# РАЗДЕЛ I.
# МАТЕМАТИКА

УДК 517.927.25
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-8-17

## О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТЯХ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ТОЧЕК РАЗРЫВА

***Сучков М.В., Трифоненков В.П.***
*Научно-исследовательский ядерный университет «МИФИ»*
*115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31, Российская Федерация*

***Аннотация.*** В статье показывается, что для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом для произвольных областей размерности $N = 2$ или $N = 3$ наличие разрыва не оказывает влияния на выполнение принципа локализации в областях, не содержащих точек разрыва. Если же $N \geq 5$, то даже наличие бесконечной гладкости разлагаемой функции не обеспечивает выполнения принципа локализации в точках, «далёких» от поверхности разрыва коэффициента.

***Ключевые слова***: оператор Лапласа с разрывным коэффициентом, принцип локализации, спектральное разложение функции.

## ON THE LOCALIZATION PRINCIPLE FOR THE LAPLACE OPERATOR WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT IN DOMAINS WITHOUT DISCONTINUITY POINTS

***M. Suchkov, V. Trifonenkov***
*National Research Nuclear University MEPhI*
*Kashirskoe sh. 31, 115409 Moscow, Russian Federation*

***Abstract.*** This paper studies the Laplace operator with the discontinuous coefficient. We prove that for the case of arbitrary domains of dimension $N = 2$ or $N = 3$, the localization principle in domains without discontinuity points is preserved despite the discontinuity of the coefficient. If $N \geq 5$, then the localization principle is violated in points located "far" from the surface of the discontinuity of the coefficient, even in case of infinite smoothness of the decomposed function.

***Keywords:*** Laplace operator with a discontinuous coefficient, localization principle, spectral decomposition of the function.

Хорошо известно, что в одномерном случае для любой интегрируемой функции $f(x)$ сходимость ряда Фурье этой функции в данной точке зависит лишь от поведения функции в достаточно малой окрестности этой точки. Это и называется принципом локализации. Для кратных тригонометрических рядов Фурье и разложений по собственным функциям самосопряжённых эллиптических операторов с гладкими коэффициентами для выполнения принципа локализации уже недостаточно гладкости разлагаемой функции в малой окрестности рассматриваемой точки. Нужна определённая гладкость функции, зависящая от размерности области, в точках, «далёких» от рассматриваемой [3]. Если же изучать спектральные разложения, отвечающие самосопряженным эллиптическим операторам с разрывными коэффициентами, то оказывается, что в условиях, при которых справедлив принцип локализации в областях, не содержащих точек разрыва, размерность рассматриваемой области играет более существенную роль. Этот эффект и обсуждается в данной статье.

Пусть $N$-мерная область $g$ с границей $\Gamma$ разбивается некоторой лежащей внутри неё замкнутой поверхностью $C$ на две подобласти $g_1$, лежащую внутри $C$, и $g_2$. Рассмотрим в $(g + \Gamma)$ следующую задачу на собственные функции:

$$k_1 \Delta u + \lambda u = 0;\ x \in g_1$$

$$k_2 \Delta u + \lambda u = 0;\ x \in g_2 \tag{1}$$

$$u\big|_{C-0} = u\big|_{C+0};\ k_1 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{C-0} = k_2 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{C+0};\ u\big|_{\Gamma} = 0,$$

где $k_1$ и $k_2$ – положительные постоянные. Символы $C - 0$ и $C + 0$ означают предельные значения соответственно с внутренней и внешней стороны поверхности $C$ по отношению к области $g_1$; $C, \Gamma \in C^{2,\alpha}(\alpha > 0)$.

<u>Определение.</u> Классической собственной функцией задачи (1) называется функция $u(x)$

1) $u(x) \not\equiv 0$; 2) $u(x) \in C^1(g_1 + C) \wedge C^2(g_1)$; 3) $u(x) \in C^1(g_2 + C + \Gamma) \wedge C^2(g_2)$; 4) $u(x) \in C(g + \Gamma)$; 5) $u(x)$ при некотором $\lambda$ удовлетворяет всем условиям задачи (1).

