УДК 533.72
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-28-39

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ БОЗЕ–ГАЗОВ

Бедрикова Е.А., Латышев А.В.
Московский государственный областной университет,
105005, Москва, ул. Радио, 10а, Российская Федерация

Аннотация. Продолжается исследование решения полупространственной второй задачи Стокса[1] для бозе-газа. Вторая задача Стокса рассматривается в полупространстве и состоит в изучении сдвиговых волн, генерируемых колеблющейся плоскостью, ограничивающей бозе-газ. Доказано существование и единственность разложения решения этой задачи в виде спектрального разложения по собственным функциям (или решениям) соответствующего характеристического уравнения. В основе доказательства лежит краевая задача Римана для аналитических функций комплексного переменного.

Ключевые слова: вторая задача Стокса, бозе-газ, собственные функции, характеристическое уравнение, разложение по собственным функциям.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION TO THE SECOND STOKES PROBLEM FOR BOSE GASES

E. Bedrikova, A. Latyshev
Moscow Region State University
ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. Research of the decision of half-space second Stokes' problem proceeds for bose-gas. Second Stokes' problem in half-space and consists in studying of the shift waves generated by the fluctuating plane, limiting bose-gas, is considered. Existence and uniqueness of expansion of the decision of this problem in the form of spectral decomposition on eigen functions (or decisions) the corresponding characteristic equation is proved. At the heart of the proof regional Riemann' problem for analytical functions of the complex variable lays**.** The analytical decision of second Stokes' problem for bose-gas is found.

Key words: the second Stokes problem, Bose gas, eigen solutions of kinetic equation, characteristic equation, dispersion function.

[1] См. Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика-Математика, 2016, № 2.

Проблема движения газа над колеблющейся поверхностью является весьма актуальной в связи с развитием современных технологий [1–8]. Такая проблема относится к классу фундаментальных проблем, называемых «Вторая задача Стокса». Эта задача была впервые поставлена свыше 150 лет тому назад для колеблющейся стенки в сплошной среде.

Настоящая статья является продолжением нашей работы [9]. В работе [9] нелинейное модельное кинетическое уравнение для бозе-газа линеаризуется по малому параметру, который является отношением скорости газа к его тепловой скорости (имеющей порядок скорости звука в бозе-газе). Сформулирована полупространственная граничная задача. Найдены собственные решения дискретного и непрерывного спектров. Общее решение задачи представлено в виде разложения по собственным решениям соответствующего характеристического уравнения.

В настоящей работе доказана теорема о существовании и единственности решения, представленного в виде разложения по собственным решениям, отвечающим непрерывному и дискретному спектрам.

Пусть разреженный одноатомный бозе-газ находится над твёрдой плоской границей в полупространстве $x > 0$. Граница совершает гармонические колебания вдоль оси y по закону:

$$u_s(t) = u_0 e^{-i\omega t},$$

где u_0 – амплитуда колебания газа, которая является постоянной величиной.

Задача сводится к решению кинетического уравнения

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + z_0 h(x_1,\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu',\alpha) h(x_1,\mu') d\mu',\; z_0 = 1 - i\omega_1, \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$h(0,\mu) = 2qU_0 + (1-q)h(0,-\mu),\; \mu > 0, \tag{2}$$

$$h(x_1 \to \infty, \mu) = 0. \tag{3}$$

В равенствах (1) – (3) введены обозначения:

$$K_B(\mu,\alpha) = \frac{\ln(1-\exp(\alpha-\mu^2))}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln(1-\exp(\alpha-\tau^2)) d\tau},\; x_1 = xv\sqrt{\beta},$$

$v = 1/\tau$ – эффективная частота столкновений молекул бозе-газа, τ – время между двумя последовательными столкновениями газовых молекул, $x_1 = xv\sqrt{\beta}$, – тепловая скорость молекул, $\beta = \dfrac{m}{2kT}$, m и T – масса молекулы и температура, k – постоянная Больцмана, $\alpha = \dfrac{\mu}{kT}$, μ – химический потенциал газа.

