УДК533.6.011
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95

О МАКСИМУМЕ ЭФФЕКТА ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ*

Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В., Решетникова Ю.Г.
Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация

Аннотация. Доказаны две теоремы о максимуме относительной величины высокоскоростного «перехлёста» функции распределения пар молекул в однокомпонентном газе в бимодальной гиперзвуковой ударной волне. Метод распространён на аналитическое исследование ударной волны в бинарной смеси газов с внутренними степенями свободы.

Ключевые слова: кинетический, уравнение, неравновесный, смесь газов, ударная волна.

ON THE MAXIMUM EFFECT OF HIGH TRANSLATIONAL NONEQUILIBRIUM IN THE SHOCK WAVE

M. Kuznetsov, Y. Kuleshova, L. Smotrova, Y. Reshetnicova
Moscow State Regional University,
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russia

Abstract. Two theorems on the maximum of a relative high-velocity “overshoot” in the relative velocity distributions of pairs of particles in the one-component gas in bimodal hypersonic shock wave are proved. This method is extended to the analytical study of the shock wave in a mixture of two gases with internal degrees of freedom.

Keywords: kinetic, equation, nonequilibrium, gas mixture, shock wave.

1. Введение

Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в ударно сжатой смеси газов был установлен ранее в численных исследованиях структуры

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-07-00277_а

ударных волн методом статистического моделирования Монте-Карло. Этот эффект сводится к преобладанию числа N_{neq} высокоскоростных пар внутри фронта волны над числом N_{eq} в поступательно равновесной зоне за фронтом [1].

Ранее данный результат был получен аналитически в работе авторов [2].

При этом в работе [2] было также дополнительно установлено, что эффект имеет строгий максимум по величине N_{neq} / N_{eq}, зависящий от степени сжатия в сильной ударной волне.

В данной работе показано, что эффект «перехлёста» может быть рассмотрен также аналитически и в бинарной смеси газов.

2. Теоремы о необходимых и достаточных условиях эффекта «перехлеста» в эволюции функции распределения пар молекул однокомпонентного газа внутри фронта ударной волны

Воспользуемся аппроксимацией Тамма-Мотт-Смита для одночастичной функции распределения $F(b,c)$и функции распределения пар молекул $\tilde{G}(\bar{g},b)$, следуя работе [3]:

$$F(b,c) = \{(1-b)n_0F_0(c) + bn_1F_1(c)\}[(1-b)n_0 + bn_1]^{-1}. \quad (1)$$

Здесь F_0, F_1 – «холодное» и «горячее» распределения перед и за волной:

$$F_i(c) = \left(\frac{m}{2\pi kT_i}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m(c-u_i)^2}{2kT_i}\right], \quad (2)$$

m – масса молекулы; u_i, T_i, n_i – скорости, температуры и концентрации газового потока перед (i=0) и за (i=1) волной, k – постоянная Больцмана, $(c-u_i)$ – собственная скорость молекулы, коэффициент b задавался параметрически в интервале $0 \leq b \leq 1$ при прохождении газа через фронт ударной волны [3].

Величина относительной функции распределения $\tilde{G}(\bar{g},b)$ пар молекул имеет вид:

$$\tilde{G} = \left\lfloor (1-b)^2\varepsilon_0^2\tilde{G}_0 + b^2 + 2b(1-b)\varepsilon_0\tilde{G}_{01}\right\rfloor \cdot [\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)b]^{-2}, \quad (3)$$

где $\tilde{G} = \frac{G}{G_1}$, $\tilde{G}_0 = \frac{G_0}{G_1}$, $\tilde{G}_1 = 1$, $\tilde{G}_{01} = \frac{G_{01}}{G_1}$, G_0, G_1, G_{01} – соответственно «холодная» (перед волной), «горячая» (за волной) и «перекрёстная» моды распределений.