Из работы [1] известно, что задача (1) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных собственных значений $\lambda_n$ (с единственной бесконечно удалённой предельной точкой), которым соответствует полная ортонормированная система в $L_2(g)$ собственных функций $u_n(x)$. Причём эта система совпадает с системой обобщённых собственных функций задачи (1) (в обычном смысле удовлетворяющих некоторому интегральному тождеству). Покажем, что если размерность $N$ области $g$ равна 2 или 3, то разрыв коэффициента не оказывает никакого влияния на выполнение принципа локализации, то есть условия на разлагаемую функцию будут такими же, как и для обычного оператора Лапласа с задачей Дирихле. Для доказательства этого факта будем следовать терминологии В.А.Ильина. Пусть $\Omega$ – строго внутренняя подобласть областей $g_1$ или $g_2$. Будем называть ФСФ (фундаментальной системой функций) оператора $k_1\Delta u(k_2\Delta u)$ относительно $\Omega$ полную ортонормированную в $L_2(g)$ систему функций, удовлетворяющих уравнению $k_1\Delta u + \lambda u = 0$ ($k_2\Delta u + \lambda u = 0$) в $\Omega$.

Сформулируем теорему В.А. Ильина о сходимости спектральных разложений по указанной ФСФ.

Теорема (В.А.Ильин). Пусть $f(x)\in W_2^{\frac{N-1}{2}}(g)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\frac{N-1}{2}} f_n^2 < \infty$. Здесь $f_n$ – коэффициент Фурье функции $f(x)$ по ФСФ оператора $k_1\Delta u$ ($k_2\Delta u$) относительно $\Omega$, $\lambda_n$ – собственные значения задачи (1). Тогда в области $\Omega$ справедлив принцип локализации (то есть, если $f(x)$ обращается в нуль в области $\Omega$, то ее ряд Фурье по рассматриваемой ФСФ равномерно стремится к нулю в любой строго внутренней подобласти области $\Omega$).

Будем теперь в качестве ФСФ рассматривать нашу систему классических собственных функций задачи (1). Опираясь на сформулированную теорему В.А. Ильина, установим следующее утверждение.

Теорема. Пусть $f(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(g)\; N=3$; $f(x)\in \tilde{W}_2^{1/2}(g)\; N=2$; ($\tilde{W}_2^{1/2}(g)$ – класс функций из $W_2^{1/2}(R_2)$ с носителем в ($g+\Gamma$). Тогда в области $\Omega$ справедлив принцип локализации для ФСФ задачи (1).

Доказательство.

Используя теорему В.А. Ильина, достаточно для $N = 3$ установить оценку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2\lambda_n \le C\cdot\|f\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}$; $C > 0$ – константа. Так как ФСФ задачи (1) совпадает с системой обобщённых собственных функций задачи (1), то для этой системы такая классическая оценка хорошо известна [4]. Для $N = 2$ оценка $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2\lambda_n^{1/2} < \infty$ получается с помощью теоремы Лионса об интерполяции (одна пара пространств в этой теореме – это пространства функций, для которых сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2\lambda_n$ и, соответственно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2$, а другая пара пространств – это пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(g)$ и $L_2(g)$).

Таким образом, при $N = 2,3$ условия, при которых выполнен принцип локализации для системы обственных функций задачи (1), в областях, не содержащих точек поверхности разрыва коэффициента, остаются точно такими же, как и для обычного оператора Лапласа (задача Дирихле). Причём эти условия неулучшаемы в классах Соболева дробного порядка [2].

Покажем теперь, что при $N \geq 5$ даже бесконечная гладкость в области $g$ и финитность функции $f(x)$ относительно $g$ не гарантируют выполнения принципа локализации в областях, «далёких» от поверхности разрыва коэффициента. Приведём пример функции, сколь угодно гладкой в области $g$ и финитной относительно этой области, обращающейся в нуль в некоторой подобласти $\Omega \subset g_1$, ряд Фурье по собственным функциям задачи (1) которой расходится в некоторой точке $\Omega$.