В [9] показано, что уравнение (1) имеет континуальное семейство решений

$$h_\eta(x_1,\mu)=\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu),$$

где η – спектральный параметр (комплексный),

$$\Phi(\eta,\mu)=\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\Lambda(\eta,\alpha)\delta(\eta-\mu)}{K_B(\eta,\alpha)},$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, $\Lambda(z,\alpha)$ – дисперсионная функция задачи, символ $P(1/x)$ означает главное значение интеграла от $(1/x)$,

$$\Lambda(z,\alpha)=-i\omega_1+\lambda_0(z,\alpha),$$

$$\lambda_0(z,\alpha)=1+z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_B(\tau,\alpha)d\tau}{\tau-z}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_B(\tau,\alpha)\tau\,d\tau}{\tau-z}.$$

Кроме того, в [9] также показано, что на полуплоскости $\{\omega_1\geq 0,\ \omega_1=\omega\tau,\ \alpha<0\}$ существует линия критических частот $\omega_1=\omega_1^*(\alpha)$, такая, что при $0\leq\omega_1<\omega_1^*(\alpha)$ существует дискретный спектр характеристического уравнения, состоящий из двух нулей (дискретного уравнения) $\{\pm\eta_0(\omega_1,\alpha)\}$. Этим нулям отвечают собственные решения уравнения (1):

$$h_{\pm\eta_0}(x_1,\mu)=\Phi\left(\pm\eta_0(\omega_1,\alpha),\exp\left(-\frac{x_1 z_0}{\pm\eta_0}\right)\right),$$

где

$$\Phi=\frac{\eta_0(\omega_1,\alpha)}{\eta_0(\omega_1,\alpha)-\mu}.$$

При $\omega_1>\omega_1^*(\alpha)$ дисперсионная функция нулей не имеет, то есть дискретный спектр пуст.

Отметим, что

$$\omega_1^*(\alpha)=\max_{\mu>0}\sqrt{s^2(\mu,\alpha)-\lambda_0^2(\mu,\alpha)},$$

где $s(\mu,\alpha)=\pi\mu K_B(\mu,\alpha)$.

Кривая $\omega_1=\omega_1^*(\alpha)$ разбивает полуплоскость параметров задачи $\{\omega_1\geq 0,\ \alpha<0\}$ на две области D^+ и D^-, такие, что если $(\omega_1,\alpha)\in D^+$, то дисперсионная функция имеет два нуля, а если $(\omega_1,\alpha)\in D^-$, то дисперсионная функция нулей в комплексной плоскости не имеет, за исключением, быть может, её разреза – действительной оси.

Лемма. Если $(\omega_1,\alpha)\in D^-$, то $\aleph = 0$, т.е. $ind\dfrac{\Lambda^+(\mu,\alpha)}{\Lambda^-(\mu,\alpha)}=0$, если $(\omega_1,\alpha)\in D^+$, то $\aleph = 1$, т.е. $ind\dfrac{\Lambda^+(\mu,\alpha)}{\Lambda^-(\mu,\alpha)}=1$, где $\boldsymbol{\aleph}=\boldsymbol{\aleph}\left(\dfrac{\Lambda^+}{\Lambda^-}\right)=ind\dfrac{\Lambda^+(\mu,\alpha)}{\Lambda^-(\mu,\alpha)}$.

Здесь ind $f(\mu)$ означает приращение функции $f(\mu)$ на положительной действительной полуоси, делённое на 2π.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Задача с граничными условиями (1)–(3) имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным решениям исходного уравнения (1)

$$h(x_1,\mu)=A_0\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\eta_0}\right)\Phi(\eta_0,\mu)+\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu)A(\eta,\mu)\,d\eta. \qquad (4)$$

Здесь $A(\eta, \alpha)$ – неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра $A_0(\omega_1, \alpha)$ – коэффициент дискретного спектра, неизвестная постоянная, причем $A_0(\omega_1, \alpha) = 0$, если $(\omega_1, \alpha) \in D^-$.

Доказательство. По построению собственных решений равенство (4) является решением уравнения (1). Подставляя собственные функции в (4), получаем явное разложение решения:

$$h(x_1,\mu)=\frac{\eta_0A_0}{\eta_0-\mu}\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\eta_0}\right)+\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\eta}\right)\frac{\eta A(\eta,\alpha)\,d\eta}{\eta-\mu}+$$
$$+\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\mu}\right)\frac{\Lambda(\mu,\alpha)}{K_B(\mu,\alpha)}A(\mu,\alpha)\theta_+(\mu), \qquad (5)$$

где $\theta_+(\mu)$ – функция Хэвисайда: $\theta_+(\mu) = 1$, $\mu > 0$, $\theta_+(\mu) = 0$, $\mu < 0$.

