

УДК.533.72.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-111-119

## ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ГАЗОПОДОБНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБЛАКЕ

*Зудина М.Н., Кухаренко А.П.*

*Московский государственный областной университет  
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

**Аннотация.** Рассмотрена эволюция нестационарного широкого газоподобного облака в полупространстве. Теоретически найдены выражения компонент вихря для этого облака. Дан анализ и графическое представление полученных формул.

**Ключевые слова:** кинетика, вихревые движения, газоподобная среда.

## VORTEX MOTIONS IN A NONSTATIONARY SEMI-INFINITE GAS-LIKED CLOUD

*M. Zudina, A. Kukhareenko*

*Moscow State Regional University,  
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russia*

**Abstract.** The evolution of the nonstationary wide gas-like cloud, expanded into a half-space, is analyzed. The expressions for vortex components of this cloud are found theoretically. The analysis and graphical presentation of the obtained formulae are performed.

**Key-words:** kinetics, vortex motion, gas-liked medium

### 1. Введение

Целью данной работы является теоретическое описание вихревых движений, возникающих в полугораниченном газоподобном нестационарном облаке, состоящем из большого числа частиц  $N$ , исходя из микроскопической статистической теории. В целом, явления полугораниченного расширения такого облака наблюдаются, например, при испарении, возгонке или быстром

диспергировании слоёв конденсированного вещества, нанесённых на непроницаемую подложку. Такие явления широко распространены в природе, а также происходят в некоторых технологических процессах. Актуальность исследования определяется его практическими приложениями в физике газодисперсных систем, в статистической газодинамике, а также теоретическим интересом. Эволюция облаков, образованных дисперсными частицами, теоретически мало исследована. Теоретическое рассмотрение вихревых течений в газах обычно исходит из уравнений динамики сплошной среды, не углубляясь в её молекулярную структуру. Поэтому остаётся актуальным исследование таких движений на основе микроскопической теории. Предлагаемая ниже модель применима как к облакам атомарно-молекулярного состава, так и к системам более крупных дисперсных частиц.

## 2. Рассматриваемая модель

В отличие от ранее решённых задач [1–4] используются формулы для плотности и плотности потока среды, найденные для случая полуограниченного газоподобного облака в [5–7]. Как и в указанных работах, рассматривается нестационарная газоподобная система частиц, образованная весьма быстрым разрушением плоского слоя конденсированного вещества массой  $M$  и толщиной  $L$  в вакууме, причём подложка (далее – стенка) сохраняется и является непроницаемой. Площадь слоя  $S$  считается столь большой, что для характерных интегралов Пуассона в его плоскости  $XY$  пределы можно принять бесконечными с хорошим приближением. Слой объёмом  $V_0=LS$  принят однородным, его объёмная плотность  $\rho_0$  – константа. Пусть в момент  $t = 0$  происходит весьма быстрое разрушение слоя вследствие некоторого воздействия, и вещество превращается в расширяющееся газоподобное облако, которое может состоять как из молекулярных, так и из более крупных дисперсных частиц. Считаем образовавшиеся частицы массы  $m$  однородными и бесструктурными. Поскольку межчастичные силы – короткодействующие, а с расширением облака быстро уменьшается его плотность, полагаем в дальнейшей эволюции частицы не взаимодействующими иначе, как через упругие столкновения, как в модели идеального газа. Внешние поля отсутствуют, но облако не является изолированным, так как находится в контакте со стенкой. Столкновения частиц

со стенкой считаем упругими. Данная модель отличается от рассмотренных в [1–4] именно полуограниченностью, то есть распространением облака в полуобъём.