Распределения G_0 и G_1 являются максвелловскими функциями по относительным скоростям g:

$$G_i(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT_i}\right)^{\frac{3}{2}} g^2 \exp\left[-\frac{mg^2}{4kT_i}\right]. \quad (4)$$

Перекрёстная мода имеет вид [3]:

$$G_{01}(g) = \left[\frac{m}{2\pi k(T_0+T_1)}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{g}{u}\left\{\exp\left[-\frac{m(g-u)^2}{2k(T_0+T_1)}\right] - \exp\left[\frac{m(g+u)^2}{(T_0+T_1)}\right]\right\}. \quad (5)$$

Макроскопические параметры, входящие в соотношения (1)–(3), связаны законами сохранения потоков массы, импульса и энергии в сечениях $i = 0$ (перед волной) и $i = 1$ (за волной):

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + m_0(1-\varepsilon_0^2)$$

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{u_1}{u_0} = \varepsilon_0 = \varepsilon(1 + m_0^{-1})$$

$$u = u_0 - u_1 = u_0(1-\varepsilon_0).$$

Здесь $m_0 = \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}M_0^2$, $\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, γ – отношение удельных теплоёмкостей при постоянном давлении c_p и объёме c_v, $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = (1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}$, M_0 – число Маха перед волной, $M_0 = \frac{u_0}{a_0}$, a_0 – скорость звука перед волной, $a_0 = \sqrt{\frac{\gamma k T_0}{m}}$.

Выражение (3) позволяет сформулировать следующие теоремы о «перехлёсте» сверхскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне [4].

Теорема 1. Для сверхскоростного превышения («перехлеста», $\tilde{G}_{max} > 1$) величины поступательно неравновесной функции распределения пар молекул внутри фронта ударной волны над соответствующей равновесной величиной за волной *необходимо, чтобы величина перекрёстной моды* $\tilde{G}_{01}$ *удовлетворяла соотношению*

$$2\tilde{G}_{01} > 1 + \tilde{G}_0 \quad (6)$$

и достаточно, чтобы величина этой моды была больше единицы

$$\tilde{G}_{01} > 1 \quad (7)$$

Теорема 2. Величина сверхскоростного превышения ($\tilde{G}_{max} > 1$) в бимодальном однокомпонентном газе при выполнении соотношения (4) достигает своего максимального значения

$$\tilde{G} = \tilde{G}_{max} = \frac{\tilde{G}_{01}^2 - \tilde{G}_0}{\left(2\tilde{G}_{01} - 1 - \tilde{G}_0\right)}. \quad (8)$$

Доказательство теорем 1–2: перейдём к переменной:

$$\chi = \frac{(1-b)\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)b}, \quad (9)$$

причём $0 \leq \chi \leq 1$ при$0 \leq b \leq 1$

Одночастичная функция распределения по собственным «тепловым» скоростям молекул (1) и функция распределения пар молекул по их относительным скоростям (3), записанные через переменную (9), примут соответственно вид:

$$F(\chi,\text{c}) = \chi F_0(c) + (1-\chi)F_1(c), \tag{10}$$

$$\tilde{G} = \chi^2 \tilde{G}_0 + 2\chi(1-\chi)\tilde{G}_{01} + (1-\chi)^2 \tag{11}$$

Тогда на основании соотношений (10)–(11) для функции $\tilde{G}$ можно записать:

$$\left(\tilde{G}-1\right) + \chi\left(1-\tilde{G}_0\right) = (\chi-\chi^2)\left(2\tilde{G}_{01}-1-\tilde{G}_0\right), \tag{12}$$

или

$$\left(\tilde{G}-1\right) = \chi\left(2\tilde{G}_{01}-1-\tilde{G}_0\right)(\chi_b-\chi), \tag{13}$$

где $0 \leq \chi \leq 1$,

$$\chi_b = 2\left(\tilde{G}_{01}-1\right)\left(2\tilde{G}_{01}-1-\tilde{G}_0\right)^{-1}. \tag{14}$$

В итоге при $\left(\tilde{G}_1-1\right) > 0$ из соотношений (12)–(13) следует выполнение необходимого неравенства $\left(2\tilde{G}_{01}-1-\tilde{G}_0\right) > 0$, поскольку функция $\tilde{G}_0$ всегда меньше 1 и $0 \leq \chi \leq 1$.