Решение (4) (или (5)) содержит неизвестную постоянную $A_0(\omega_1, \alpha)$ и неизвестную функцию $A(\eta, \alpha)$.

Эти неизвестные находятся из граничных условий.

Заметим, что решение (5) автоматически удовлетворяет граничному условию (3) – условие «вдали от стенки».

Подставим решение (5) в граничное условие (2). Получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$2U_0=A_0\frac{\eta_0}{\eta_0-\mu}+\int\limits_0^\infty\frac{\eta A(\eta,\alpha)\,d\eta}{\eta-\mu}+\frac{\Lambda(\mu,\alpha)}{K_B(\mu,\alpha)}A(\mu,\alpha),\ \mu>0. \qquad (6)$$

Введём вспомогательную функцию

$$N(z,\alpha)=\int\limits_0^\infty\frac{\eta A(\eta,\alpha)}{\eta-z}d\eta\,, \qquad (7)$$

аналитическую в комплексной плоскости C, за исключением точек разреза $[0, +\infty]$.

Граничные значения этой функции (7) сверху и снизу на действительной полуоси связаны формулами Сохоцкого [10].

$$N^+(\mu,\alpha)-N^-(\mu,\alpha)=2\pi i\mu A(\mu,\alpha),\ \mu>0,$$

$$\frac{N^+(\mu,\alpha)+N^-(\mu,\alpha)}{2}=N(\mu,\alpha),\ N(\mu,\alpha)=\int\limits_0^\infty\frac{\eta A(\eta,\alpha)}{\eta-\mu}d\eta,$$

где $N(\mu, \alpha)$ – особый интеграл в смысле главного значения по Коши.

Согласно формулам Сохоцкого граничные значения дисперсионной функции связаны соотношениями:

$$\Lambda^+(\mu,\alpha)-\Lambda^-(\mu,\alpha)=2\pi i\mu K_B(\mu,\alpha),\ -\infty<\mu<+\infty,$$

$$\frac{\Lambda^+(\mu,\alpha)+\Lambda^-(\mu,\alpha)}{2}=\Lambda(\mu,\alpha),$$

где $\Lambda(\mu,\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau K_B(\tau,\alpha)}{\tau-\mu}d\tau,\ -\infty<\mu<+\infty,$ причём последний интеграл понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

С помощью приведённых выше граничных значений вспомогательной и дисперсионной функции преобразуем сингулярное уравнение (6) к краевому условию:

$$2U_0=A_0\frac{\eta_0}{\eta_0-\mu}+\frac{1}{2}\left(N^+(\mu,\alpha)+N^-(\mu,\alpha)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\Lambda^+(\mu,\alpha)+\Lambda^-(\mu,\alpha)}{\Lambda^+(\mu,\alpha)-\Lambda^-(\mu,\alpha)}\left(N^+(\mu,\alpha)-N^-(\mu,\alpha)\right),\ \mu>0,$$

Это условие преобразуем к виду:

$$\Lambda^+(\mu,\alpha)\left(N^+(\mu,\alpha)+\frac{A_0\eta_0}{\eta_0-\mu}-2U_0\right)=$$
$$=\Lambda^-(\mu,\alpha)\left(N^-(\mu,\alpha)+\frac{A_0\eta_0}{\eta_0-\mu}-2U_0\right),\ \mu>0. \tag{8}$$

Краевое условие (8) представим в виде неоднородной краевой задачи Римана:

$$\frac{\Lambda^+(\mu,\alpha)}{\Lambda^-(\mu,\alpha)}\left(N^+(\mu,\alpha)+\frac{A_0\eta_0}{\eta_0-\mu}-2U_0\right)=N^-(\mu,\alpha)+\frac{A_0\eta_0}{\eta_0-\mu}-2U_0,\ \mu>0. \tag{9}$$