Возьмём в качестве областей $g_1$ и $g$ концентрические шары радиусов $r_0$ и $R$, соответственно, с центром в начале координат. Пусть $C$ – сфера радиуса $r_0$; $\Gamma$ – сфера с радиусом $R$. Тогда задача на собственные функции (1) переходит в задачу (2):

$$\begin{aligned} &k_1 \Delta u + \lambda u = 0 \quad 0 \leq r < r_0 \\ &k_2 \Delta u + \lambda u = 0 \quad r_0 < r < R \end{aligned} \tag{2}$$

$$u\big|_{C-0} = u\big|_{C+0};\ k_1 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{C-0} = k_2 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{C+0};\ u\big|_{\Gamma} = 0.$$

Перейдём к сферическим координатам и будем искать решение задачи (2) в виде: $u(r, \theta) = e(r) \cdot \varphi(\theta)$. Для собственных функций $e(r)$, обладающих сферической симметрией и зависящих только от радиуса $r$, получим следующую задачу:

$$e''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot e'(r) + \frac{\lambda}{k_1} e(r) = 0;\ 0 < r < r_0$$

$$e''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot e'(r) + \frac{\lambda}{k_2} e(r) = 0;\ r_0 < r < R \tag{3}$$

$$e\big|_{r_0-0} = e\big|_{r_0+0};\ k_1 \frac{de}{dr}\bigg|_{r_0-0} = k_2 \frac{de}{dr}\bigg|_{r_0+0};\ \big|e(r)\big| < \infty;\ 0 \leq r \leq R;\ e(R) = 0.$$

Покажем, что собственные функции задачи (3) образуют полную ортонормированную систему в пространстве с весом $L_2\left(0, R; r^{N-1}\right)$. Обозначим через $L_N e = -\left[r^{N-1} e'\right]'$. Рассмотрим уравнение

$$L_N \omega = \tilde{g}, \tag{4}$$

где $\tilde{g} = \begin{cases} \dfrac{g(r)}{k_1};\ 0 \leq r < r_0; \\ \dfrac{g(r)}{k_2};\ r_0 < r < R; \end{cases}$ $\quad g(r) \in C[0, R];\ \big|g(r)\big| r^{1-N} < \infty\ (0 \leq r \leq R).$

Будем называть $\omega(r)$ решением уравнения (4), если

$$L_N \omega = \tilde{g}(r)\,(0 < r < r_0);\ (r_0 < r < R) \tag{5}$$

$$\omega\big|_{r_0-0}=\omega\big|_{r_0+0};\ k_1\frac{d\omega}{dr}\bigg|_{r_0-0}=k_2\frac{d\omega}{dr}\bigg|_{r_0+0};\ \big|\omega(r)\big|<\infty\ \text{при}\ 0\le r\le R;\ \omega(R)=0.$$

Если в качестве $\tilde{g}(r)$ можно взять $\lambda\tilde{\omega}(r)$, то $\omega(r)$ будем называть собственной функцией задачи (5), а $\lambda$ – соответствующим собственным значением. Причем, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (5), ибо тогда $\lambda = 0$ было бы собственным значением задачи (3) и задачи (2), чего быть не может (задача Дирихле). Поэтому решение задачи (5) можно записать через функцию Грина $G(x, y)$ в виде:

$$\omega(y)=\int_0^R G(x,y)\tilde{g}(x)dx, \tag{6}$$

где $G(x, y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}&C_1+C_2y^{2-N}-(0<x\le y\le r_0);\ C_1+C_2x^{2-N}-(0<y\le x\le r_0);\\&C_3+C_4y^{2-N}-\left[(r_0\le x\le y\le R)\cup(r_0\le y\le R; x\le r_0)\right];\\&C_3+C_4x^{2-N}-\left[(r_0\le y\le x\le R)\cup(r_0\le x\le R; y\le r_0)\right],\end{aligned}$$