И, наоборот, неравенство $\left(\tilde{G}-1\right) > 0$ следует из соотношений (13)–(14) при выполнении достаточного условия теоремы 1.

Максимальное значение величины $\left(\tilde{G}-1\right)_{max}$ достигается при $\chi = \frac{\chi_b}{2}$ так как при этом значении величины χ на основании соотношений (13) и (14) выполняются обычные условия максимума функции одной переменной $\tilde{G} = \tilde{G}(\chi)$:

$$\left.\frac{d\tilde{G}}{d\chi}\right|_{\frac{\chi_b}{2}} = 0,\ \left.\frac{d^2\tilde{G}}{d\chi^2}\right|_{\frac{\chi_b}{2}} = -2\left(2\tilde{G}_{01}-1-\tilde{G}_0\right) < 0.$$

Для представления о том, как выполняется неравенство (7), рассмотрим асимптотический гиперзвуковой предельный переход функции распределения пар молекул (3):

$$M_0 >> 1, \quad (M_0 \to \infty)$$

$$m_0 \equiv \frac{\gamma-1}{2}M_0^2 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}M_0^2 >> 1, \quad (m_0 \to \infty).$$

Физически этот предельный переход соответствует случаю бесконечно сильной гиперзвуковой ударной волны, когда $M_0 \to \infty$, $\frac{T_0}{T_1} \to 0$.

В результате для выражений, входящих в формулы (2)–(3), получим:

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{u_1}{u_0} \to \varepsilon,$$

$$u \to u_0(1-\varepsilon),$$

$$\tilde{G}_0 \to m_0^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma M_0^2}{4} g^{-2}\right),$$

$$\tilde{G}_{01} \to \sqrt{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\bar{g}^{-1}\left\{1 - exp\left[\frac{-2g}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]\right\} exp\left[\frac{2-(\bar{g}-2)^2}{4\varepsilon(1-\varepsilon)}\right].$$

Применение асимптотического гиперзвукового предельного перехода позволяет получить простое аналитическое выражение для величины высокоскоростного «перехлеста» функции пар молекул [2]:

$$\bar{G}_{*,max} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}}, \qquad (15)$$

где $\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho_1}$, ε^{-1} – степень сжатия в волне [5].

Из формулы (15) следует, что в однокомпонентном (простом) газе эффект высокоскоростной поступательной неравновесности $(\tilde{G} > 1)$ сильно зависит от числа внутренних степеней свободы молекул, непосредственно влияющего на величину сжатия в ударной волне ε^{-1}.

3. Необходимые и достаточные условия эффекта высокоскоростного перехлёста в бинарной смеси газов

Теоремы 1–2 допускают обобщение на случай бинарной смеси газов с различными, в общем случае, концентрациями n_γ и массами m_γ молекул ($\gamma = \alpha, \beta$).

В этом случае бимодальное распределение, записанное для каждого сорта молекул ($\gamma = \alpha, \beta$), можно представить в следующем виде:

$$F^{(\gamma)} = \chi^{(\gamma)} F_0^{(\gamma)} + \left(1 - \chi^{(\gamma)}\right) F_1^{(\gamma)}, \qquad (16)$$

где

$$\chi^{(\gamma)} = \frac{n_0^\gamma}{n_0^\gamma + n_1^\gamma},$$

причём концентрации n_0^γ, n_1^γ являются, как и в простом газе (α=β), функциями переменной x, то есть меняются по ширине ударной волны.

