УДК 517. 946
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-18-27

СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Шабанова Г. И.
Сибирская Государственная Автомобильно-Дорожная Академия (СибАДИ),
644080, Омск-80, пр. Мира 5, Российская Федерация

Аннотация. В статье исследуются вопросы, связанные со спектральной функцией оператора Штурма-Лиувилля и решением обратной задачи Штурма-Лиувилля на полупрямой $y \geq 0$ в специальных классах функций. Указан вид спектральной функции, условия непрерывности, дифференцируемости и аналитичности.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, дифференциальный оператор, теорема, спектральная функция оператора.

SOME PROPERTIES OF THE SPECTRAL FUNCTION OF STURM – LIOUVILLE OPERATOR

G. Schabanowa
Siberian Automobile and highway Academy (SibAHI),
644080, Omsk-80, av. Mira 5, Russian Federation

Abstract. This article examines the issues associated with the spectral function of Sturm-Liouville operator, the solution of the inverse Sturm-Liouville problem on the half line $y \geq 0$ in special classes of functions. There are pointed the form of spectral function, conditions of continuity, differentiability and analytically.

Keywords: the problem of Sturm-Liouville problem, differential operator, theorem, spectral function of the operator.

Введение

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля

$$l_q\varphi = \lambda r(y)\varphi(y,\lambda), \tag{1}$$

$$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = 0 \tag{2}$$

на интервале $[0, b]$ с дополнительным граничным условием

$$\varphi'(b,\lambda) = 0. \tag{3}$$

Здесь $r = r(y) > 0$; $r(y), q(y) \in C^1[0,b]$; $l_q = -\frac{d^2}{dy^2} + q(y)$ – линейный непрерывный оператор Штурма – Лиувилля.

Основные спектральные соотношения для сингулярного оператора l_q получим, решая задачу (1)–(3) в регулярном случае на интервале [0, b], устремляя параметр b к бесконечности. Изучение обратной задачи Штурма – Лиувилля в сингулярном случае необходимо для решения обратных задач математической физики, редуцируемых к обратной задаче Штурма – Лиувилля. Важно знать свойства спектральной функции, которая в обратных задачах математической физики восстанавливается по информации о решении прямой задачи [1].

Основные концепции, определения и теоремы

Пусть функция $q(y)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $q(y) \in C^1[0,\infty) \cap L_1[0,\infty)$, $q(y)_{L_1[0,\infty)} \le M$.

2. $q(y)$ имеет абсолютный минимум: $q_{\min abc} = q(b^*) = m < 0$.

3. Для больших значений аргумента $y \ge b^*$ функция $q(y)$ принимает отрицательные значения и монотонно стремится к нулю: $q(y) = o\left(-\frac{1}{y^2}\right), y \to \infty$.

4. Последовательность элементов линейного нормированного пространства $L_1[0,\infty)$ $q_n(y) = \begin{cases} q(y), \text{если } y \in [0, b_n], \\ 0, \text{ если } y \in (b_n, \infty) \end{cases}$ сходится в пространстве $L_1[0,\infty)$ к элементу этого пространства $q(y)$ по норме: $\lim_{n\to\infty} || q_n(y) - q(y) ||_{L_1[0,\infty)} = 0$.

Определение 1. Множество функций, удовлетворяющих свойствам 1–4, составляют класс Q_M.

Определение 2. За класс функций Q_M^a примем множество целых функций класса Q_M, таких, что $q(0) = A > 0$.

Теорема 1. Если функция $q(y)$ в задаче Штурма-Лиувилля принадлежит классу Q_M, то спектральная функция оператора l_q:

1) $\sigma(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{nn}(\lambda)$ в основном, то есть в точках непрерывности $\sigma_n(\lambda)$,

2) имеет вид $\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \sigma_1(\lambda), \text{ если } \lambda \ge 0, \\ 0, \text{ если } \lambda < 0, \end{cases}$

3) $\sigma(\lambda) \in C(\lambda \ge 0) \cap C^1(\lambda > 0)$; $\sigma_1(s), s = \sqrt{\lambda}$, монотонно убывает на интервале $(0, \infty)$,