Для решения краевой задачи (9) решим сначала соответствующую однородную краевую задачу Римана:

$$X^+(\mu,\alpha)=G(\mu,\alpha)X^-(\mu,\alpha),\ \mu>0. \tag{10}$$

Коэффициентом краевой задачи (10) является соотношение:

$$G(\mu,\alpha)=\frac{\Lambda^+(\mu,\alpha)}{\Lambda^-(\mu,\alpha)}.$$

Логарифмируя краевое условие (10), получаем:

$$\ln X^+(\mu,\alpha)-\ln X^-(\mu,\alpha)=\ln\left|G(\mu,\alpha)\right|+i(\theta(\mu)+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\quad (11)$$

где $\theta(\mu)=\arg G(\mu,\alpha)$ – главная ветвь аргумента, фиксированная в нуле условием $\arg G(0,\alpha)=0$.

В явном виде

$$\arg G(\mu,\alpha)=\arg\frac{\Lambda(\mu,\alpha)-i\omega_1+i\pi\mu K_B(\mu,\alpha)}{\Lambda(\mu,\alpha)-i\omega_1-i\pi\mu K_B(\mu,\alpha)}.$$

Далее следует рассмотреть два случая: $(\omega_1,\alpha)\in D^+$ и $(\omega_1,\alpha)\in D^-$. Рассмотрим сначала случай $(\omega_1,\alpha)\in D^-$. Здесь, согласно выше изложенной лемме, $\aleph=0$, то есть $\theta(0)=\theta(+\infty)=0$. Тогда решение задачи (11), как «задачи о скачке», даётся интегралом типа Коши:

$$\ln X(z,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{\ln\left|G(\mu,\alpha)\right|+i\theta(\mu)}{\mu-z}d\mu.$$

Отсюда находим, что

$$X(z,\alpha)=e^{V(z,\alpha)},$$

где

$$V(z,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{\ln\left|G(\tau,\alpha)\right|+i\theta(\tau)}{\tau-z}d\tau.$$

Рассмотрим второй случай, когда $(\omega_1,\alpha)\in D^+$. В этом случае $\theta(0)=0$, $\theta(+\infty)=2\pi$.

Чтобы решение задачи (11) выражалось сходящимся интегралом, возьмем в правой части (11) $k=-1$. Тогда решение задачи (11) будет выражаться сходящимся интегралом типа Коши:

$$\ln X(z,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{\ln\left|G(\tau,\alpha)\right|+i(\theta(\tau)-2\pi)}{\tau-z}d\tau.$$

Обозначим

$$\tilde V(z,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{\ln\left|G(\tau,\alpha)\right|+i(\theta(\tau)-2\pi)}{\tau-z}d\tau.$$

Рассмотрим полученное решение

$$X(z,\alpha)=e^{\tilde V(z,\alpha)},\quad (12)$$

в окрестности начала координат

$$\tilde{V}(z,\alpha) = -\frac{i(\theta(0)-2\pi)}{2\pi i}\ln z = \ln z + \theta(z),$$

где $\theta(z)$ – ограниченная функция в окрестности начала координат.

Следовательно, при $z \to 0$, $X(z) \sim z$. В связи с этим переопределим решение (12) следующим образом:

$$X(z,\alpha) = \frac{1}{z}e^{\tilde{V}(z,\alpha)}. \qquad (13)$$

Теперь решение (10) не исчезает в начале координат.

С помощью решения задачи (10) преобразуем (9) к симметричному виду:

$$X^{+}(\mu,\alpha)\left(N^{+}(\mu,\alpha)+\frac{A_0\eta_0}{\eta_0-\mu}-2U_0\right)=$$

$$= X^{-}(\mu,\alpha)\left(N^{-}(\mu,\alpha)+\frac{A_0\eta_0}{\eta_0-\mu}-2U_0\right),\ \mu>0. \qquad (14)$$

Умножив обе части равенства (14) на (η_0–μ) и проведя преобразования, получим:

$$\left(\eta_0-\mu\right)X(\mu,\alpha)\left(N(\mu,\alpha)+\frac{A_0\eta_0}{\eta_0-\mu}-2U_0\right)\equiv C,$$

где C – произвольная постоянная.