В смеси газов весовые множители $F_0^{(\gamma)}$, $F_1^{(\gamma)}$, входящие в (16), в отличие от их аналогов в простом газе, являются в общем случае функциями переменной x [6]. Это и представляет главную сложность при выводе необходимых и достаточных условий высокоскоростной поступательной неравновесности в смеси газов [7]. Функции распределения пар молекул $G^{(\alpha,\beta)}$, обобщающие соответствующие функции для (10)–(11) простого газа, примут вид:

$$G^{(\alpha,\beta)} = \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_0^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}\left(1-\chi^{(\beta)}\right)G_{01}^{(\alpha,\beta)} + \left(1-\chi^{(\alpha)}\right)\chi^{(\beta)}G_{10}^{(\alpha,\beta)} + \\ + \left(1-\chi^{(\alpha)}\right)\left(1-\chi^{(\beta)}\right)G_1^{(\alpha,\beta)} \quad (17)$$

Раскроем скобки в соотношении (17):

$$G^{(\alpha,\beta)} = \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_0^{(\alpha,\beta)} + (\chi^{(\alpha)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})G_{01}^{(\alpha,\beta)} + (\chi^{(\beta)} - \chi^{(\beta)}\chi^{(\alpha)})G_{10}^{(\alpha,\beta)} + \\ G_1^{(\alpha,\beta)} - \chi^{(\beta)}G_1^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}G_1^{(\alpha,\beta)} + \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}G_1^{(\alpha,\beta)} \quad (18)$$

Необходимые условия высокоскоростного перехлёста $\left(\tilde{G} > 1\right)$.

Преобразуем соотношение (18), стремясь выделить множитель:

$$\left(\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}\right)G_{ij}, \quad (19)$$

где каждый индекс i, j принимает попеременно значения 0 и 1. Получим:

$$\left(G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}\right) + \chi^{(\beta)}\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\right) + \chi^{(\alpha)}\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\right) = (\chi^{(\alpha)} + \\ + \chi^{(\beta)} - \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) \quad (20)$$

Покажем, что выделенный множитель (19) в правой части равенства (20) всегда будет положительно определённым.

С этой целью воспользуемся известным неравенством:

$$\frac{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}{2} \geq \sqrt{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}, \quad (21)$$

выражающим тот факт, что среднее арифметическое больше среднего геометрического при $\chi^{(\alpha)} \neq \chi^{(\beta)}$(смесь) или равно при $\chi^{(\alpha)} = \chi^{(\beta)}$ (простой газ) [8]. Таким образом:

$$\frac{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}{2} \geq \frac{2\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{4} \geq \frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{(\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)})^2}.$$

Тогда

$$\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}-\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}=\left(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}\right)\left(1-\frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}}\right)=$$
$$=\left(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}\right)\left(1-\frac{\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}}{\left(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}\right)^2}\left(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}\right)\right)\geq$$
$$\geq\left(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}\right)\left(1-\frac{1}{4}\left(\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}\right)\right)>0,$$

что и требовалось доказать.

Для получения искомых необходимых условий осталось проанализировать знаки выражений, стоящих в скобках левой и правой части равенства (20).

Положительность первой скобки в левой части равенства (20) является заданной при поиске необходимых условий. Положительность второй и третьей скобок всегда выполняется в простом газе, а в смеси газов следует из того, что эффективные температуры [9]:

$$T_{01}^{э}=\frac{m_\alpha T_0^\beta+m_\beta T_1^\alpha}{m_\alpha+m_\beta}, \tag{22}$$

$$T_{10}^{э}=\frac{m_\alpha T_1^\beta+m_\beta T_0^\alpha}{m_\alpha+m_\beta}, \tag{23}$$

от которых зависят, соответственно, перекрёстные моды $G_{01}^{(\alpha,\beta)}, G_{10}^{(\alpha,\beta)}$ [2], больше эффективной температуры:

$$T_{0}^{э}=\frac{m_\alpha T_0^\beta+m_\beta T_0^\alpha}{m_\alpha+m_\beta}, \tag{24}$$

от которой зависит мода $G_0^{(\alpha,\beta)}$ в холодном крыле функции распределения пар молекул $G^{(\alpha,\beta)}$.