4) $\sigma_1(s)$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Если последовательность финитных функций

$$q_n(y)=\begin{cases} q(y), \text{ если } y\in[0,b_n],\\ 0, \text{ если } y\in(b_n,\infty)\end{cases}$$

сходится по норме (или сильно сходится) к $q(y)\in L_1[0,\infty)$ и $q(y)$ непрерывна в каждом конечном интервале, то, по первой теореме Хелли, из последовательности соответствующих спектральных функций оператора $l_q\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$, …, $\sigma_n(\lambda)$, … – монотонных, неубывающих и ограниченных в совокупности на всюду плотном множестве D можно извлечь по крайней мере одну подпоследовательность $\sigma_{11}(\lambda)$, $\sigma_{22}(\lambda)$, …, $\sigma_{nn}(\lambda)$, …, сходящуюся в основном к некоторой неубывающей функции $\sigma(\lambda)$ (то есть в точках непрерывности $\sigma(\lambda)$) [4, с. 236]. Впоследствии мы всегда будем считать, что функции $\sigma_n(\lambda)$ удовлетворяют дополнительному условию $\sigma_n(-\infty)=0$ и непрерывны слева $\sigma_n(\lambda-0)=\sigma_n(\lambda)$. По второй обобщённой теореме Хелли [4, с. 239]:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\sigma_n(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\sigma(\lambda),$$

если $f(\lambda)$ непрерывна и ограничена на всей прямой $-\infty<\lambda<\infty$, а последовательность ограниченных в совокупности, неубывающих функций $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$, …, $\sigma_n(\lambda)$, … сходится в основном к функции $\sigma_n(\lambda)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(-\infty)=\sigma(-\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(\infty)=\sigma(\infty)$.

Построим спектральную функцию оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(y)\in Q_M$. Преобразуем собственную функцию $\varphi_n(y,\lambda)$ – решение задачи (1)–(2) – к более удобному для исследований виду.

$$\varphi_n(y,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^y\sin\sqrt{\lambda}(y-\tau)q_n(\tau)\varphi_n(\tau,\lambda)d\tau=\cos\sqrt{\lambda}y+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty(\sin\sqrt{\lambda}y\cos\sqrt{\lambda}\tau-\cos\sqrt{\lambda}y\sin\sqrt{\lambda}\tau)q_n(\tau)\varphi_n(\tau,\lambda)d\tau-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_y^\infty\sin\sqrt{\lambda}(y-\tau)\times$$

$$\times q_n(\tau)\varphi_n(\tau,\lambda)d\tau=\mu_n(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}y+\nu_n(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}y+o(1)=q_n(\tau)\varphi_n(\tau,\lambda)d\tau=$$

$$=\mu_n(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}y+\nu_n(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}y+o(1)=\frac{\mu_n(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}y+\nu_n(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\mu_n^2(\lambda)+\nu_n^2(\lambda)}}\times$$

$$\times\sqrt{\mu_n^2(\lambda)+\nu_n^2(\lambda)}+o(1)=\left[\sin\delta_n(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}y+\cos\delta_n(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}y\right]\times$$

$$\times\sqrt{\mu_n^2(\lambda)+\nu_n^2(\lambda)}+o(1)=\sin\left[\delta_n(\lambda)+\sqrt{\lambda}y\right]\cdot\sqrt{\mu_n^2(\lambda)+\nu_n^2(\lambda)}+o(1),$$

где

$$\mu_n(\lambda)=1-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty sin\sqrt{\lambda}\tau\cdot q_n(\tau)\varphi_n(\tau,\lambda)d\tau,$$

$$\nu_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} cos\sqrt{\lambda}\tau \cdot q_n(\tau) \varphi_n(\tau, \lambda) d\tau.$$

Функции $\mu_n(\lambda)$ и $\nu_n(\lambda)$ одновременно в нуль не обращаются [5, с. 269].

$$\sin\delta_n(\lambda) = \frac{\mu_n(\lambda)}{\sqrt{\mu_n^2(\lambda) + \nu_n^2(\lambda)}}, \cos\delta_n(\lambda) = \frac{\nu_n(\lambda)}{\sqrt{\mu_n^2(\lambda) + \nu_n^2(\lambda)}}.$$