где $C_1=\dfrac{1}{(N-1)k_1}\cdot\dfrac{(k_1-k_2)-r_0^{N-2}\cdot k_1R^{2-N}}{k_2r_0^{N-2}}$,

$$C_2=\frac{1}{(N-1)k_1};\ C_3=-R^{2-N}C_4;\ C_4=\frac{1}{(N-1)k_2}.$$

Значения констант $C_i$ получаются из подстановки вида решения (6) в (5). Таким образом, задача (3) эквивалентна интегральному уравнению

$$e(r)=\lambda\int_0^R x^{N-1}G(x,y)e(x)\,dx. \tag{7}$$

Сделаем замену $v(r)=r^{\frac{N-1}{2}}e(r)$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$v(r)=\lambda\int_0^R r^{\frac{N-1}{2}}x^{\frac{N-1}{2}}G(x,y)\,v(x)\,dx.$$

Ядро этого уравнения $r^{\frac{N-1}{2}}x^{\frac{N-1}{2}}G(x,r)$ симметрично и непрерывно в квадрате $[0, R]\times[0, R]$, поэтому к уравнению (7) применима теория Гильберта-Шмидта, из которой и вытекает полнота собственных функций задачи (3) в пространстве с весом $L_2\left(0,R;r^{N-1}\right)$ и её ортогональность. Выпишем явный вид собственных функций задачи (3) [5, с. 332–333].

$$e_n(r)=\begin{cases}\dfrac{C_{1n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda_n/k_1}\cdot r\right)}{r^{\frac{N-2}{2}}}; & 0\le r\le r_0\\[2ex] \dfrac{C_{2n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda_n/k_2}\cdot r\right)+C_{3n}Y_{\frac{N-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda_n/k_2}\cdot r\right)}{r^{\frac{N-2}{2}}}; & r_0<r\le R\end{cases}\qquad n=1,2,\ldots$$

Здесь $\lambda_n$ – последовательность собственных значений, отвечающих собственным функциям $e_n(r)$, обладающим сферической симметрией и зависящим только от радиуса, $J_{\frac{N-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda_n/k_1}\cdot r\right)$ – функция Бесселя, $Y_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda_n/k_2}\cdot r)$ – функция Неймана, $C_{1n}$, $C_{2n}$, $C_{3n}$ – константы.

Введём следующие обозначения: $\alpha_n=\sqrt{\lambda_n/k_1}$; $\beta_n=\sqrt{\lambda_n/k_2}$; $W_{N_R}$ – площадь поверхности $N$-мерной сферы радиуса $R$. Тогда граничные условия, условия сопряжения задачи (3) и нормировка собственных функций в шаре $g$ дают четыре уравнения для определения $C_{1n}$, $C_{2n}$, $C_{3n}$, $\lambda_n$.

1) $C_{2n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\beta_n R\right)+C_{3n}Y_{\frac{N-2}{2}}\left(\beta_n R\right)=0$;

2) $C_{1n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\alpha_n r_0\right)=C_{2n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\beta_n r_0\right)+C_{3n}Y_{\frac{N-2}{2}}\left(\beta_n r_0\right)$;

3) $C_{1n}\sqrt{k_1}J_{\frac{N}{2}}\left(\alpha_n r_0\right)=\sqrt{k_2}[C_{2n}J_{\frac{N}{2}}\left(\beta_n r_0\right)+C_{3n}Y_{\frac{N}{2}}\left(\beta_n r_0\right)]$;

4) $$\frac{r_0^2}{2}[C_{1n}J'_{\frac{N-2}{2}}\left(\alpha_n r_0\right)]^2-\frac{r_0^2}{2}\left[\frac{(N-2)(k_2-k_1)}{2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{k_2}\cdot r_0}C_{1n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\alpha_n r_0\right)+\right.$$
$$\left.+C_{1n}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}J'_{\frac{N-2}{2}}\left(\alpha_n r_0\right)\right]^2+\left(\frac{N-2}{2}\right)^2\frac{C_{1n}^2}{2\lambda_n}[J_{\frac{N-2}{2}}\left(\alpha_n r_0\right)]^2\left(k_2-k_1\right)+$$
$$+\frac{R^2}{2}[C_{2n}J_{\frac{N}{2}}\left(\beta_n R\right)+C_{3n}Y_{\frac{N}{2}}\left(\beta_n R\right)]^2=\frac{1}{W_{N_R}}.$$

Пользуясь уравнениями (1)–(4) и асимптотикой цилиндрических функций, можно показать, что для достаточно больших номеров $n$ справедливы оценки

$$S_1n^2\le\lambda_n\le S_2n^2;$$
$$T_1\lambda_n^{1/4}\le\left|C_{1n}\right|\le T_2\lambda_n^{1/4};\tag{8}$$
$$\left|C_{2n}\right|,\left|C_{3n}\right|\le T_3\lambda_n^{1/4};$$

где $T_1$, $T_2$, $T_3$, $S_1$, $S_2$ – положительные константы.

