УДК 512.644
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-133-138

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРАВИЛА КРАМЕРА НА БАЗЕ EXCEL

Хасанов А.С.
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., 36, Российская Федерация

Аннотация. В работе описана вычислительная схема для решения систем линейных уравнений по правилу Крамера с использованием программы Excel.

Ключевые слова: система линейных уравнений, правило Крамера.

AN EXCEL-BASED REALIZATION OF CRAMER'S ROOL

A. Khasanov
Plekhanov Russian University of Economics
Stremyannyi per. 36, 117997 Moscow, Russia

Abstract. An Excel-based computational scheme is presented for solving systems of linear equations by Cramer's rool.

Key words: systems of linear equations, Cramer's rool.

1. Введение

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

где $n \geq 2$. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица этой системы, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, A_i - i-й столбец матрицы A, т.е. $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$. Определим n матриц

$D_1, \dots, D_i, \dots, D_n$, где матрица D_i получена из матрицы A путём замены i-го столбца на столбец B. При $i = 1$ и $i = n$ эти матрицы имеют вид $D_1 = (B, A_2, \dots, A_n)$, $D_n = (A_1, \dots, A_{n-1}, B)$. В случае $n > 2$ остальные $n - 2$ матрицы имеют вид $D_i = (A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$, где $1 < i < n$. Пусть $\Delta = detA$ – определитель матрицы A. Если $\Delta \neq 0$, то система уравнений (1) имеет единственное решение и неизвестные x_i могут быть вычислены по формулам Крамера [1] $x_i = \Delta_i / \Delta$, где $\Delta_i = detD_i$. Если вычисления проводить с использованием программы Excel, то объём работы по формированию матриц $D_1, \dots, D_i, \dots, D_n$ и вычислению их определителей быстро растет с ростом n, следовательно, нужна более простая вычислительная схема для реализации правила Крамера.

2. Вычислительная схема для реализации правила Крамера

Рассмотрим матрицу $C = (A_1, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_n)$ с размерами $n \times (2n + 1)$. Определим n квадратных матриц $C_1, \dots, C_i, \dots, C_n$, где матрица C_i состоит из первых n столбцов матрицы, полученной из матрицы C путём вычеркивания первых i её столбцов. При $i = 1$ и $i = n$ эти матрицы имеют вид $C_1 = (A_2, \dots, A_n, B)$, $C_n = (B, A_1, \dots, A_{n-1})$. В случае $n > 2$ остальные $n - 2$ матрицы имеют вид $C_i = (A_{i+1}, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_{i-1})$, где $1 < i < n$. Пусть $\Delta'_i = detC_i$. Покажем, что $\Delta_i = (-1)^{ni+1} \Delta'_i$. Пусть $1 < i < n$. Матрицу $D_i = (A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$ можно получить из матрицы $C_i = (A_{i+1}, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_{i-1})$, используя перестановки двух соседних столбцов. Для этого, используя $n - i$ перестановок соседних столбцов матрицы C_i, выведем столбец B в позицию первого столбца. В результате получим матрицу $(B, A_{i+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_{i-1})$. Аналогично, в позицию первого столбца последовательно выведем $i - 1$ столбцов $A_{i-1}, \dots, A_1$, используя для этого каждый раз $n - 1$ перестановок. Таким образом, после выполнения $n - i + (i - 1)(n - 1) = ni + 1 - 2i$ перестановок соседних столбцов получим матрицу $D_i = (A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$. Так как при перестановке двух столбцов определитель меняет знак [1], то $\Delta_i = (-1)^{ni+1-2i} \Delta'_i$ при $1 < i < n$. При $i = 1$ и $i = n$ матрицу D_i можно получить из матрицы C_i путём $n - 1$ перестановок двух соседних столбцов, т.е. $\Delta_i = (-1)^{n-1} \Delta'_i$ при $i = 1$ и $i = n$. Так как при $i = 1$

$(-1)^{ni+1-2i} = (-1)^{n-1}$ и при $i = n$ $(-1)^{ni+1-2i} = (-1)^{(n-1)^2} = (-1)^{n-1}$, то $\Delta_i = (-1)^{ni+1-2i}\Delta_i' = (-1)^{ni+1}(-1)^{-2i}\Delta_i' = (-1)^{ni+1}\Delta_i'$ при $1 \leq i \leq n$.

Перейдем к описанию вычислительной схемы в программе Excel, основанной на формуле $\Delta_i = (-1)^{ni+1}\Delta_i'$. Так как $x_i = \Delta_i/\Delta$, а $\Delta_i = (-1)^{ni+1}\Delta_i'$, то $x_i = (-1)^{ni+1}\Delta_i'/\Delta$. В первой строке свободного листа, начиная со второй ячейки, отведем блок из *n* ячеек для номеров неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти ячейки легко заполнить с помощью функции «Автозаполнение». В первую ячейку первой строки введем символ Δ. Во второй строке, начиная с первой ячейки, отведём блок из $n + 1$ ячеек для определителя системы Δ и для искомых значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