С учётом положительности выражения (19) получим в итоге искомые необходимые условия эффекта перехлеста из правой части соотношения (20):

$$\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}-G_{1}^{(\alpha,\beta)}-G_{0}^{(\alpha,\beta)}\right)>0. \tag{25}$$

В случае простого газа, когда:

$$G_{01}^{(\alpha,\beta)}+G_{10}^{(\alpha,\beta)}=2G_{01}=2G_{10}\,,$$
$$G_{1}^{(\alpha,\beta)}=G_1$$
$$G_{0}^{(\alpha,\beta)}=G_0$$

из выражения (25) будет следовать установленное ранее необходимое условие эффекта перехлёста (6).

Достаточные условия высокоскоростного перехлёста $\left(\tilde{G} > 1\right)$

Введём в соотношения (17) переменные:

$$\chi = \chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}, \tag{26}$$

$$\eta^{(\alpha)} = \frac{\chi^{(\alpha)}}{\chi^{(\alpha)} + \chi^{(\beta)}}. \tag{27}$$

Для случая простого газа переменная (26) будет совпадать с переменной (9), а переменная (27) становится числом, равным 1.

Тогда:

$$(G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (1 - \eta^{(\alpha)})\chi(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) + \eta^{(\alpha)}(G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})\chi =$$
$$= (\chi - \eta^{(\alpha)}\big(1 - \eta^{(\alpha)}\big)\chi^2 \left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\right). \tag{28}$$

Отсюда:

$$(G^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) = \chi\Big[\big(1 - \eta^{(\alpha)}\big(1 - \eta^{(\alpha)}\big)\chi\big)\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} -$$
$$-G_0^{(\alpha,\beta)}\Big) - \big(1 - \eta^{(\alpha)}\big)\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big) - \eta^{(\alpha)}\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big)\Big] \tag{29}$$

Введём функцию $\chi^{(b)}$, определяемую из соотношения:

$$\big[1 - \eta^{(\alpha)}\big(1 - \eta^{(\alpha)}\big)\chi^{(b)}\big]\Big(\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big)$$
$$- \big(1 - \eta^{(\alpha)}\big)\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big) - \eta^{(\alpha)}(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)})\Big) = 0. \tag{30}$$

Заметим, что при этом значении переменной χ эффект перехлёста обращается в нуль внутри ударной волны. При этом из формулы (30) следует, что:

$$\chi^{(b)} =$$
$$= \frac{\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big) - \big(1 - \eta^{(\alpha)}\big)\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big) - \eta^{(\alpha)}\Big(G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big)}{\eta^{(\alpha)}(1 - \eta^{(\alpha)})\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big)}. \tag{31}$$

Сумму в знаменателе выражения (31) $\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big)$ представим в следующем виде:

$$\Big(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}\Big) = (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) + (G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) +$$
$$+(G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}). \tag{32}$$

В правой части равенства (32) все три скобки будут больше нуля, если потребовать выполнение следующих неравенств:

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) > 0, \tag{33}$$

$$(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_1^{(\alpha,\beta)}) > 0, \tag{34}$$

$$(G_1^{(\alpha,\beta)} - G_0^{(\alpha,\beta)}) > 0. \tag{35}$$

Поэтому положительно определённой будет и левая часть выражения (32), то есть:

$$\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)} - G_{0}^{(\alpha,\beta)}\right) > 0. \qquad (36)$$

Выделим полный квадрат в выражении (29).

