РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-08-17

ГОМОТЕТИИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНОСЫ В ПРОЕКТИВНО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Андроникова Е.О.[1], Дмитриева М.Н.[2], Матвеев О.А.[3], Матвеева Н.В.[1]
[1]Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
127055, г. Москва, Вадковский переулок, д. 3а, Российская Федерация
[2]Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова
390026, г. Рязань, ул. Высоковольтная, д. 9, Российская Федерация
[3]Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются алгебраические и геометрические свойства широкого класса проективно симметрических многообразий аффинной связности с ненулевым тензорным полем кручения, имеющих общие гомотетии с симметрическими пространствами. Такие пространства называются просимметрическими, они и различные подклассы этих пространств рассматриваются с точки зрения неассоциативных дифференцируемых универсальных алгебр, исследуются свойства параллельных переносов и гомотетий. Найдены необходимые и достаточные алгебраические условия, которым удовлетворяет геодезическая лупа в каждой точке просимметрического многообразия аффинной связности.

Ключевые слова: симметрические многообразия, пространства аффинной связности, геодезические отображения, универсальные алгебры, квазигруппы.

HOMOTHETIES AND PARALLEL TRANSLATIONS IN PROJECTIVE SYMMETRIC SPACES OF AFFINE CONNECTION

E. Andronikova,[1] M. Dmitrieva,[2] O. Matveyev,[3] N Matveyeva[1]
[1]Moscow State Technological University 'STANKIN', Vadkovsky pereulok 3a, 127055 Moscow, Russia;
[2]I.P. Pavlov Ryazan State Medical University, ul. Vysokovol'tnaya 9, 390026 Ryazan, Russia;
[3]Moscow State Regional University, ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the algebraic and geometric properties of a broad class of projective symmetric affine-connected manifolds with a nonzero torsion tensor field having common homotheties with symmetric spaces. Such spaces are called prosimmetric. Various subclasses of these spaces are discussed. We study the properties of parallel translations and homotheties from the viewpoint of differentiable unassociative universal algebras. The necessary and sufficient algebraic conditions, which a geodesic loop satisfies at each point in a prosimmeric manifold with affine connection, are obtained.

Key words: symmetric manifolds, affine connected spaces, geodesic mappings, universal algebra, quasigroup.

Применяются методы универсальных алгебр к исследованию некоторых классов пространств аффинной связности с ненулевым тензорным полем кручения, близких к симметрическим. Здесь мы приводим обзор некоторых результатов в этом направлении.

Определение 1 [12]. Частичную гладкую локальную алгебру $\chi = \langle X, \cdot, \backslash, (\omega_t)_{t\epsilon R}, e\rangle$ с бинарными операциями умножения, левого деления, однопараметрическим семейством унарных операций $(\omega_t)_{t\epsilon R}$ называют гладкой локальной левой лупой с гомотетиями (одулем) над полем действительных чисел, если: а) $\langle X, \cdot, \backslash, e\rangle$ – гладкая локальная левая лупа; б) существует такая открытая окрестность U нейтрала e, что для любого x из U и для любого вещественного числа t, принадлежащего некоторому открытому интервалу, содержащему отрезок $[0,1]$, $\omega_t = tx$, определённо и принадлежит U, в) если tx и ux $(t, u\epsilon R,\ x\epsilon X)$ определённы, то $tx \cdot ux$ определено тогда и только тогда, когда $(t+u)x$ определено, и в этом случае выполняется тождество моноассоциативности: $x \cdot ux = (t+u)x$, г) если ty определённо, то $u(ty)$ определённо тогда и только тогда, когда $(ut)y$ определённо, и в этом случае $u(ty)= (ut)y$, д) умножение каждого элемента x из X на единицу действительных чисел определено, и $1x = x, 1\epsilon R$. При фиксированном действительным числе t отображение $\omega_t : x \to tx$ называем гомотетией с центром в точке e с коэффициентом t. (Здесь и в дальнейшем изложении, для краткости, допуская вольность речи, мы опускаем символ умножения действительного числа на элемент из X).

Замечание. Лупа с гомотетиями – это естественное широкое обобщение понятия векторного пространства. Локальная группа Ли $G = \langle X, \cdot, e \rangle$ всегда есть локальная лупа с гомотетиями, если определить умножение на действительные числа формулой: $tx = Exp(tExp^{-1}x)$, где Exp есть экспоненциальное отображение группы Ли.

Замечание. В зарубежной литературе отмечено, что значения терминов «гладкая лупа» («smooth loop») и «лупа Ли» («Lie loop») близки.