### 3. Случай с начальной скоростью облака ортогональной стенке

Ранее для задачи полуограниченного расширения была получена формула плотности облака, которая имеет вид[5]:

$$\rho = \frac{2mNB^{3/2} \exp\{-B[x^2 + y^2 + (z - Q)^2]\}}{\pi^{3/2}[1 + \operatorname{erf}(Q\sqrt{B})]}, \quad (1)$$

где:  $x, y, z$  – координаты точки в физическом пространстве, причём  $z$  – ортогональна плоскости стенки XY,  $\operatorname{erf}(Q\sqrt{B})$  – интеграл вероятности,

$$B = \frac{bw}{u}; \quad u = 1 + \frac{ct}{am} + \frac{bt^2}{am^2}; \quad w = 1 - \frac{c^2}{4ab},$$

$Q = \frac{p_3 \cdot t}{m}$  – координата сдвига максимума;  $p_3 = mv_0$ ,  $v_0$  – начальная массовая скорость слоя в момент его отрыва от стенки, ортогональная к стенке;  $a, b$  и  $c$  – масштабные константы, введенные из соображений размерности и определяемые из дополнительных условий.

Формула (1) отлична от формул, полученных ранее для неограниченного двустороннего расширения облака наличием интеграла вероятности в знаменателе.

Проекции плотности потока массы, найденные при решении предыдущей задачи, имеют вид:

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{k_3 x \rho}{2aum} \\ j_y &= -\frac{k_3 y \rho}{2aum} \\ j_z &= -\frac{(k_2 + k_3 z) \rho}{2aum}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$k_2 = -2p_3 a - \frac{cp_3 t}{m}, \quad k_3 = -\frac{2bt}{m} - c.$$

Найдём компоненты вектора вихря плотности потока массы для выбранной модели. Отметим, что этот вектор не только не тождественен, но, вообще, даже не пропорционален обычно рассматриваемому в динамике сплошных сред вихрю скорости. Такая пропорциональность имеет место лишь в частном случае движения несжимаемой среды без учёта неконвективного движения.

Компоненты вектора вихря выражаются через частные производные от проекций исходного вектора. Находя частные производные по координатам от (2), получим проекции вихря плотности потока вещества:

$$R_x = - \frac{4v_0 y m N B^{(5/2)} \exp[-B(x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2)]}{(1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B})) \pi^{(3/2)}}, \quad (3)$$

$$R_y = \frac{4v_0 x m N B^{(5/2)} \exp[-B(x^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2)]}{(1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B})) \pi^{(3/2)}}, \quad (4)$$

$$R_z = 0, \quad (5)$$

где  $v_0$  – начальная массовая скорость облака, принятая ортогональной стенке.

Заметим, что для неограниченного двустороннего расширения облака все компоненты вихря равны нулю. Искомый вихрь определяется совокупностью всех 3-х компонент (3–5) и лежит в плоскости, ортогональной OZ. Его проекции пропорциональны плотности вещества, кроме того имеют дополнительную зависимость от координат перед экспонентой. Вектор вихря:

$$\mathbf{rot} \mathbf{j} = \mathbf{e}_x \cdot R_x + \mathbf{e}_y \cdot R_y.$$

Так как найденные величины (3) и (4) есть функции времени, то для данной модели теория описывает возникновение, развитие и затухание вихревых движений среды в ходе эволюции системы. Физической причиной эволюции вихрей является перераспределение импульса и массы среды вследствие одновременно присутствующих хаотического и направленного движения её частиц (молекул или мелкодисперсных частиц), а также характерного для данной задачи влияния стенки.

#### 4. Случай с дополнительной начальной скоростью, параллельной стенке

Рассмотрим более сложный случай, когда облако, помимо начальной массовой скорости, направленной ортогонально стенке, обладает также начальной массовой скоростью  $V$ , параллельной стенке и направленной по оси OX. Этот случай может соответствовать наличию бокового «ветра» вдоль OX. В таком случае  $z$ -компонента вихря плотности потока среды не равна нулю:

$$R_z = - \frac{4y N B^{(5/2)} \exp[-B((x - Vt)^2 + y^2 + (z - v_0 t)^2)](amu + k_3 t)V}{\pi^{(3/2)} au (1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B}))}, \quad (6)$$

где  $v_0$  – как и ранее, начальная скорость облака, ортогональная стенке. Таким образом, боковой «ветер» приводит для полуограниченного облака к появлению

компоненты вихря, ортогональной плоскости стенки, и возникающей вследствие влияния стенки на движение среды. Выражение (6) меняет знак на линии  $y=0$ , так что в полуплоскостях  $y>0$  и  $y<0$  имеем пару противоположно ориентированных вихрей.

