировать их колебания. При обсуждении результатов особое внимание уделяется возможностям их практического применения.

**Ключевые слова:** лояльность, управляющее воздействие, система дифференциальных уравнений.

## EMPLOYEE LOYALTY MANAGEMENT. MATHEMATICAL MODEL AND PRACTICAL CONCLUSIONS

**A. Gordeev<sup>1</sup>, I. Samoylova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University  
1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University  
5/1, 2nd Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russian Federation

**Abstract.** This work is devoted to the analysis of the model of the process of changing the loyalty of employees under the influence of several controlling factors. A brief analysis of possible analytical solutions of a system of differential equations and results of numerical calculations for the cases of nonstationary coefficients are presented. The constructed mathematical model explains the qualitative changes in moods in the organization and allows to predict their fluctuations. When discussing results, special attention is paid to the possibilities of their practical application.

**Keywords:** loyalty, control action, system of differential equations.

Использование математических моделей для моделирования социальных явлений в группах разных форматов представляет довольно существенный интерес. В литературе описаны разнообразные подходы, базирующиеся в большей степени на

теоретико-игровых моделях [3] и на моделях динамики коллективного поведения [5]. В настоящей работе предпринята попытка использовать методы математического моделирования для процесса, условно названного «лояльность сотрудников к компании-работодателю». Руководству компании важно знать, как меняется лояльность в коллективе с течением времени, как влияют лояльные и нелояльные сотрудники друг на друга. В этом процессе также особую роль играет «управляющий центр» в лице конкретного руководителя конкретного подразделения: именно он может и должен давать определенное внешнее воздействие на систему, что ведёт к определенной динамике лояльности. И тогда вопрос может быть поставлен довольно широко: какие воздействия и какой интенсивности и продолжительности должны быть применены к коллективу, чтобы увеличить его лояльность?

### Постановка задачи

В качестве основного математического подхода используется построение и решение системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Описание модели. Пусть  $x(t)$  – число лояльных сотрудников в коллективе, а  $y(t)$  – число сотрудников, которых нельзя назвать лояльными (они чем-то недовольны и это проявляется в некачественной работе, т. е. их действия могут причинить вред компании),  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$  – скорости изменения их численности. Система уравнений динамики численности лояльных и нелояльных членов коллектива может быть записана так [1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - \beta x + \gamma xy - \delta x; \\ \dot{y} = \beta x - \gamma xy. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha$  – регулярный прирост лояльных сотрудников (в качестве допущения и с целью упрощения модели используется то обстоятельство, что сотрудники, вновь принимаемые на работу, априори лояльны),  $\beta$  – коэффициент, отражающий, какая часть сотрудников, разочаровавшись, переходит в противоположный стан нелояльных,  $\delta$  – показывает часть «естественной убыли», не связанной с лояльностью (увольнения, связанные с выходом на пенсию, переездом, семейными обстоятельствами), слагаемое  $\gamma xy$  характеризует обратный процесс, когда при взаимодействии представителей противоположных групп нелояльные меняют своё мнение.

Очевидно, что параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  неотрицательны. Исследование характера параметра  $\gamma$  выходит за рамки этой статьи, но необходимо сделать ссылку на источник [4], где показано, насколько нетривиально может быть выражена формула для  $\gamma$ . В этой работе будут рассмотрены два случая:  $\gamma = const$  и  $\gamma \sim x$ .

Параметром  $\alpha$  управлять легче всего, т. к. это план и политика набора новых сотрудников. А вот управление параметром  $\beta$  как раз представляет наибольший интерес, потому что он отражает воздействие руководства на происходящие в системе процессы (премии, благодарности и другие меры материального и нематериального поощрения, увеличивающие число лояльных сотрудников).

### Аналитическое исследование

С точки зрения математики имеется система двух дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями  $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - \beta x + \gamma xy - \delta x; \\ \dot{y} = \beta x - \gamma xy; \end{cases} \quad (1).$$

Вообще говоря, коэффициенты в этой системе дифференциальных уравнений являются функциями времени, т. е.  $\alpha=\alpha(t); \beta=\beta(t); \gamma=\gamma(t); \delta=\delta(t)$ . Но для простоты исследования будем считать некоторые из них константами:  $\alpha=const, \delta=const$ . Исключительно для аналитической оценки примем пока  $\beta=const$  и  $\gamma=const$ . Тогда система (1) имеет стационарное решение  $x=\alpha/\beta$  и  $y=\beta/\gamma$ , которое будет абсолютно устойчивым. Это хороший прогноз, т. к. в этом случае менеджменту понятно, как управлять процессом.

Если  $y \sim x$ , т. е.  $y=kx$ , получаем систему (2):

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - \beta x + kx^2y - \delta x; \\ \dot{y} = \beta x - kx^2y. \end{cases} \quad (2).$$

Система (2) имеет стационарное решение  $x=\alpha/\delta$  и  $y=\beta\delta/\alpha k$ .

Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид:

$$(\beta - \delta - \lambda) \left( -\frac{\alpha^2 k}{\delta^2} - \lambda \right) + \frac{\alpha^2 \beta k}{\delta^2} = 0.$$

Уравнение является квадратным относительно  $\lambda$ , его дискриминант равен:

$$D = \frac{\alpha^4 k^2}{\delta^4} + \delta^2 + \beta^2 - 2 \left( \frac{\alpha^2 k}{\delta} + \frac{\alpha^2 \beta k}{\delta^2} + \beta \delta \right).$$

Следовательно, существует некоторая область, где он окажется меньше нуля и в решении появятся колебания. Устойчивость таких решений будет определяться знаком  $\frac{\alpha^2 k}{\delta^2} + \delta - \beta$ . Для асимптотической устойчивости надо требовать  $\beta < \frac{\alpha^2 k}{\delta^2} + \delta$ .

Из аналитического изучения следует, что при некоторых данных можно получить устойчивые колебания настроений. О похожих процессах в обществе написано в источнике [1].

### Численное моделирование

Особый практический интерес представляет результат при непостоянных коэффициентах, входящих в исходную модель. Для выражения управляющего фактора  $\beta$  была использована следующая теория [6]: любое позитивное воздействие мер поощрения (= «подпитки» лояльности) длится не более четырех месяцев, т. е. заряд лояльности, который получают сотрудники от корпоративного

праздника, тринадцатой зарплаты и других видов поощрения постепенно спадает «на нет», но не мгновенно, а за некоторый промежуток времени (в этой модели – 120 дней). Авторы вообще говорят о пороге в 60 дней («любые изменения в оплате труда с целью повышения его эффективности, в том числе повышение заработной платы, становятся для персонала недейственными уже через 2 месяца после введения, поскольку работает эффект «привыкания» к доходу» [2, с. 13]). Зная это, руководство регулярно повторяет поощрения.

Численное моделирование проводилось для разных вариантов значений параметров и подтверждает аналитические оценки. Характерные результаты представлены на рис. 1 и 2. Можно видеть устойчивые колебания численности разных групп сотрудников.

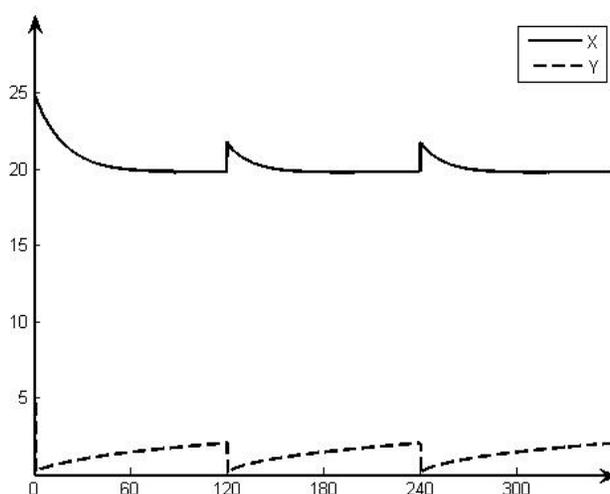


Рис. 1. Динамика изменений  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $\alpha=1$ ,  $\beta=2\sqrt{(t - [t])/120}$ ,  $\delta=0,05$ ,  $\kappa=0,05$

### Обсуждение результатов и выводы

Первый приведённый пример соответствует благоприятной ситуации и стабильной работе. При других соотношениях параметров (как на рис. 2) возможны сильные всплески количества недовольных, после чего дальнейшее функционирование организации может оказаться под вопросом. Поэтому даже при условии наличия устойчивости нужен постоянный мониторинг настроений.

Как видно и из аналитической оценки, и из численного моделирования, начальные условия (т. е. количество лояльных и нелояльных в начальный момент времени) не влияют на характер развития отношений. Это понятно с точки зрения теории дифференциальных уравнений, но имеет объяснение и с точки зрения теории мотивации.

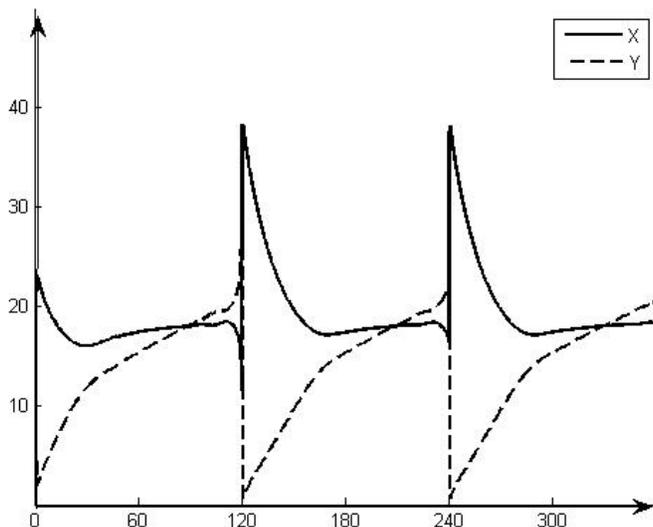


Рис. 2. Динамика изменений  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $\alpha=1$ ,  $\beta=5\sqrt{\frac{(t-[t])}{120}}$ ,  $\delta=0,05$ ,  $\kappa=0,0133$ .