Пусть (M, ∇) – гладкое многообразие аффинной связности, тогда для любой точки $y \in M$ в её нормальной выпуклой окрестности можно определить гладкие локальные операции формулами: $L_x^y z = Exp_x \tau_x^y \left(\left(Exp_y \right)^{-1} z \right)$, $\omega_t(y, z) = t_y z = Exp_y \left(t \left(Exp_y \right)^{-1} z \right)$, где $\tau_x^y : T_y(M) \to T_x(M)$ – параллельный перенос касательных векторов вдоль единственного отрезка геодезической линии, принадлежащего этой окрестности точки y и соединяющего точки x и y. Так получается гладкое локальное многообразие $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t\epsilon R} \rangle$, в каждой точке которого определена геодезическая лупа с гомотетиями. Параллельные переносы и гомотетии связаны определёнными алгебраическими тождествами: $L_{t,x}^{u,x} L_{u,x}^y = L_{t,x}^y$, $L_x^y t_y = t_x L_x^y$. Обратно, в гладком локальном многообразии $M = \langle M, L, (\omega_t)_{t\epsilon R} \rangle$ аффинная связность однозначно восстанавливается. В произвольном пространстве аффинной связности (M, ∇) гомотетии обладают следующими свойствами [1; 10]: а) для любого x из M существует такая открытая окрестность U_x, содержащая x, что для любых y из U_x, для любого вещественного числа $t\epsilon[0,1]$, $t_x y$ определено, и $t_x y \,\epsilon\, U_x$, б) если $t_x y$ определено, а также определены $u_x(t_x y)$ и $(u \cdot t)_x y$, то $u_x(t_x y) = (ut)_x y$, $u, t \,\epsilon R$ в) выполняется тождество $t_x y = (1-t)_y x$, $t \,\epsilon R$, $x, y\epsilon M$, г) определено $1_x y$, и $1_x y = y$.

Заметим, что, если локально заданы дифференцируемые гомотетии, и выполняются свойства а)–г), то можно локально построить отрезки геодезических линий и однозначно восстановить аффинную связность с нулевым полем тензора кручения [1].

Определение 2 [13]. Лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e \rangle$ называется геометрической, если выполняется тождество: $l^e(x, t_e y)u_e = u_e l^e(x, t_x y)$, где $l(x,z)y = L^{-1}_{L_x z} L_x L_z y$ (Здесь мы для краткости пропустили символ нейтрала *e*).

Геометрическая лупа с гомотетиями порождает аффинно-связное пространство без кручения в некоторой открытой окрестности нейтрала *e*, и гомотетии, центры которых принадлежат этой окрестности, алгебраически выражаются через операции $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e \rangle$ [1; 12]. Дифференцируемая лупа с гомотетиями является геодезической некоторой (не обязательно единственной) аффинной связности, если и только если она является геометрической [12]. Гомотетии локально симметрического пространства удовлетворяют тождествам:

$$(-1)_x(-1)_{t_x y} = (-1)_{t_y x}(-1)_y, \quad (-1)_x \circ t_y = t_{(-1)_x y} \circ (-1)_x.$$

Это необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство аффинной связности без кручения было локально симметрическим [1; 10].

Определение 3 [2; 3; 6]. Пространство аффинной связности называется просимметрическим, если оно имеет общие геодезические линии с сохранением аффинного параметра (общие гомотетии) с локально симметрическим пространством.

Предложение 1 [11]. Локальное просимметрическое многообразие аффинной связности (M, ∇) характеризуется следующими дифференциально – геометрическими соотношениями:

$$(\nabla_X \bar{R})(Y, Z; W) + \frac{1}{2}\bar{R}(T(X,Y), Z)W + \frac{1}{2}\bar{R}\big(Y, T(X,Z)\big)W + \\ + \tfrac{1}{2}\bar{R}(Y,Z)T(X,W) - \tfrac{1}{2}T(X, \bar{R}(Y,Z)W) = 0,$$

где

$$\bar{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2}(\nabla_X T)(Y,Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y T)(X,Z) + \\ + \frac{1}{4}T\big(X, T(Y,Z)\big) - \frac{1}{4}T\big(Y, T(X,Z)\big) + \frac{1}{2}T\big(Z, T(X,Y)\big);$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \tfrac{1}{2}T(X,Y); \quad \bar{\nabla}\bar{R} = 0,$$

R и T обозначают тензорные поля кривизны и кручения в (M, ∇).