В частности, уравнение для определения собственных значений $\lambda_n$ будет иметь вид:

$$\sqrt{\lambda_n}\left(\frac{R-r_0}{\sqrt{k_2}}+\frac{r_0}{\sqrt{k_1}}\right)=\left(\frac{N+1}{4}\right)\pi+\left(-1\right)^n\cdot$$

$$\cdot \arcsin\left[\frac{\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}}\cdot \sin\left(\alpha_n r_0 - \left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right)\cos\left(\beta_n\left(r_0-R\right)\right)+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}}\right)\right]+\pi n \quad (9)$$

Предположим, что $\dfrac{R-r_0}{\sqrt{k_2}}=\dfrac{r_0}{\sqrt{k_1}}.$ Тогда из (9) будет следовать, что:

$$\alpha_n r_0 = \left(\frac{N+1}{8}\right)\pi + \frac{\pi n}{2}\left(1+\overline{\overline{o}}\left(1\right)\right) \tag{10}$$

Перейдём теперь к конструкции примера функции, упомянутой в начале этой статьи. Будем использовать схему, предложенную в работе [2, с. 168]. Пусть $s$ – произвольное достаточно большое натуральное число. Рассмотрим функцию $f(r)$ специального вида, зависящую только от радиуса $r$,

$$f\left(r\right)=\begin{cases} 0; \quad 0\le r\le R_1 < r_0; \quad R_1>0 \\ a_0+a_1r^2+\ldots+a_{4s+3}r^{8s+6}; \quad R_1\le r\le R_2; \quad r_0<R_2<R; \\ 0; \quad R_2\le r\le R; \end{cases}$$

Постоянные $a_i$ $i = 0,1, \ldots, 4s + 3$; выберем так, чтобы: $f\left(r\right)\in C^{2s}\left[0,R\right]$; $f_r'\left(r_0\right)\neq 0.$ Возможность выбора таких постоянных $a_i$ доказывается так же, как и в работе [2, с. 168]. Пусть $\Gamma_i$ – сфера радиуса $R_i$; $i = 1,2$; $C$ – сфера радиуса $r_0$; $\Omega_i$ – шаровой слой с границами $C$ и $\Gamma_i$; $i = 1,2$.

Обозначим:

$$T_n\left(r\right)=\frac{C_{1n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\alpha_n r\right)}{r^{\frac{N-2}{2}}};\ 0\le r\le r_0;$$

$$Q_n\left(r\right)=\frac{C_{2n}J_{\frac{N-2}{2}}\left(\beta_n r\right)}{r^{\frac{N-2}{2}}}+\frac{C_{3n}Y_{\frac{N-2}{2}}\left(\beta_n r\right)}{r^{\frac{N-2}{2}}};\ r_0<r\le R;\ n=1,2,\ldots$$

Тогда собственные функции задачи (3) $e_n(r)$ будут иметь вид:

$$e_n\left(r\right)=\begin{cases} T_n\left(r\right); \quad 0\le r\le r_0; \\ Q_n\left(r\right); \quad r_0<r\le R. \end{cases}$$

Подсчитаем коэффициенты Фурье функции $f(r)$ по собственным функциям $e_n(r)$. Применим вторую формулу Грина по областям $\Omega_1$ и $\Omega_2$ $s$ раз (используя то, что $k_1\Delta T_n\left(r\right)+\lambda_n T_n(r)=0;\ 0<r<r_0$, $k_2\Delta Q_n\left(r\right)+\lambda_n Q_n(r)=0;\ r_0<r<R,$ и поэтому функции $T_n\left(r\right)$ и $Q_n\left(r\right)$ можно выразить через оператор Лапласа).

