УДК 533.9(075.8)
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-30-36

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕОДНОРОДНЫХ И НЕРАВНОВЕСНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

Маркеев Б.М.
Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе развивается гидродинамическая теория течения сильнонеравновесной газовой смеси на основе разложения решения уравнения Больцмана по ортогональным полиномам в пространстве скоростей возле парциальной максвелловской функции. Классическим примером могут служить течения в области ударной волны, в слабоионизованном газе, помещённом в сильное электрическое поле, а также в кнудсеновском слое вблизи твёрдых поверхностей. Анализируются особенности обобщённого моментного метода решения кинетического уравнения по сравнению с классическим методом Чепмена-Энскога. Показано, что решения в рамках обобщённого моментного метода обладают для течения сильнонеравновесной газовой смеси более быстрой асимптотической сходимостью по сравнению с классическим методом Чепмена-Энскога.

Ключевые слова. классический метод Чепмена-Энскога, обобщенный моментный метод, уравнение Больцмана, максвелловская функция.

KINETIC THEORY AND NONEQUILIBRIUM INHOMOGENEOUS GAS MIXTURES

B. Markeev
Moscow State Regional University, ul. Radio 10a,
105005 Moscow, Russia

Abstract. We have developed the hydrodynamic theory of the flow of a strongly nonequilibrium gas mixture through the decomposition of the solution of the Boltzmann equation for orthogonal polynomials in the space of velocities near the partial Maxwellian function. A classic example is the flow in the region of a shock wave in a weakly ionized gas placed in a strong electric field, and also in the Knudsen layer near the solid surfaces. We analyze the features of the generalized moment method for solving the kinetic equation as compared to the classical Chapman–Enskog method. It is shown that for the flow of a strongly nonequilibrium gas mixture, the solutions in the framework of the generalized torque method have a faster asymptotic convergence compared to the classical Chapman–Enskog method.

Keywords: classical Chapman-Enskog method, generalized moment method, the Boltzmann equation, Maxwellian function.

При исследовании потоков сильнонеравновесной газовой смеси удобно описывать каждую компоненту смеси парциальной функцией распределения $f_\alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_\alpha, t)$. Парциальная функция распределения определяется таким образом, что $f_\alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_\alpha, t) d\boldsymbol{r} d\boldsymbol{v}_\alpha$ представляет собой среднее число частиц сорта α в момент времени t, находящихся в объёме $d\boldsymbol{r}$ в окрестности точки $\boldsymbol{r}$ и интервале скоростей $d\boldsymbol{v}_\alpha$ в окрестности $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Функция распределения может также рассматриваться как плотность вероятности в $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}_\alpha$ фазовом пространстве. Эволюция во времени парциальной функции распределения определяется как движением невзаимодействующих частиц в поле внешних сил, так и столкновениями между частицами. Математическое описание данной эволюции даётся хорошо известным уравнением Больцмана.

$$\nabla_t f_\alpha + \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{\nabla}_r f_\alpha + [\boldsymbol{G} + (e_\alpha/m_\alpha)(\boldsymbol{E} + (1/\boldsymbol{c})[\,\boldsymbol{v}_\alpha \times \boldsymbol{B}])]\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} f_\alpha \;=\; (\delta/\delta t)\, f_\alpha, \quad (1)$$

где e_α и m_α – заряд и масса частиц сорта α соответственно, $\boldsymbol{G}$ – массовая сила, $\boldsymbol{E}$ – электрическое поле, $\boldsymbol{B}$ – магнитное поле, **c** – скорость света, ∇_t – временная производная, $\boldsymbol{\nabla}_r$ – градиент в пространстве координат, $\boldsymbol{\nabla}_v$ - градиент в пространстве скоростей. Величина $(\delta/\delta t)\, f_\alpha$ в уравнении Больцмана представляет скорость изменения функции f_α в данной области фазового пространства за счёт столкновений. Для бинарных упругих столкновений между ионами и нейтралами и между нейтралами различных сортов используем интеграл столкновений Больцмана:

$$(\delta/\delta t)\, f_\alpha \;=\; \sum\int d\boldsymbol{v}_\alpha d\Omega \boldsymbol{g}_{\alpha\beta} \sigma(\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}, \delta)(f_\alpha' f_\beta' - f_\alpha f_\beta) \;=\; \sum I \quad (2)$$