Предложение 2 [6]. Пусть $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e\rangle$ – геометрическая лупа с гомотетиями. Определим отображение $\Psi_x^e : M \to M$ формулой:

$$\begin{gathered}\Psi_x^e = (-1)_e \circ (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ L_x^e = (-1)_e \circ L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ \\ \circ (-1)_e \circ \left(L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x}\right)^{-1} \circ L_x^e.\end{gathered} \tag{1}$$

Тогда $\mathcal{M}_e$ просимметрична, если и только если выполняются соотношения:

$$\begin{gathered}\Psi^e_{t_e x}(x) = x, \Psi^e_x \circ t_e = t_e \circ \Psi^e_x \quad \text{и} \\ L^e_{t_e x} \circ \left(\Psi^e_{t_e x}\right)^{-1} \circ L^e_{u_e x} \circ \left(\Psi^e_{u_e x}\right)^{-1} = L^e_{(t+u)_e x} \circ \left(\Psi^e_{(t+u)_e x}\right)^{-1}\end{gathered} \tag{2}$$

Предложение 3 [6]. Пусть $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e\rangle$ – геометрическая лупа с гомотетиями. Для произвольных x, y из M определим отображение:

$$g^e(x, y) = \left(L_y^e\right)^{-1} \circ (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_x y} \circ L_x^e \circ (-1)_e. \tag{3}$$

Тогда $\mathcal{M}_e$ – просимметрична, если и только если справедливо:

$$\begin{gathered}g^e(L_x^e u_e y, L_x^e t_e y) \circ g^e(x, L_x^e u_e y) = g^e(x, L_x^e t_e y), \\ g^e(x, y) \circ t_e = t_e \circ g^e(x, y), x, y \epsilon M, u, t\, \epsilon R.\end{gathered}$$

Предложение 4 [6]. Геометрическая лупа с гомотетиями просимметрична, если и только если выполняются тождества:

$$\begin{gathered}\left|L^e_{L^e_x (-1)_e\, y}\right|^{-1} \circ L^e_x \circ (-1)_e \circ (L^e_x)^{-1} \circ L^e_{L^e_x} \circ t_e = \\ = t_e \circ \left|L^e_{L^e_x (-1)_e\, y}\right|^{-1} \circ L^e_x \circ (-1)_e \circ (L^e_x)^{-1} \circ L^e_{L^e_x y}\end{gathered}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}L^e_{L^e_x (t+1)_e\, y} \circ (-1)_e \circ \left|L^e_{L^e_x t_e (t+1)_e\, y}\right|^{-1} \circ L^e_{L^e_x t_e\, y} \circ (-1)_e \circ \left|L^e_{L^e_x t_e\, y}\right|^{-1} = \\ = L^e_{L^e_x\, y} \circ (-1)_e \circ \left(L^e_{L^e_x\, y}\right)^{-1} \circ L^e_x \circ (-1)_e \circ (L^e_x)^{-1}.\end{gathered} \tag{5}$$

Следствие. Аналитическое многообразие аффинной связности является просимметрическим, если и только если геодезическая лупа в каждой точке многообразия удовлетворяет тождеству:

$$x[x\backslash[(xy)((xy)\backslash(xz))^{-1}]]^{-1} = (xy^{-1})[(xy^{-1})\backslash(xz^{-1})]^{-1} \tag{6}$$

(Здесь мы для краткости опустили символ умножения лупы).

Определение 4 [7]. Геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e\rangle$ называется *инвариантной*, если её левые сдвиги (параллельные переносы) $L_x^e : M \to M$ являются автоморфизмами порождаемого ей многообразия с геодезическими [1], то есть выполняется тождество: $L_x^e \circ t_y = t_{L_x^e y} \circ L_x^e$.

Предложение 5 [7]. Геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e\rangle$ инвариантна, если и только если она удовлетворяет тождеству:

$$l^e(x,y) \circ t^e = t_e \circ l^e(x,y). \qquad (7)$$

Предложение 6 [7]. Геометрическая лупа с гомотетиями является инвариантно просимметрической, если и только если выполняются тождество (7) и:

$$L_x^e \circ (-1)_e \circ L_x^e \circ t_e = t_e \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ L_x^e, \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} &L_{t_e x}^e \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ (-1)_e = \\ &= L_x^e \circ (-1)_e \circ (L_x^e)^{-1} \circ (-1)_e \circ L_{t_e x}^e \end{aligned} \qquad (9)$$

Следствие. Аналитическое многообразие аффинной связности является инвариантно просимметрическим, если и только если каждая его геодезическая лупа удовлетворяет тождествам:

$$x(xy^{-1})^{-1} = [x(xy)^{-1}]^{-1}, \;\; [(\mathrm{xy})\backslash(\mathrm{x}(\mathrm{yz}))]^{-1} = (\mathrm{xy})\backslash[\mathrm{x}(\mathrm{yz}^{-1})]. \quad (10)$$