Выведем аналитическую формулу для $\sigma(\lambda)$ и докажем справедливость неравенства:

$$\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda) > 1. \tag{4}$$

Запишем изменение спектральной функции $\sigma_b(\lambda)$ в интервале $(\lambda, \lambda + \Delta]$ интегралом Стилтьеса:

$$\Delta\sigma_b(\lambda) = \sigma_b(\lambda + \Delta) - \sigma_b(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} d\ \sigma_b(\lambda) \tag{5}$$

и по определению

$$\Delta\sigma_b(\lambda) = \Sigma_{\lambda < \lambda_{n,b} \le \lambda + Ä} \frac{1}{\varphi_n(y, \lambda)^2} =$$

$$= \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \le \lambda + Ä} \frac{\lambda_{n+1,b} - \lambda_{n,b}}{b\left(\sqrt{\lambda_{n+1,b}} - \sqrt{\lambda_{n,b}}\right)\left(\sqrt{\lambda_{n+1,b}} + \sqrt{\lambda_{n,b}}\right)\ \frac{1}{b}\int_0^b \varphi_n^2(y, \lambda_{n,b}) dy} =$$

$$= \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} \le \lambda + Ä} \frac{\lambda_{n+1,b} - \lambda_{n,b}}{b\left(\frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right)\right)\left(\sqrt{\lambda_{n+1,b}} + \sqrt{\lambda_{n,b}}\right)\ \frac{1}{b}\int_0^b \varphi_n^2(y, \lambda_{n,b}) dy}. \tag{6}$$

В преобразованиях использована асимптотическая формула для собственных значений [5, с. 270]:

$$\sqrt{\lambda_{n+1,b}} - \sqrt{\lambda_{n,b}} = \frac{\pi}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right), n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{b}\int_0^b \varphi_n^2(y, \lambda_{n,b}) dy = \frac{1}{b}\left[\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + \nu_n^2(\lambda_{n,b})\right] \int_0^b sin^2\left[\delta_n(\lambda_{n,b}) + \sqrt{\lambda_{n,b}}\, y\right] dy +$$

$$+ o(1) = \frac{1}{2}\left[\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + \nu_n^2(\lambda_{n,b})\right] - \frac{\mu_n^2(\lambda_{n,b}) + \nu_n^2(\lambda_{n,b})}{2b\sqrt{\lambda_{n,b}}} \sin\sqrt{\lambda_{n,b}} \times$$

$$\times b\cos\left[2\delta_n(\lambda_{n,b}) + \sqrt{\lambda_{n,b}}\, b\right] + o(1)$$

и подставим в формулу (6). Тогда

$$\Delta\sigma_b(\lambda)=\sum_{\lambda<\lambda_{n,b}\le\lambda+\ddot{A}}\frac{\lambda_{n+1,b}-\lambda_{n,b}}{b\left(\frac{\pi}{b}+o\left(\frac{1}{b}\right)\right)\left(\sqrt{\lambda_{n+1,b}}+\sqrt{\lambda_{n,b}}\right)}\cdot 1/\left(\frac{1}{2}\left[\mu_n^2(\lambda_{n,b})+\nu_n^2(\lambda_{n,b})\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_n^2(\lambda_{n,b})+\nu_n^2(\lambda_{n,b})}{2b\cdot\sqrt{\lambda_{n,b}}}sin\sqrt{\lambda_{n,b}}b cos\left[2\delta_n(\lambda_{n,b})+\sqrt{\lambda_{n,b}}b\right]+o(1)\right).$$

В равенстве (5) перейдём к пределу, учитывая полученный результат и вторую теорему Хелли:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta}d\,\sigma_b(\lambda)=\lim_{b\to\infty}\,\Delta\sigma_b(\lambda)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta}\frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}\left[\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\right]}=\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta}d\,\sigma(\lambda).$$

Из последнего равенства выводим дифференциал спектральной функции

$$d\sigma(\lambda)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}\left[\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\right]}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d\sqrt{\lambda}}{\left[\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\right]}.$$