Формула аналогичная (6) получается также для случая, когда по оси  $Z$  нет начальной скорости, но на все частицы действует однородное внешнее поле. В этом случае  $v_0 t$  заменяется на  $ft^2/2m$ :

$$R_z = - \frac{4yNB^{(5/2)} \exp \left[ -B \left( (x - Vt)^2 + y^2 + \left( z - \frac{ft^2}{2m} \right)^2 \right) \right] mV}{\pi^{(3/2)} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{ft^2 \sqrt{B}}{2m} \right) \right] \left( 1 + \operatorname{erf}(v_0 t \sqrt{B}) \right)}, \quad (7)$$

В обоих случаях эффект появления  $z$ -компоненты вихря возникает только при наличии непроницаемой стенки.

### 5. Графическое представление полученных результатов

Для нахождения рельефа  $z$ -проекции вихря над плоскостью  $XY$  для случая с дополнительной начальной скоростью, параллельной стенке, в полученной ранее формуле (6) примем  $z=1$ . Будем рассматривать зависимость  $R_z$ , от переменных  $x$  и  $y$  в последовательные моменты времени. Аналогично построены рельефы вихря над двумя другими плоскостями (рис. 1–3).

Для построения графиков принята удобная система единиц  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ , в соответствии с ней определялись масштабы и размерности других величин. Значения координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , равные 1, мы выбираем, исходя из удобства сравнения полученных графиков, а также чтобы исключить случай аннулирования рельефов и случай весьма малых значений амплитуд при больших координатах. Время выбираем, исходя из соображений удобства масштабирования.

Для всех трёх рассмотренных случаев очевиден сдвиг максимума по оси  $x$ , а также уменьшение амплитуды вихря для случаев а) и б). Из рис. 1в, 2в, 3в видно, что в процессе эволюции  $z$ -проекция вихря меняет знак. Это происходит за счёт изменения знака множителя, содержащего  $k_3$ . Сначала вихрь обнуляется, а потом меняет свое направление, соответственно бугры и ямы в полуплоскостях меняются местами. Следует отметить, что сдвиг максимума происходит только по оси  $x$ . По оси  $y$  такого сдвига нет ввиду отсутствия скорости по этой оси.

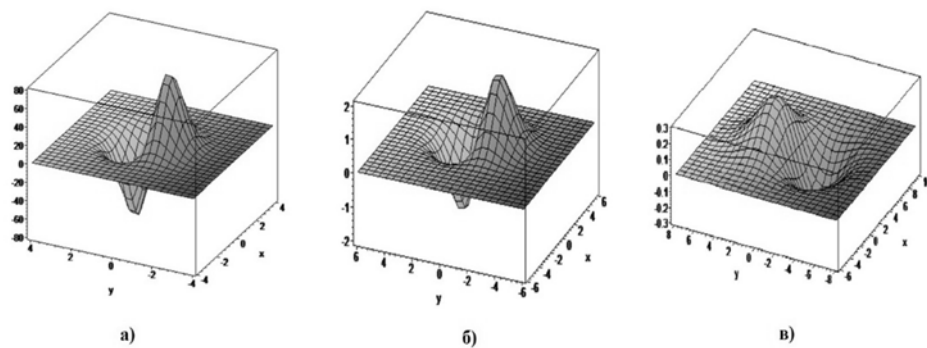


Рис. 1. Рельеф вихря над плоскостью XY при а)  $z=1, t=0$ ; б)  $z=1, t=4/5$ ; в)  $z=1, t=2$ .