Предложение 7 [7]. Пусть геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e\rangle$ является левомоноальтернативной и инвариантно просимметрической. Тогда она характеризуется тождествами (8) и:

$$\begin{gathered} L_{t_e x}^e \circ L_x^e = L_{(t+1)_e x}^e, \\ L_{t_e x}^e \circ (-1)_e \circ L_x^e \circ (-1)_e = (-1)_e \circ L_x^e \circ (-1)_e \circ L_{t_e x}^e. \end{gathered} \qquad (11)$$

Следствие: Лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e\rangle$ является редуктивной и просимметрической тогда и только тогда, когда выполняются тождества (8), (11) и $l^e(x,y) \circ L_z^e = L_{l^e(x,y)z}^e \circ l^e(x,y)$.

Определение 5 [8; 9; 12]. Просимметрическое пространство аффинной связности называется почти симметрическим, если композиция двух геодезических симметрий является автоморфизмом геометрической структуры пространства.

Предложение 8 [8; 9]. Геометрическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \langle M, L^e, \{t_e\}_{t\,\epsilon R}, e\rangle$ может быть реализована как геодезическая в пространстве почти симметрической аффинной связности тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \varphi_{(t+u)_e x} x = \varphi_{t_e x} \circ \varphi_{u_e x}, \\ L_{t_e x}^e \circ \varphi_x = L_x^e \circ \varphi_x \circ L_{(t-1)_e x}^e, \\ \bar{l}^e(x,y) \circ L_z^e = L_{\bar{l}^e(x,y)z}^e \circ \bar{l}^e(x,y), \\ \bar{l}^e(x,y) \circ t^e = t_e \circ \bar{l}^e(x,y), \end{gathered}$$

где

$$\varphi_x = (L_x^e)^{-1} S_x^e,$$

$$S_x^e = (L^e)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e \circ \left(L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \right)^{-1} \circ (-1)_e; x, y, z \in M,$$

$$\bar{l}^e(x, y) = \left(S^e_{S^e_x y}\right)^{-1} \circ S_x^e \circ S_y^e; \qquad u, t \in R.$$

Определение 6 [8; 9]. Многообразие аффинной связности (M, ∇) называется антисимметрическим, если геодезическая симметрия $S_a = (-1)_a$ относительно любой точки a пространства является локальным антиизоморфизмом операций умножения геодезических луп, то есть $\forall a, x, y, z \in M \ \ S_a \left(y \underset{x}{\cdot} z \right) = S_a z \underset{S_a x}{\cdot} S_a y.$

Предложение 9 [8; 9]. Геодезическая лупа аналитического антисимметрического многообразия почти симметрична, бинарно-лиева, и справедливы следующие тождества:

$$\begin{gathered} b\lfloor (b^{-1}a^2b^{-2}a^2b^{-1})b^{-1}\lfloor a\lfloor (a^{-1}b^2a^{-1}) \cdot (a^{-1}za^{-1})\rfloor a\rfloor b^{-1}\rfloor b = \\ = a\lfloor (ab^2a) \cdot (a^{-1}za^{-1})\rfloor a, \end{gathered} \tag{12}$$

$$a\lfloor (a^{-1}b^2a^{-1})(az^{-1}a)\rfloor a = b^2\lfloor a^{-1}\lfloor (az^{-1}a)(ab^{-2}a)\rfloor a^{-1}\rfloor b^2, \tag{13}$$

$$x(y(xzx)y)x = (xyx)z(xyx),$$

$$\begin{gathered} (xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(y(zw)y)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}} = \\ = \left[(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(yzy)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}(x(ywy)x)(xy^2x)^{-\frac{1}{2}}\right] \end{gathered} \tag{14}$$

Свойства параллельных переносов и гомотетий просимметрических многообразий аффинной связности нулевой кривизны рассмотрены в работе [11]. Обобщение симметрических пространств, выходящее за рамки теории многообразий аффинной связности, приводится в работах [4; 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев О.А. О многообразиях с геодезическими // Ткани и квазигруппы. Калинин: Изд-во КГУ. 1986. С. 44–49.
2. Матвеев О.А. О локально инвариантных аффинных связностях // Ткани и квазигруппы. Тверь: Изд-во ТГУ. 1991 С. 78–97.
3. Матвеев О.А. О пространствах аффинной связности, близких к симметрическим // Геометрия обобщенных пространств. Межвузовский сборник научных трудов. Пензенский государственный педагогический институт. Пенза 1992. С. 55–59.