Функции

$$\mu(\lambda)=1-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty sin\sqrt{\lambda}\tau\cdot q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau=1-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}g_1(\lambda), \quad (8)$$

$$\nu(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty cos\sqrt{\lambda}\tau\cdot q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}g_2(\lambda) \quad (9)$$

являются непрерывными функциями $\sqrt{\lambda}=s,$ так как интегралы $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$, в формулах (8) и (9) равномерно сходятся при $s\ge\rho>0$. Приведём $d\sigma(\lambda)$ к виду:

$$d\sigma(\lambda)=\frac{2}{\pi}\left[1+\frac{1}{\left[\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\right]}-1\right]d\sqrt{\lambda}=\frac{2}{\pi}d\sqrt{\lambda}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\left[\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\right]}{\left[\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\right]}d\sqrt{\lambda}=d\sigma_0+d\sigma_1=\left[\frac{2}{\pi}+\sigma_1'(\lambda)\right]d\sqrt{\lambda}>0. \quad (10)$$

Тогда $\sigma(\lambda)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma_1(\lambda),\text{если}\,\lambda\ge 0,\\ 0,\text{если}\,\lambda<0.\end{cases}$

Нетрудно заметить, что $\mu(\lambda)$, $\nu(\lambda)$, $\sigma_1(\lambda)$ фактически зависят от аргумента $s=\sqrt{\lambda},$ поэтому:

$$\sigma_1'(s)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\left[\mu^2(s)+\nu^2(s)\right]}{\left[\mu^2(s)+\nu^2(s)\right]}. \qquad (11)$$

Из определения спектральной функции и формулы (7) следует, что

$$\Delta\sigma_b(\lambda)<\Delta\sigma_{0,b}(\lambda)=\frac{2}{b}+o\left(\frac{1}{b}\right),$$

где $\sigma_{0,b}(\lambda)$ – спектральная функция оператора l_q с коэффициентом $q(y = 0)$, $y \in [0,b]$

Тогда $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d\sqrt{\lambda}}{\left[\mu^2(\lambda)+\nu^2(\lambda)\right]}<\frac{2}{\pi}\cdot d\sqrt{\lambda}$ и для всех $\lambda > 0$ неравенство (4) имеет место: $\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda) > 1$.

Отметим свойства $\sigma_1'(s)$

1. $(\ )$ непрерывна при $s>0.\ \lim\limits_{s\to\infty}\sigma_1'(s)=0.$

$$\lim_{s\to 0+}\sigma_1'(s)=\lim_{s\to 0+}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2sg_1(s)-g_1^2(s)-g_2^2(s)}{s^2-2sg_1(s)+g_1^2(s)+g_2^2(s)}=-\frac{2}{\pi}.$$

2. $\sigma_1(s)$ монотонно убывает. В силу (4) и (11) $\sigma_1'(s)<0$.

3. $\sigma_1(s)$ – абсолютно непрерывная функция. В силу неравенств (4), (10) и (11) $-\frac{2}{\pi}<\sigma_1'(s)<0.$ Функции с ограниченной производной составляют класс абсолютно непрерывных функций [6, с. 194].

4. Любая абсолютно непрерывная функция является функцией ограниченной вариации и имеет абсолютно интегрируемую производную:

$$\int_0^\infty\left|\sigma_1'(s)\right|ds=\sigma_1'(s)_{L_{1[0,\infty)}}=\left|V_0^\infty\sigma_1(s)\right|.$$

Определение 3. Совокупность спектральных функций оператора Штурма – Лиувилля, удовлетворяющих условиям 1)-4) теоремы 1, составляет класс функций σ.

Теорема 2. Если функция $q(y)$ в задаче Штурма-Лиувилля принадлежит классу Q_M^a, то соответствующая спектральная функция оператора $l_q\sigma(\lambda) \in \sigma$ и имеет целую функцию $\sigma_1'(\lambda)$, $\lambda = s^2$, в интервале $[0,\infty) \ni \lambda$. $\sigma_1'(0)=\lim\limits_{s\to 0+}\sigma_1'(s)=-\frac{2}{\pi}.$

Обратное утверждение верно.