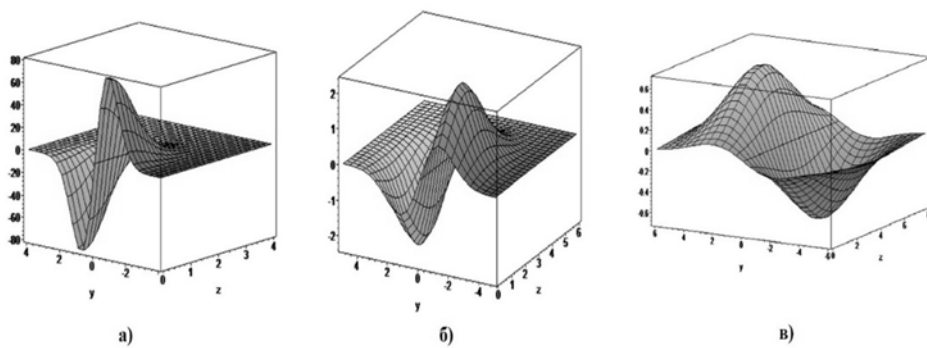


Рис. 2. Рельеф вихря над плоскостью YZ при а)  $x=1, t=0$ ; б)  $x=1, t=4/5$ ; в)  $x=1, t=2$ .

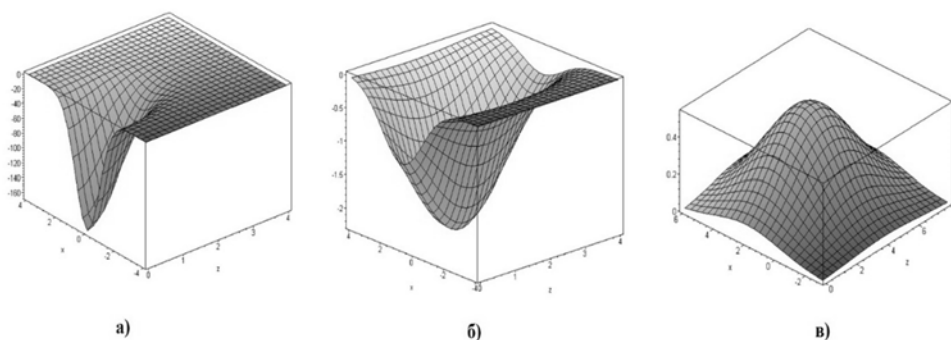


Рис. 3. Рельеф вихря над плоскостью XZ при а)  $y=1, t=0$ ; б)  $y=1, t=4/5$ ; в)  $y=1, t=2$ .

## 6. Заключение

В отличие от ранее решённых задач, в данном случае были использованы формулы для плотности и плотности потока массы, найденные для случая полуограниченного газоподобного облака в [5; 6].

Показано, что в случае, когда облако имеет начальную массовую скорость ортогональную к пластине (или находится во внешнем поле, ортогональном к пластине), вихрь плотности потока среды для принятой модели имеет только компоненты параллельные плоскости пластины. В случае же, когда облако имеет также начальную массовую скорость параллельную плоскости пластины, возникает компонента вихря плотности потока среды, ортогональная плоскости пластины. Получена строгая аналитическая формула для этой компоненты.

Если расширение по оси  $z$  идет без начальной массовой скорости, но в силовом поле, то, при наличии ветра по оси  $x$ , так же будет возникать третья ( $z$ -я) компонента вихря, которая отсутствует для случая без бокового ветра.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Голов А.Н., Зудина М.Н. Кинетика вихревых движений газоподобной среды в постоянном потенциальном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 1. С. 39–43.
2. Голов А.Н., Зудина М.Н. Вихревые движения газоподобного облака с начальной скоростью в однородном постоянном поле // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2012. № 3. С. 50–55.
3. Голов А.Н., Зудина М.В., Перов А.А., Шутов А.И. Кинетическая теория вихревых движений газоподобного облака, движущегося в потенциальном поле с начальной скоростью, ортогональной полю // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2013. № 2. С. 11–16.
4. Голов А.Н., Зудина М.Н. Статистическая теория вихревых движений в нестационарных газоподобных системах // Реферативный журнал Всероссийского института научной и технической информации. 2014. С. 26.
5. Голов А.Н. Эволюция полуограниченного нестационарного плоского газоподобного облака // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2014. № 2. С. 69–78.
6. Голов А.Н., Филиппова А.П. Получение и исследование формулы плотности потока вещества в нестационарном полуограниченном газоподобном облаке // Вестник

Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2015. № 2. С. 107–119.

7. Голов А.Н., Кухаренко А.П. Кинетика эволюции полуограниченного газоподобного облака // Естественные и технические науки. 2015. № 11. С. 60–70.

## REFERENCES

1. Golov A.N., Zudina M.N. Kinetika vikhrevykh dvizhenii gazopodobnoi sredy v postoyannom potentsial'nom pole [Kinetics of vortex motions of the gas environment in a constant potential field] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2012. no. 1. pp. 39–43.
2. Golov A.N., Zudina M.N. Vkhrevnye dvizheniya gazopodobnogo oblaka s nachal'noi skorost'yu v odnorodnom postoyannom pole [Vortex motion of gas clouds with an initial velocity in a homogeneous constant field] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2012. no. 3. pp. 50–55.
3. Golov A.N., Zudina M.V., Perov A.A., Shutov A.I. Kineticheskaya teoriya vikhrevykh dvizhenii gazopodobnogo oblaka, dvizhushchegosya v potentsial'nom pole s nachal'noi skorost'yu, ortogonal'noi polyu [Kinetic theory of vortex motions of the gas clouds moving in a potential field with an initial velocity orthogonal to the field] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2013. no. 2. pp. 11–16.
4. Golov A.N., Zudina M.N. Statisticheskaya teoriya vikhrevykh dvizhenii v nestatsionarnykh gazopodobnykh sistemakh [Statistical theory of vortex motions in non-stationary gas engines] // Referativnyi zhurnal Vserossiiskogo instituta nauchnoi i tekhnicheskoi informatsii [Abstract journal of all-Russian Institute of scientific and technical information]. 2014. P. 26.
5. Golov A.N. Evolyutsiya poluogranichennogo nestatsionarnogo ploskogo gazopodobnogo oblaka [Evolution of non-stationary semi-infinite flat gas cloud] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2014. no. 2. pp. 69–78.
6. Golov A.N., Filippova A.P. Poluchenie i issledovanie formuly plotnosti potoka veshchestva v nestatsionarnom poluogranichennom gazopodobnom oblake [Obtaining and study of the formula of the flux density of substances in non-stationary bounded gas cloud] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika. 2015. no. 2. pp. 107–119.
7. Golov A.N., Kukharenko A.P. Kinetika evolyutsii poluogranichennogo gazopodobnogo oblaka [The kinetics of the evolution of semi-infinite gas cloud] // Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2015. no. 11. pp. 60–70.



**ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ**

*Зудина Марина Николаевна* – аспирант, Московский государственный областной университет;  
e-mail: marishkazudina@yandex.ru

*Кухаренко Александра Петровна* – аспирант, Московский государственный областной университет;  
e-mail: a.renard04@yandex.ru

**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

*Zudina Marina Nikolaevna* – postgraduate student, Moscow State Regional University;  
e-mail: marishkazudina@yandex.ru

*Kukharensko Aleksandra Petrovna* – postgraduate student, Moscow State Regional University;  
e-mail: a.renard04@yandex.ru

---

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА**

*Зудина М.Н., Кухаренко А.П.* Вихревые движения в полугораниченном газоподобном нестационарном облаке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 111–119.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-111-119.

**BIBLIOGRAPHIC REFERENCE**

*M. Zudina, A. Kukharensko* Vortex motions in a nonstationary semi-infinite gas-liked cloud // Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 111–119.  
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-111-119.