где $d\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}$ – элемент в пространстве скоростей частицы сорта α, $\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}$ – относительная скорость сталкивающихся частиц сорта α и β, $\sigma(\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}, \delta)$ – дифференциальное сечение рассеяния, $d\Omega$ – элемент телесного угла в системе центра масс, δ – угол рассеяния, штрих означает, что аргументом функции распределения является скорость после столкновения. Хотя представляется заманчивым знать индивидуальное распределение частиц по скоростям, математические трудности, связанные с решением уравнения Больцмана, определили невозможность получения информации подобного рода для сильнонеравновесной смеси. В работах Чепмена, Энскога, Барнетта [1] основные физические величины были определены в системе координат, движущейся со среднемассовой скоростью газовой смеси:

$$\boldsymbol{u} = \sum n_\alpha m_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha / \sum n_\alpha m_\alpha, \tag{3}$$

где n_α – плотность частиц сорта α , $\boldsymbol{u}_\alpha$ – средняя скорость частиц сорта α, которая определяется ниже. Тепловая скорость определяется относительно системы координат, движущейся со среднемассовой скоростью, соотношением:

$$\boldsymbol{c}_\alpha^* = \boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{u} \tag{4}$$

Для парциальной функции распределения имеют физический смысл следующие моменты:

парциальная дрейфовая скорость:

$$\boldsymbol{u}_\alpha = \langle \boldsymbol{v}_\alpha \rangle \tag{5}$$

парциальная температура:

$$(3/2) k_B T_\alpha^* = (m_\alpha/2) < \mathbf{c}_{\boldsymbol{\alpha}}^{*2} > \tag{6}$$

парциальный вектор теплового потока:

$$\boldsymbol{q}_\alpha^* = (½) n_\alpha\, m_\alpha < \mathbf{c}_{\boldsymbol{\alpha}}^{*2}\, \mathbf{c}_{\boldsymbol{\alpha}}^* > \tag{7}$$

парциальный тензор давления:

$$P_{\alpha ik}^* = n_\alpha m_\alpha < \mathrm{c}_{\alpha i}^*\, \mathrm{c}_{\alpha k}^* > \tag{8}$$

парциальный тензор напряжений:

$$\sigma_{\alpha ik}^* = \delta_{ik} p_\alpha^* - P_{\alpha ik}^* \tag{9}$$

парциальный тензор давления более высокого порядка:

$$\mu_{llik}^* = (½) n_\alpha\, m_\alpha < \mathrm{c}_{\boldsymbol{\alpha}}^{*2}\, \mathrm{c}_{\alpha i} \cdot \mathrm{c}_{\alpha k}^* > \tag{10}$$

парциальный тензор третьего ранга

$$Q_{\alpha ijk}^* = n_\alpha\, m_\alpha < \mathrm{c}_{\boldsymbol{\alpha}}^* \mathrm{c}_{\alpha i} \mathrm{c}_{\alpha k}^* >, \tag{11}$$

где $p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha^*$ - парциальное давление частиц сорта α, k_B – постоянная Больцмана, δ_{ik} – символ Кронекера и угловые скобки означают усреднения:

$$< A > = (1/n_\alpha) \int d\, \boldsymbol{v}_\alpha\; f_\alpha\, A. \tag{12}$$

Если в качестве одной гидродинамической переменной выбрана среднемассовая скорость, характеризующая движение смеси как целого, то необходимо дополнительно к ней ввести диффузионные скорости, описывающие парциальные потоки индивидуальных компонент относительно системы координат, связанной со среднемассовой скоростью

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{u} \tag{13}$$

В ранних работах Чепмена, Энскога, Барнетта уравнения переноса для гидродинамических переменных были получены в предположении, что величина диффузионных скоростей мала, поэтому членами, соответствующими моментам высокого порядка, произведению диффузионных скоростей, так же, как и произведению диффузионной скорости на моменты более высокого порядка $\boldsymbol{q}_{\alpha}^{*}$, $\sigma_{\alpha ik}^{*}$, μ_{llik}^{*}, $Q_{\alpha ijk}^{*}$, пренебрегали. Явления переноса в пределе малых диффузионных скоростей были изучены для различных газовых смесей, что нашло отражение в классической монографии Чепмена и Каулинга [2]. С другой стороны, система уравнений переноса для величин (1–9), предложенная в [3], описывает явления переноса в многокомпонентной газовой смеси при конечных числах Кнудсена, когда необходим учёт вязкого переноса импульса за счёт диффузионных скоростей, обусловленного взаимодействием между компонентами. Как альтернатива по отношению к транспортным свойствам смеси газов, определённым по отношению к среднемассовой скорости, в обобщённом методе моментов транспортные свойства компонентов газовой смеси определяются по отношению к средней парциальной скорости данной компоненты. Это предполагает, что для взаимодействующих компонент с конечными относительными скоростями парциальная функция распределения нулевого приближения более вероятно представляет собой максвелловскую функцию в системе, связанной с парциальной средней скоростью, а не со среднемассовой скоростью. И, как следствие, разложение функции распределения по скоростям для данного компонента частиц относительно парциальной максвелловской функции должно обеспечить более быструю асимптотическую сходимость, если парциальная скорость используется для определения транспортных свойств. По отношению к парциальной средней скорости хаотическая или тепловая средняя скорость определяется как