Тогда:

$$-f_n=\left[\frac{k_1^s}{\lambda_n^s}\int_{\Omega_1}\left(\Delta^s f\right)T_n\,d\Omega_1+\frac{k_2^s}{\lambda_n^s}\int_{\Omega_2}\left(\Delta^s f\right)Q_n\,d\Omega_1\right]\left(-1\right)^{s+1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left\{(-1)^{i-1}\left[\frac{\left(k_2^i-k_1^i\right)}{\lambda_n^i}\int_C\frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta^{i-1}f\right)T_n\,dC-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{\lambda_n^i}\int_C\left(\Delta^{i-1}f\right)\left(k_2^i\frac{\partial Q_n}{\partial n}-k_1^i\frac{\partial T_n}{\partial n}\right)dC+\frac{k_2^i}{\lambda_n^i}\int_{\Gamma_2}\left(\left(\Delta^{i-1}f\right)\frac{\partial Q_n}{\partial n}-Q_n\frac{\partial\left(\Delta^{i-1}f\right)}{\partial n}\right)d\Gamma_2-$$

$$\left.\left.-\frac{k_2^i}{\lambda_n^i}\int_{\Gamma_1}\left(\Delta^{i-1}f\cdot\frac{\partial T_n}{\partial n}-T_n\frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta^{i-1}f\right)\right)d\Gamma_1\right]\right\} \tag{11}$$

Учтём, что: $\frac{\partial}{\partial n}=\frac{d}{dr}$; все подынтегральные функции зависят только от радиуса: $f\big|_{\Gamma_1}=\frac{df}{dr}\Big|_{\Gamma_1}=\ldots=\frac{d^{2s}f}{dr^{2s}}\Big|_{\Gamma_1}=0$; $f\big|_{\Gamma_2}=\frac{df}{dr}\Big|_{\Gamma_2}=\ldots=\frac{d^{2s}f}{dr^{2s}}\Big|_{\Gamma_2}=0.$ Кроме того, учтём условия сопряжения для функций $T_n(r)$ и $Q_n(r)$ на поверхности $C$, а также оценки (8). Тогда главный вклад, то есть член, медленнее всего стремящийся к нулю, даёт первое слагаемое в сумме (11) при $i = 1$. То есть:

$$f_n=\frac{\left(k_1-k_2\right)}{\lambda_n}C_{1n}\frac{J_{\frac{N-2}{2}}\left(\alpha_n r_0\right)}{r_0^{\frac{N-2}{2}}}f_r'\left(r_0\right)\omega_{N_{r_0}}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda_n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Тогда общий член ряда Фурье в точке $r$=0, используя асимптотику функции Бесселя, приводится к виду:

$$f_ne_n\left(0\right)=f_nT_n\left(0\right)=\frac{M\cdot C_{1n}^2\left(k_2-k_1\right)}{\lambda_n^{5/4}}\cdot\lambda_n^{\frac{N-2}{4}}\cdot\sin\left(\alpha_n r_0-\left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right)+$$

$$+\lambda_n^{\frac{N-2}{4}}\cdot\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda_n^{5/4}}\right)=M\left(k_2-k_1\right)C_{1n}^2\lambda_n^{\frac{N-7}{4}}\cdot\sin\left(\alpha_n r_0-\left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right)+\underline{\underline{O}}\left(\lambda_n^{\frac{N-7}{4}}\right);$$

$M$ = const.

В силу оценок (8) $T_1\lambda_n^{1/4}\le\left|C_{1n}\right|\le T_2\lambda_n^{1/4}$, следовательно, $T_1^2\lambda_n^{\frac{N-5}{4}}\le C_{1n}^2\lambda_n^{\frac{N-7}{4}}\le T_2^2\lambda_n^{\frac{N-5}{4}}$ для достаточно больших $n$.

Тогда при $N \ge 5$ из (12) вытекает, что для того, чтобы общий член ряда Фурье $f_ne_n(0)$ стремился к нулю при $n \to \infty$, необходимо, чтобы $\sin\left(\alpha_n r_0-\left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right)\to 0$, но в силу (10):

$$\alpha_n r_0-\left(\frac{N+1}{4}\right)\pi=-\left(\frac{N+1}{8}\right)\pi+\frac{\pi n}{2}\left(1+\overset{=}{o}(1)\right)$$ и поэтому $\sin\left(\alpha_n r_0-\left(\frac{N+1}{4}\right)\pi\right)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, что и завершает конструкцию примера.