Таблица 1

	A	B	C	…	N’
1	Δ	1	2	…	*n*
2					

Пусть, для определённости, значение *n* расположено в ячейке N’1. После всех вычислений в ячейке A2 будет значение определителя системы Δ, а в ячейках B2, C2, …, N’2 - искомые значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. На этом же рабочем листе, ниже второй строки, отведем блок ячеек с размерами $n\times(n + 1)$ для матрицы $(A_1, \dots, A_n, B)$. Если ввести в эти ячейки исходные данные $(A_1, \dots, A_n, B)$, а затем копию матрицы $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$ расположить справа от столбца B в тех же строках, то получим матрицу $C = (A_1, \dots, A_n, B, A_1, \dots, A_n)$. Поставим курсор в ячейку A2 и введём в эту ячейку функцию МОПРЕД, вычисляющую определитель системы Δ. Для этого нажмем кнопку «Вставка функции» (f_x). В появившемся диалоговом окне «Мастер функций» в рабочем поле «Категория» выберем «Математические», а в рабочем поле «Функция» – имя функции МОПРЕД. После этого нажмем кнопку ОК. В появившемся диалоговом окне МОПРЕД в рабочее поле «Массив» введем диапазон матрицы $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$ и нажмем кнопку ОК. В результате в ячейке A2 появится значение определителям Δ. Если $\Delta \neq 0$, то правило Крамера применимо. Пусть $\Delta \neq 0$. Формулу, введенную в ячейку A2, скопируем в ячейку B2. В ячейке B2 появится значение $\Delta_1' = detC_1$. Поставим курсор в ячейку B2 и в строке формул перед функцией МОПРЕД поставим дополнительный множитель (-1)^(N'1*B1+1)/$A$2. Заметим, что в формуле используются абсолютные адреса ячеек, в которых находятся значения Δ и n, т.е. адреса $A$2 и N'1, а перед дополнительным множителем и исходной функцией МОПРЕД ставится знак умножения «*». После нажатия кнопки OK в ячейке B2 получим значение x_1. Формулу, введенную в ячейку B2, скопируем в остальные ячейки C2, …, N'2. В результате в ячейках второй строки под номерами 1,2,…,n получим значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, так как $x_i = (-1)^{ni+1}\Delta_i'/\Delta$. Ответ легко проверить, используя функцию СУММПРОИЗВ.

3. Пример применения описанной выше вычислительной схемы

Рассмотрим решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 12, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 9, \\ 6x_1 - 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_5 = -15. \end{cases}$$

На свободном листе в ячейку A1 введем символ Δ, а в ячейки B1, C1, D1, E1, F1 введем номера неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Ячейку A2 отведём для значения определителя системы Δ, а ячейки B2, C2, D2, E2, F2 – для значений неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

Таблица 2.

	A	B	C	D	E	F
1	Δ	1	2	3	4	5
2						

На этом же рабочем листе, в блок ячеек B4:F8 введем матрицу A, а в блок ячеек G4:G8 – вектор-столбец B. Скопируем блок ячеек B4:F8 и расположим эту копию справа от столбца B в блоке ячеек H4:L8:

Поставим курсор в ячейку A2 и введем в эту ячейку функцию МОПРЕД, вычисляющую определитель матрицы системы Δ ($f_x \rightarrow$ категория «Математические» → функция «МОПРЕД» → массив B4:F8 → OK). В ячейке A2 получим значение $\Delta = -43$. Формулу МОПРЕД (B4:F8), введённую в ячейку A2, скопируем в ячейку B2. Поставим курсор в ячейке B2 и в строке формул перед формулой для ячейки B2 поставим множитель (-1)^($F$1*B1+1)/$A$2. В результате для ячейки B2 получим окончательную формулу:

(-1)^($F$1*B1+1)/$A$2*МОПРЕД(C4:G8).

После нажатия кнопки ОК в ячейке B2 появится значение $x_1 = 314{,}047$. Формулу, введенную в ячейку B2, скопируем в остальные ячейки C2, D2, E2, F2. В результате в этих ячейках появятся значения остальных неизвестных: $x_2 = 192{,}907$, $x_3 = -83$, $x_4 = -46{,}744$, $x_5 = -51$. Ответ проверяем с помощью функции СУММПРОИЗВ.

Таблица 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Δ	1	2	3	4	5						
2												
3												
4		5	-6	10	-7	-2	12	5	-6	10	-7	-2
5		-3	4	-2	2	-2	4	-3	4	-2	2	-2
6		-2	2	-4	5	-3	9	-2	2	-4	5	-3
7		6	-8	7	-4	-1	-2	6	-8	7	-4	-1
8		2	1	7	0	5	-15	2	1	7	0	5

4. Заключение

В стандартной схеме решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, основанной на вычислении определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, выполняется n копирований матрицы n-го порядка. Приведенная нами вычислительная схема показывает, что эту задачу можно решить, используя только одно копирование этой матрицы. Такая схема полезна и для проведения математического практикума в компьютерных классах по теме «Правило Крамера». В некоторых вузах такой практикум на базе Excel вводится как продолжение стандартного курса высшей математики. Целью такого практикума [2] является не только формирование навыков использования процедур и функций программы Excel, но и изучение эффективных вычислительных схем для решения математических задач, требующих большой объём вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
2. Практикум по высшей математике для студентов экономических специальностей: методические указания к самостоятельной работе студентов под ред. Сагитова Р.В. / РЭА им. Г.В. Плеханова. М.: Издательство «Менеджер». 2008. 207 с.

REFERENCES

1. Kurosh A.G. Kurs vysshei algebry [Course of higher algebra]. M., Nauka, 1965. 431 p.
2. Praktikum po vysshei matematike dlya studentov ekonomicheskikh spetsial'nostei: metodicheskie ukazaniya k samostoyatel'noi rabote studentov pod red. Sagitova R.V. / REA im. G.V. Plekhanova [Workshop on higher mathematics for students of economic specialties: methodical instructions for independent work of students ed. by R. V. Sagitov / REA n.a. G. V. Plekhanov]. M., Izdatel'stvo «Menedzher», 2008. 207 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Khasanov Anis Salyakhovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of Higher Mathematics Department, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Хасанов А.С. Об одной реализации правила Крамера на базе Excel // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 133-138.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-133-138.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

A. Khasanov An Excel-based realization of Cramer’s rool // Bulletein of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 3. pp. 133-138.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-3-133-138.