$$\boldsymbol{c}_{\alpha} = \boldsymbol{v}_{\alpha} - \boldsymbol{u}_{\alpha}\,, \tag{14}$$

а моменты функции распределения, имеющие физический смысл, соответственно:

$$\boldsymbol{u}_{\alpha} = \langle \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}} \rangle\,, \tag{15}$$

$$(3/2)k_B T_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{2}\right) < \boldsymbol{c}_\alpha^2 >, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{q}_\alpha = (1/2\ ) n_\alpha\, m_\alpha < \boldsymbol{c}_\alpha^2\ \boldsymbol{c}_\alpha >, \tag{17}$$

$$P_{\alpha ik} = n_\alpha\, m_\alpha < \mathrm{c}_{\alpha i}\, \mathrm{c}_{\alpha k} >, \tag{18}$$

$$\sigma_{\alpha ik} = \delta_{ik} p_\alpha - P_{\alpha ik}, \tag{19}$$

$$\mu_{llik} = (\ ½\ ) n_\alpha m_\alpha < \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\, c_{\alpha i}\, c_{\alpha k}\ >, \tag{20}$$

$$Q_{\alpha ijk} = n_\alpha\, m_\alpha < \mathrm{c}_{\alpha i}\, \mathrm{c}_{\alpha j}\, c_{\alpha k} >, \tag{21}$$

где $p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha$. Отличие данного определения транспортных свойств от (4–11) можно выразить, используя величину диффузионной скорости

$$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\alpha}}^* = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (5–10) и учитывая (14–21), получим следующие соотношения в связи с различным определением транспортных свойств:

$$T_\alpha^* = T_\alpha + m_\alpha \boldsymbol{W}_\alpha^2 / 3k_B, \tag{23}$$

$$q_{\alpha i}^* = q_{\alpha i} + \left(\frac{5}{2}\right) p_\alpha W_{\alpha i} - W_{\alpha k}\sigma_{\alpha ik} + \left(\frac{1}{2}\right) n_\alpha m_\alpha \boldsymbol{W}_\alpha^2\ W_{\boldsymbol{\alpha i}}, \tag{24}$$

$$P_{\alpha ik}^* = P_{\alpha ik} + n_\alpha\, m_\alpha W_{\alpha i} W_{\alpha k}, \tag{25}$$

$$\sigma_{\alpha ik}^* = \sigma_{\alpha ik} - n_\alpha\, m_\alpha \left[\, W_{\alpha i} W_{\alpha k} - \delta_{iik} \boldsymbol{W}_\alpha^2 / 3\right], \tag{26}$$

$$\mu_{\alpha llik}^* = \mu_{\alpha llik} + q_{\alpha i} W_{\alpha k} + W_{\boldsymbol{\alpha i}} q_{\alpha k} + (3/2) p_\alpha W_{\alpha i} W_\alpha + W_{\alpha j}\, Q_{\alpha ijk} + \\ + 2 P_{\alpha ij} W_{\alpha j} W_{\alpha k} + (1/2) \boldsymbol{W}_\alpha^2 P_{\alpha ik} + (1/2) n_\alpha m_\alpha \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 W_{\alpha i} W_{\alpha k}, \tag{27}$$

$$Q_{\alpha ijk}^* = Q_{\alpha ijk} + P_{\alpha ij} W_{\alpha k} + W_{\alpha i} P_{\alpha jk} n_\alpha m_\alpha < \mathrm{c}_{\alpha i} W_{\alpha j} \mathrm{c}_{\alpha k} > + n_\alpha m_\alpha W_{\alpha i} W_{\alpha j} W_{\alpha k}. \tag{28}$$