<u>Замечание 1</u>. При $N = 4$ вопрос остаётся открытым. Можно лишь утверждать для построенного примера абсолютную расходимость ряда Фурье в точке $r = 0$.

Замечание 2. Результаты при $N = 2$; $N = 3$ можно перенести на более общие эллиптические самосопряжённые операторы с разрывными коэффициентами.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ильин В.А. О системе классических собственных функций линейного самосопряжённого эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Доклады АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 272–275.
2. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа // Успехи математических наук. 1958. Т. 13. Выпуск 1 (79). С. 87–180.
3. Ильин В.А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // Успехи математических наук. 1968. Т. 23. № 2. С. 61–120.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
5. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 423 с.
6. Солдатова М.А. О некоторых точных по порядку оценках для неортонормированной фундаментальной системы функций (в смысле В.А. Ильина) для оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 516–520.
7. Сучков М.В. О некоторых свойствах спектральных разложений, отвечающих самосопряженному эллиптическому оператору второго порядка с разрывными коэффициентами // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 6. С. 1314–1316.
8. Сучков М.В., Трифоненков В.П. Оценки собственных функций, отвечающих обыкновенному дифференциальному оператору четвёртого порядка, и их использование при проверке условия базисности В.А. Ильина в пространствах Lp // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 4. С. 36–43.


## REFERENCES


1. Il'in V.A. About the system of the classical eigenfunctions of a linear self-adjoint elliptic operator with discontinuous coefficients. In: Doklady AN SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1961, vol. 137, no. 2, pp. 272–275.
2. Il'in V.A. On convergence of expansions in eigenfunctions of the Laplace operator. In: Uspekhi matematicheskikh nauk [Successes of mathematical Sciences]. 1958, vol. 13, Issue 1 (79), pp. 87–180.
3. Il'in V.A. Problems of localization and convergence for Fourier series in fundamental systems of functions of the Laplace operator. In: Uspekhi matematicheskikh nauk [Successes of mathematical Sciences]. 1968, vol. 23, no. 2, pp. 61–120.
4. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa [Linear and quasi-linear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 576 p.
5. Mikhlin S.G. Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Linear partial differential equations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1977. 423 p.
6. Soldatova M.A. Some exact order estimates for nonorthonormal fundamental system of functions (in the sense of V.A. Ilyin) of the Laplace operator. In: Differentsial'nye uravneniya [Differential equations]. 2002, vol. 38, no. 4, pp. 516–520.
7. Suchkov M.V. On some properties of spectral decompositions, corresponding to self-adjoint elliptic operator of the second order with discontinuous coefficients. In: Doklady AN SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences]. 1980, vol. 251, no. 6, pp. 1314–1316.

8. Suchkov M.V., Trifonenkov V.P. Estimations of eigenfunctions of the ordinary fourth-order differential operator and their use in checking the condition of Il'in basis property in Lp spaces. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2015, no. 4, pp. 36–43.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Сучков Михаил Вадимович* – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики научно-исследовательского ядерного университета «МИФИ»;
e-mail: mv_suchkov@mail.ru

*Трифоненков Владимир Петрович* – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики научно-исследовательского ядерного университета «МИФИ»;
e-mail: snuclear@mail.ru

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Mikhail Suchkov* – candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Higher Mathematics at the National Research Nuclear University MEPhI;
e-mail: mv_suchkov@mail.ru

*Vladimir Trifonenkov* – candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Higher Mathematics at the National Research Nuclear University MEPhI;
e-mail: snuclear@mail.ru

## ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Сучков М.В., Трифоненков В.П. О принципе локализации для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом в областях, не содержащих точек разрыва // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 8–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-8-17.

## THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

M. Suchkov, V. Trifonenkov. On the localization principle for the Laplace operator with a discontinuous coefficient in domains without discontinuity points. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics, 2017, no. 1, pp. 8–17.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-8-17.