Доказательство. Формула (11) $\sigma_1'(s)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\left[\mu^2(s)+\nu^2(s)\right]}{\left[\mu^2(s)+\nu^2(s)\right]}$, где $\mu(s)$ и $\nu(s)$ определены равенствами (7) и (8), устанавливает взаимно однозначное соответствие между $q(y)$ и $\sigma_1'(s)$. Функция $\sigma_1'(s)$ доопределена по непрерывности в нуле справа и в силу (11) обладает свойством четности, как если бы эта функция была продолжена на отрицательную полуось.

Как отмечено выше, $\mu^2(s) + \nu^2(s) \neq 0$ ни при каком значении s.

Из классических источников, например [7, с. 83], известно, что аналитическая функция в точке представляется в окрестности этой точки в виде степенного ряда. Всякую целую функцию в области D можно разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n$, сходящийся во всей области D и обратно, всякая функция, представимая в D сходящимся степенным рядом, является целой. Запишем формулу (11) в виде

$$\sigma_1'(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2sg_1(s) - g_1^2(s) - g_2^2(s)}{s^2 - 2sg_1(s) + g_1^2(s) + g_2^2(s)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2sg_1(s) - g_1^2(s) - g_2^2(s)}{\left(s - g_1(s)\right)^2 + g_2^2(s)}.$$

Если $q(y)$ – целая функция, то $g_1(s)$ и $g_2(s)$, а также $\varphi(\tau, s)$ являются целыми. Функция $f_2(s) = \dfrac{1}{\left(s - g_1(s)\right)^2 + g_2^2(s)}$ может быть разложена по степеням s в окрестности точки $s = 0$. $f_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n$, причём $b_0 \neq 0$.

Функция $f_1(s) = 2sg_1(s) - g_1^2(s) - g_2^2(s)$ также представима степенным рядом с центром в нуле $f_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$. Предположим, что $\sigma_1'(s)$ продолжена на отрицательную полуось, тогда, в силу четности $\sigma_1'(s)$, ряд Маклорена для $\sigma_1'(s)$ содержит только чётные степени s.

$$\sigma_1'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\sqrt{\lambda}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = \sigma_1'(\lambda);$$

$$c_0 = \lim_{\lambda \to 0+} \sigma_1'(\lambda), c_1 = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{\sigma_1''(\lambda)}{1!}, \ldots, c_n = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{\sigma_1^{(n+1)}(\lambda)}{n!}, \ldots -$$

коэффициенты разложения. $\sigma_1'(\lambda) -$ аналитическая в точке $\lambda = 0$, так как на полупрямой $\lambda > 0$ она представляется сходящимся степенным рядом. σ_1' – функция, целая по аргументу λ.

Доказательство обратного утверждения непосредственно следует из схемы восстановления $q(y)$ по известной спектральной функции [8, с. 418].

Определение 4. Совокупность спектральных функций из класса σ с целой функцией $\sigma_1'(\lambda)$ на полупрямой $\lambda \geq 0$ составляет класс σ^a.

$$\lim_{\lambda\to 0+}\sigma_1'(\lambda)=-\frac{2}{\pi}.$$

Замечание. Собственные числа $\lambda_{n,b}$ оператора l_q обладают свойством: $\lambda_{n,b}\geq m$, где m – наименьшее значение функции $\dfrac{q(y)}{r(y)}$ в интервале $[0,b]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\lambda_{n,b} = \lambda_n(b)$ [9, с.169]. При $y \geq b^*$ функция $q(y)$ принимает отрицательные значения и монотонно стремится к нулю: $q(y)=o\left(-\dfrac{1}{y^2}\right), y\to\infty$. Следовательно, $\lambda = 0$является правой предельной точкой спектра. Это утверждение доказано в работе [10, с. 7–8].

Теорема 3. Между классами функций Q_M и σ, Q_M^a и σ^a устанавливается взаимно однозначное соответствие [11].