Тогда получим:

$$G^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)} = \eta^{(\alpha)}\left(1-\eta^{(\alpha)}\right)\left(G_{01}^{(\alpha,\beta)} + G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)} - G_{0}^{(\alpha,\beta)}\right)\chi \cdot$$
$$\left\{-\chi + \frac{\eta^{(\alpha)}(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)}) + \left(1-\eta^{(\alpha)}\right)(G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)})}{\eta^{(\alpha)}\left(1-\eta^{(\alpha)}\right)(G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)}) + (G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)}) + (G_{1}^{(\alpha,\beta)} - G_{0}^{(\alpha,\beta)})}\right\} \qquad (37)$$

Введём следующие обозначения:

$$G_{01}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)} \equiv g_{01}^{(\alpha,\beta)},$$
$$G_{10}^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)} \equiv g_{10}^{(\alpha,\beta)},$$
$$G_{1}^{(\alpha,\beta)} - G_{0}^{(\alpha,\beta)} \equiv g_{1}^{(\alpha,\beta)},$$

тогда выражение (37) примет следующий вид:

$$G^{(\alpha,\beta)} - G_{1}^{(\alpha,\beta)} = \eta^{(\alpha)}\left(1-\eta^{(\alpha)}\right)(g_{01}^{(\alpha,\beta)} + g_{10}^{(\alpha,\beta)} + g_{1}^{(\alpha,\beta)})\chi \cdot \left\{-\chi + \right.$$
$$\left. + \frac{\eta^{(\alpha)} g_{01}^{(\alpha,\beta)} + \left(1-\eta^{(\alpha)}\right) g_{10}^{(\alpha,\beta)}}{\eta^{(\alpha)}\left(1-\eta^{(\alpha)}\right)(g_{01}^{(\alpha,\beta)} + g_{10}^{(\alpha,\beta)} + g_{1}^{(\alpha,\beta)})}\right\}. \qquad (38)$$

Положительность первых двух и четвёртого сомножителей в правой части равенства (38) следует из диапазона их изменения:

$$0 < \eta^{(\alpha)} < 1\ ,\ \ 0 < \left(1-\eta^{(\alpha)}\right) < 1, 0 \leq \chi \leq \chi^{(b)}.$$

Третий сомножитель совпадает с правой частью выражения (32) и, ввиду изложенного выше, так же положителен.

Таким образом, для положительности правой части выражения (38) достаточно потребовать выполнение неравенств (33)–(35).

Неравенства (33)–(35) и являются искомыми достаточными условиями эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л. Поступательная релаксация в ударных волнах // Черноголовка: Препринт ОИХФ АН СССР, 1991. 68 с.
2. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д, Смотрова Л.В. Эффект высокоскоростной поступательной неравновесности в бимодальной ударной волне. Вестник Московского государственного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 2. С. 108–115.

3. Куликов С.В., Терновая О.Н., Черешнев С.Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. 1993. Т. 12, № 3. С. 340–342.
4. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В. Эффект поступательной неравновесности в Тамм-Мотт-Смитовской модели ударной волны. // Вестник СПбГУ сер. 1, 2012. Вып. 3. С. 84–86.
5. Агафонов В.П., Вертушкин В.К., Гладков А.А., Полянский О.Ю. Неравновесные физико-химические процессы в газодинамике. М.: Машиностроение. 1972. 344с.
6. Oberai M.M. A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in binary mixture // Phys Fluids. 1966. Vol. 9. pp. 1634–1637.
7. Кузнецов М. М., Матвеев С. В., Молоствин Е. В., Решетникова Ю. Г., Смотрова Л.В. Высокоскоростная поступательная неравновесность смеси газов в аналитической модели ударной волны [Электронный ресурс] // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17, вып. 1. URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/
8. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства / Пер. с англ. Под ред. В.И. Левина. М.: Мир. 1965. 276 с.
9. Башлыков А.М., Великодный В.Ю. Структура ударных волн в газовой смеси // Журнал технической физики. 1991. Т. 61. № 8. С. 33–42.