4. Матвеев О.А. Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями. // Вестник Московского педагогического университета. Серия: Физика-Математика. № № 3–4. 1998. С. 10–15.
5. Матвеев О.А., Матвеева Н.В., Паншина А.В. О квазигрупповой теории абелевых и симметрических механических систем // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Выпуск 9. М.: МГТУ СТАНКИН. Институт математического моделирования Российской академии наук. 2005. С. 22–25.
6. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Просимметрические пространства. // Вестник РУДН. Серия: Математика. 7 (1). 2000. С. 114–126.
7. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. О локально инвариантных пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика, № 2. 2010. С. 19–27.
8. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
9. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: Московский государственный областной университет. 2012. 132 с.
10. Matveyev O.A. On quasigroup theory of manifolds with trajectories. // Webs and quasigroups. Tver. 2000. pp. 129–139.
11. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. // Werbs and quasigroups. Tver. 2002. pp. 78–84.
12. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series: Mathematics 2 (1).1995. pp. 135–243.

REFERENCES

1. Matveev O.A. O mnogoobraziyakh s geodezicheskimi [On manifolds with geodesic] // Tkani i kvazigruppy [Fabric and quasigroups]. Kalinin, Izd-vo KGU, 1986. pp. 44–49.
2. Matveev O.A. O lokal'no invariantnykh affinnykh svyaznostyakh [On locally invariant affine connections] // Tkani i kvazigruppy [Fabric and quasigroups]. Tver, Izd-vo TGU, 1991. pp. 78–97.
3. Matveev O.A. O prostranstvakh affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim [On spaces with affine connection close to symmetric] // Geometriya obobshchennykh prostranstv. Mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov. Penzenskii gosudarstvennyi pedagogicheskii institut [Geometry of generalized spaces. Interuniversity collection of scientific works. Penza state pedagogical Institute]. Penza, 1992. pp. 55–59.

4. Matveev O.A. Kvazigruppovye svoistva mnogoobrazii s traektoriyami. [Quasigrupuri properties of manifolds with trajectories.] // Vestnik Moskovskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 1998. no. 3–4. pp. 10–15.
5. Matveev O.A., Matveeva N.V., Panshina A.V. O kvazigruppovoi teorii abelevykh i simmetricheskikh mekhanicheskikh sistem [About quasigrupuri theory of Abelian and symmetric mechanical systems] // Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem. Vypusk 9. [Fundamental physical and mathematical problems and modeling of technical and technological systems. Issue 9]. M.: MGTU STANKIN Institute for mathematical modelling Russian Academy of Sciences, 2005. pp. 22–25.
6. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Prosimmetricheskie prostranstva. [Procompetencia space.] // Vestnik RUDN. Seriya: Matematika [Bulletin of PFUR. Series: Mathematics]. 2000. pp. 114–126.
7. Matveev O.A., Nesterenko E.L. O lokal'no invariantnykh prostranstvakh affinnoi svyaznosti [On locally invariant spaces with affine connection] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2010. no. 2. pp. 19–27.
8. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Algebraic theory of spaces close to symmetric: monograph]. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 p.
9. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric: monograph]. M., Moskovskii gosudarstvennyi oblastnoi universitet, 2012. 132 p.
10. Matveyev O.A. On quasigroup theory of manifolds with trajectories. // Webs and quasigroups. Tver. 2000. pp. 129–139.
11. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. // Werbs and quasigroups. Tver. 2002. pp. 78–84.
12. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series: Mathematics 2 (1).1995. pp. 135–243.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Андроникова Екатерина Олеговна – магистр, аспирант Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Дмитриева Мария Николаевна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель Рязанского государственного медицинского университета;
e-mail: dmitrm05@mail.ru

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

Матвеева Наталья Владимировна – старший преподаватель Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: veyevtam@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Andronikova Ekaterina Olegovna – magistr, post-graduate student, Moscow State University of Technology «STANKIN»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

Dmitrieva Maria Nikolaevna – candidate of pedagogical sciences, senior lecture, Ryazan State Medical University;
e-mail: dmitrm05@mail.ru

Matveyev Oleg Alexsandrovich – candidate of physical and mathematical sciences, Associate professor, Moscow State Regional University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

Matveyeva Natalia Vladimirovna – senior lecturer, Moscow State University of Technology «STANKIN»;
e-mail: veyevtam@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Андроникова Е.О., Дмитриева М.Н., Матвеев О.А., Матвеева Н.В. Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 8–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-08-17.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Andronikova, M. Dmitrieva, O. Matveyev, N. Matveyeva Homotheties and parallel translations in projective symmetric spaces of affine connection // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 8–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-08-17.