Результаты исследований по теме «Обратная задача Штурма-Лиувилля в сингулярном случае» опубликованы также в работах автора [12–14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980. 88 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов ВУЗов. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 458 с.
3. Кабанихин С.И., Криворотько О.И. Сингулярное разложение в некорректных задачах: учебник для ВУЗов. Усть-Каменогорск, ВКГТУ, НГУ, 2014. 218 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 400 с.
5. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970. 671 с.
6. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968. 288 с.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
8. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
9. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1979. 191 с.
10. Шабанова Г.И. Исследование обратной задачи Штурма-Лиувилля в сингулярном случае // СибАК. Сборник статей по материалам XXXI научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире». Новосибирск. 2015. 6 (30). С. 6–16.
11. Шабанова Г.И. Некоторые классы функций, связанные с сингулярной задачей Штурма-Лиувилля // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Омск: Издательство СибАДИ. 2013, № 4 (32). С. 108–113.
12. Шабанова Г.И. Особенности и классификация спектральных функций оператора Штурма-Лиувилля // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Омск: Издательство СибАДИ. 2013. № 6 (34). С. 98–103.
13. Шабанова Г.И. Восстановление оператора Штурма-Лиувилля по его спектральной функции // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Омск. Издательство СибАДИ. 2014. № 1 (35). С. 109–113.

14. G. Schabanowa. The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences, May-June 2015, № 5–6. pp. 62–67.

REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M., Reznitskaya K.G., Yakhno V.G. *Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoi fiziki* [One-dimensional inverse problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka Publ., Sib. dep. 1980. 88 p.
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi: uchebnik dlya studentov VUZov* [Inverse and ill-posed problems: a textbook for University students]. Novosibirsk, Siberian scientific Publ., 2009. 458 p.
3. Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I. *Singulyarnoe razlozhenie v nekorrektnykh zadachakh: uchebnik dlya VUZov* [Singular value decomposition in incorrect problems: a textbook for high schools]. Ust-Kamenogorsk, EKSTU, NSU Publ., 2014. 218 p.
4. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostei* [Course of probability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 400 p.
5. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu* [Introduction to spectral theory]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 671 p.
6. Sobolev V.I. *Lektsii po dopolnitel'nym glavam matematicheskogo analiza* [Lectures on additional chapters of mathematical analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 288 p.
7. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p.
8. Naimark M.A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p.
9. Tslaf L.YA. *Variatsionnoe ischislenie i integral'nye uravneniya* [Calculus of variations and integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 191 p.
10. Shabanova G.I. The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. In: *SibAK. Sbornik statei po materialam XXXI nauchno-prakticheskoi konferentsii «Estestvennye i matematicheskie nauki v sovremennom mire»* [Siberian Academy. The proceedings of the XXXI scientific-practical conference "Natural and mathematical Sciences in the modern world"]. 2015, pp. 6–16.
11. Shabanova G.I. Some classes of functions associated with singular Sturm-Liouville. In: *Vestnik Sibirskoi gosudarstvennoi avtomobil'no-dorozhnoi akademii* [Bulletin of Siberian State Automobile and Highway Academy]. 2013, no. 4 (32), pp. 108–113.
12. Shabanova G.I. Features and classification of spectral functions of the operator of Sturm-Liouville. In: *Vestnik Sibirskoi gosudarstvennoi avtomobil'no-dorozhnoi akademii* [Bulletin of Siberian State Automobile and Highway Academy]. 2013, no. 6 (34), pp. 98–103.
13. Shabanova G.I. The restoration of the operator of Sturm-Liouville spectral functions. In: *Vestnik Sibirskoi gosudarstvennoi avtomobil'no-dorozhnoi akademii* [Bulletin of Siberian State Automobile and Highway Academy]. 2014, no. 1 (35), pp. 109–113.
14. G. Schabanowa. The study of the inverse Sturm-Liouville problem in the singular case. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences, May-June 2015, no. 5–6, pp. 62–67.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Шабанова Галина Ивановна – старший преподаватель кафедры высшей математики Сибирской автомобильно-дорожной академии «СибАДИ»;
e-mail: gal_schabanowa2014@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Galina Schabanova – senior lecturer at the Department of high mathematics; Siberian Automobile and Pighway Academy (“SibADI”);
e-mail: gal_schabanowa2014@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Шабанова Г. И. Свойства спектральной функции оператора Штурма – Лиувилля // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 18–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-18-27.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

G. Schabanowa. Some properties of the spectral function of the Sturm – Liouville operator. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 18–27.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-18-27.