REFERENCES

1. Postupatel'naya relaksatsiya v udarnykh volnakh [Progressive relaxation in shock waves]. Genich A.P., Kulikov S.V., Manelis G.B., Chereshnev S.L., Preprint OIKHF AN SSSR, 1991. 68 p.
2. Kuznetsov M.M., Kuleshova YU.D., Smotrova L.V. Effekt vysokoskorostnoi postupatel'noi neravnovesnosti v bimodal'noi udarnoi volne [Effect of high-speed translational nonequilibrium in bimodal shock wave] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika. 2012. no. 2. pp. 108–115.
3. Kulikov S.V., Ternovaya O.N., Chereshnev S.L. Spetsifika postupatel'noi neravnovesnosti vo fronte udarnoi volny v odnokomponentnom gaze [The specificity of translational nonequilibrium in the shock wave front in a single-component gas] // Khimicheskaya fizika. Vol. 12. 1993. no. 3. pp. 340–342.
4. Kuznetsov M.M., Kuleshova YU.D., Smotrova L.V. Effekt postupatel'noi neravnovesnosti v Tamm-Mott-Smitovskoi modeli udarnoi volny. [The effect of translational nonequilibrium in the Tamm-Mott-Shmitovskii shock wave model.] // Vestnik SPbGU ser. 1. 2012. no. 3. pp. 84–86.
5. Neravnovesnye fiziko-khimicheskie protsessy v gazodinamike [Nonequilibrium physico-

chemical processes in gas dynamics]. Agafonov V.P., Vertushkin V.K., Gladkov A.A., Polyanskii O.YU. M., Mashinostroenie, 1972. 344 p.
6. Oberai M.M. A Mott-Smith distribution to describe the structure of a plane shock wave in binary mixture // Phys Fluids. 1966. Vol. 9. pp. 1634–1637.
7. Kuznetsov M. M., Matveev S. V., Molostvin E. V., Reshetnikova YU. G., Smotrova L.V. Vysokoskorostnaya postupatel'naya neravnovesnost' smesi gazov v analiticheskoi modeli udarnoi volny [Elektronnyi resurs] [High-speed translational nonequilibrium of gas mixture in the analytical shock wave model [E-source]] // Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoi dinamike. 2016. T. 17, vyp. 1. [Physico-chemical kinetics in gas dynamics. 2016. Vol. 17, issue. 1.]. URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-1/articles/613/
8. Bekkenbakh E., Bellman R. Neravenstva [Inequality] / Transl. from English. Ed. by V.I. Levin. M., Mir, 1965. 276 p.
9. Bashlykov A.M., Velikodnyi V.YU. Struktura udarnykh voln v gazovoi smesi [Structure of shock waves in the gas mixture] // Zhurnal tekhnicheskoi fiziki. Vol. 61. 1991. no. 8. pp. 33–42.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузнецов Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Кулешова Юлия Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Смотрова Лилия Владимировна – аспирант кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: lilysmotrova@mail.ru

Решетникова Юлия Геннадьевна – аспирант кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет;
e-mail: gau1972@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTORS

Kuznetsov Mihail Mihailovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Theoretical Physics at the Moscow State Regional University;
e-mail: kuznets-omn@yandex.ru

Kuleshova Yuliya Dmitrievna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of the Higher algebra, Elementary Mathematics and Technique of Teaching of Mathematics, Moscow State Regional University;
e-mail: juliaybogdanova@mail.ru

Smotrova Liliya Vladimirivna – postgraduate student, Moscow State Regional University;
e-mail: lilysmotrova@mail.ru

Reshetnicova Yuliya Gennadevna – postgraduate student, Moscow State Regional University;
e-mail: gau1972@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В., Решетникова Ю.Г. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика- математика. 2016. №3. С. 84–95.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

M. Kuznetsov, Y. Kuleshova, L. Smotrova, Y. Reshetnicova On the maximum effect of high translational nonequilibrium in the shock wave // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no 3. pp. 84–95.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-84-95.