Как отмечалось выше, в методе Чепмена-Энскога-Барнетта для газовых смесей величина диффузной скорости предполагается достаточно малой, так что членами, содержащими моменты более высокого порядка и произведения диффузионных скоростей, можно пренебречь, как и членами, пропорциональными произведению $\boldsymbol{W}_\alpha$ и моментов $\boldsymbol{q}_\alpha$, $\sigma_{\alpha ik}$, $\mu_{\alpha llik}$, $Q_{\alpha ijk}$. Таким образом, в пределе малых диффузионных скоростей можно пренебречь отличием в определении транспортных свойств температуры, тензора давлений, тензора напряжений, тензора давлений более высокого порядка и тензора потока тепла. Представляется уместным отметить существенную разницу в определении потока тепла:

$$q_\alpha^* = q_\alpha + (5/2) p_\alpha W_\alpha. \tag{29}$$

Эту разницу в определении необходимо иметь в виду при сравнении коэффициентов переноса, полученных для (24), с соответствующими коэффициентами, которые следуют из теории Чепмена-Энскога. Классическим примером сильнонеравновесной среды служит ударная волна в газовой смеси [4]. Одним из эффективных методов исследования явлений переноса в данной системе является метод Мотт-Смита, в рамках которого система характеризуется бимодальным распределением молекул по скоростям [5]:

$$f_\alpha = f_\alpha^{(1)} + f_\alpha^{(2)},\ f_\alpha^{(i)} = n_\alpha (m_\alpha / 2\pi k_B T_\alpha)^{3/2} exp\left\{\frac{-m_\alpha(\boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{u}_\alpha)^2}{2k_B T_\alpha}\right\}, \qquad (30)$$

где $f_\alpha^{(1)}$ и $f_\alpha^{(2)}$ – максвелловские функции распределения относительно парциальных скоростей, определяющих состояние системы до ударной волны и после. Систему уравнений переноса, описывающую пространственную эволюцию функции распределения (30), полученной методом Мотт-Смита, замыкают обычно уравнением для переноса потока импульса, и величина изменения потока импульса (справедливая для конечных относительных скоростей) используется для определения толщины ударной волны. Её нетрудно обобщить на случай произвольных величин относительных скоростей, когда состояние системы характеризуется распределением (30). Другим классическим примером сильнонеравновесной среды может служить течение слабоионизированной плазмы в сильных электрических полях или течение газовой смеси в кнудсеновском слое вблизи поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ender A., Ender I., Bakaleinikov L., Flegontova E. Recurrence relations between kernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // Europ. J. Mech.– B/Fluids 36. 2012. pp. 17–24.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностр. Лит., 1960. 510 с.
3. Маркеев Б.М. Спектры колебаний слабоионизированной столкновительной плазмы. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 3. С. 78–81.
4. B. Schmidt, F. Seiler. M. Worner. Shock structure near a wall in pure inert gas and in inert gas mixtures. J. Fluid Mech. 1984. V. 143, pp. 305–326.
5. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 280 с.

REFERENCES

1. Ender A., Ender I., Bakaleinikov L., Flegontova E. Recurrence relations between kernels of the nonlinear Boltzmann collision integral // Europ. J. Mech.– B/Fluids 36. 2012. pp. 17–24.
2. Chepmen S., Kauling T. Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov [The mathematical theory of nonuniform gases]. M., Inostr. Lit., 1960. 510 p.
3. Markeev B.M. Spektry kolebanii slaboionizirovannoi stolknovitel'noi plazmy [Oscillation spectra slaboionizovannoi collisional plasma] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2013. no. 3. pp. 78–81.
4. B. Schmidt, F. Seiler. M. Worner. Shock structure near a wall in pure inert gas and in inert gas mixtures. J. Fluid Mech. 1984. Vol. 143. pp. 305–326.
5. Frank-Kamenetskii D.A. Lektsii po fizike plazmy [Lectures on plasma physics]. Dolgoprudny, Izdatel'skii dom «Intellekt», 2008. 280 p.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Маркеев Борис Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и методики преподавания информатики, Московский государственный областной университет, 105005, Москва, ул. Радио, 10А, Российская Федерация;
e-mail: markeevb@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Markeev Boris Mikhajlovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, of the Department of Computational Mathematics and Methodology of Teaching Informatics at the Moscow State Regional University;
e-mail: markeevb@gmail.com

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Маркеев Б. М. Кинетическая теория неоднородных и неравновесных газовых смесей // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 30–36.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-30-36.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

B. Markeev Kinetic theory and nonequilibrium inhomogeneous gas mixtures // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 30–36.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-30-36.