Основным отличием настоящего подхода является то, что, заложив в модель возможность изменяемого с течением времени управляющего воздействия, мы получили определенные выводы о требуемых характеристиках такого воздействия. Поэтому можно говорить о том, что, руководствуясь приведенными в настоящей работе результатами и проводя соответствующие мероприятия, менеджмент компании может получать требуемую динамику лояльности от своих работников. Пусть и с указанными выше допущениями и упрощениями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Фролова Ю.В. Математические методы в социологии. М.: Издательство ЛКИ, 2007. 216 с.
2. Желтенков А.В., Ишунин П.Н., Коновалов О.В. Проблемы формирования системы мотивации и стимулирования труда управленческого персонала в организации // Вестник Московского Государственного областного университета. Серия: Экономика. 2007. № 2 С. 13–18.
3. Захаров А.В. Теория игр в общественных науках: учебник для вузов. М.: Высшая школа экономики, 2015. 304 с.
4. Краснощеков П.С. Простейшая математическая модель поведения. Психология конформизма // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 7. С. 76–92.
5. Татаринцева И.В., Татаринцев В.А. Применение математических моделей естествознания к изучению экономических процессов // Вестник Тульского государственного университета. Серия Современные образовательные технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин. 2013. Т. 1, № 1 (12). С. 107–111.

6. Дементьева К. Выплата бонусов три раза в год добавляет сотрудникам мотивации [Электронный ресурс] // Rb.ru: издание о бизнесе: [сайт] URL: <http://rb.ru/article/vyplata-bonusov-tri-raza-v-god-dobavlyaet-sotrudnikam-motivatsii/7358457.html> (дата обращения: 28.03.2017).

#### REFERENCES

1. Guts A.K., Frolova Yu.V. *Matematicheskie metody v sotsiologii* [Mathematical Methods in Sociology]. Moscow, Publishing of LKI Publ., 2007. 216 p.
2. Zheltenkov A.V., Ishunin P.N., Konovalov O.V. Problems of formation of the system of motivation and stimulation of work of the organization administrative staff. In: *Vestnik Moskovskogo Gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Ekonomika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics], 2007. no. 2. pp. 13–18.
3. Zakharov A.V. *Teoriya igr v obshchestvennykh naukakh* [Game Theory in the Social Sciences: Textbook for Universities]. Moscow, High School of Economics Publ., 2015. 304 p.
4. Krasnoshchekov P.S. The Simplest Mathematical Model of Behaviour. Psychology of Conformism. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Math modeling], 1998, vol. 10, no. 7. pp. 76–92.
5. Tatarintseva I.V., Tatarintsev V.A. The Use of mathematical models of natural sciences to the study of economic processes. In: *Vestnik Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Sovremennye obrazovatel'nye tekhnologii v prepodavanii estestvennonauchnykh distsiplin* [Bulletin of Tula State University. Series: Modern Educational Technologies in the Teaching of Natural Science Disciplines], 2013, vol. 1, no. 1 (12), pp. 107–111.
6. Dement'eva K. Three Times a Year Bonus Stimulates Staff Motivation. In: Rb.ru: edition of the business. Available at: <http://rb.ru/article/vyplata-bonusov-tri-raza-v-god-dobavlyaet-sotrudnikam-motivatsii/7358457.html> (accessed 28.03.2017).

---

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Гордеев Андрей Александрович* – студент экономического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова;  
e-mail: aagordeev@hotmail.com

*Самойлова Ирина Александровна* – ассистент кафедры Высшей математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;  
e-mail: irinas@bmstu.ru

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Andrey A. Gordeev* – Student at the Faculty of Economics at Moscow State University;  
e-mail: aagordeev@hotmail.com

*Irina A. Samoylova* – Assistant at the Department of Advanced Mathematics of Bauman State Technical University;  
e-mail: irinas@bmstu.ru

**ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА**

Гордеев А.А., Самойлова И.А. Управление лояльностью сотрудников. Математическая модель и практические выводы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. 2017, № 2. С. 54-60  
DOI: 10.18384/2310-6646-2017-2-54-60

**CORRECT REFERENCE**

Gordeev A.A., Samoilova I.A. Employee Loyalty Management. Mathematical Model and Practical Conclusions. *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics*, 2017, no. 2, pp. 54-60.  
DOI: 10.18384/2310-6646-2017-2-54-60