Следовательно,

$$N(z,\alpha) = 2U_0 - \frac{A_0\eta_0}{\eta_0-z}+\frac{C}{\left(\eta_0-z\right)X(z,\alpha)}. \qquad (15)$$

Устраним полюс в точке $z = \eta_0$ у решения $N(z, \alpha)$ за счет выбора произвольной постоянной C. Для этого представим (15) в виде:

$$N(z,\alpha) = 2U_0 - \frac{1}{\eta_0-z}\left(-A_0\eta_0+\frac{C}{X(z,\alpha)}\right).$$

Отсюда видно, что для устранения полюса в точке η_0 необходимо потребовать, чтобы

$$C = A_0\eta_0 X(\eta_0).$$

Теперь решение (15) запишем в виде:

$$N(z,\alpha) = 2U_0 + \frac{A_0\eta_0}{\eta_0-z}\left(-1+\frac{X(\eta_0,\alpha)}{X(z,\alpha)}\right).$$

Потребуем, чтобы функция $N(z, \alpha)$ была исчезающей в окрестности бесконечно удалённой точки. Находя $N(\infty)$, получим:

$$N(\infty)=2U_0+\frac{A_0\eta_0X(\eta_0,\alpha)}{\lim\limits_{z\to\infty}(\eta_0-z)X(z,\alpha)}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{z\to\infty}(\eta_0-z)X(z,\alpha)=-\lim\limits_{z\to\infty}zX(z,\alpha)=-1.$

Таким образом, из условия $N(\infty)=2U_0-A_0\eta_0X(\eta_0,\alpha)=0$ находим, что:

$$A_0=\frac{2U_0}{\eta_0X(\eta_0,\alpha)}.$$

Окончательно находим, что

$$N(z,\alpha)=2U_0\left[1+\frac{1}{\eta_0-z}\left(\frac{1}{X(z,\alpha)}-\frac{1}{X(\eta_0,\alpha)}\right)\right]. \qquad (16)$$

Коэффициент непрерывного спектра найдём из формулы Сохоцкого для вспомогательных функций:

$$A(\eta,\alpha)=\frac{1}{2\pi i\eta}\left(N^+(\mu,\alpha)-N^-(\mu,\alpha)\right).$$

Здесь, согласно (16), граничные значения вспомогательной функции равны:

$$N^\pm(\mu,\alpha)=\left[2U_0+\frac{2U_0}{(\eta_0-\mu)}\frac{1}{X^\pm(\mu,\alpha)}-\frac{2U_0}{(\eta_0-\mu)X(\eta_0,\alpha)}\right],$$

где

$$X^\pm(\mu,\alpha)=\frac{1}{\mu}e^{V^\pm(\mu,\alpha)}=\frac{1}{\mu}e^{V(\mu,\alpha)\pm q(\mu,\alpha)}=X(\mu)e^{\pm q(\mu,\alpha)},$$

$$V^\pm(\mu,\alpha)=\pm\frac{1}{2}\Big[\ln\left|G(\mu,\alpha)\right|+i(\theta(\mu)-2\pi)\Big]+V(\mu,\alpha),$$

где

$$V(\mu,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{\ln\left|G(\tau,\alpha)\right|+i(\theta(\tau)-2\pi)}{\tau-\mu}d\tau,\ \mu\in(-\infty,+\infty),$$

$$q(\mu,\alpha)=\frac{1}{2}\Big[\ln\left|G(\mu,\alpha)\right|+i(\theta(\mu)-2\pi)\Big].$$

Причём интеграл понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

Теперь находим, что

$$N^+(\mu,\alpha)-N^-(\mu,\alpha)=\frac{2}{\eta\ -\mu}\left(\frac{1}{X^+(\mu,\alpha)}-\frac{1}{X^-(\mu)}\right)=$$

$$=\frac{2U_0}{\eta_0-\mu}\exp(-V(\mu,\alpha))[\exp(-q(\mu,\alpha))-\exp(q(\mu,\alpha))]=\frac{4U_0}{\eta_0-\mu}\frac{sh\,q(\mu,\alpha)}{(\mu,\alpha)}.$$

Итак, коэффициент непрерывного спектра равен:

$$A(\eta,\alpha)=-\frac{1}{\pi i\eta}\frac{2U_0}{(\eta_0-\eta)}\frac{sh\,q(\eta,\alpha)}{X(\eta,\alpha)}.$$

Рассмотрим случай, когда $\aleph=0$. В этом случае имеем задачу:

$$X^+(\mu,\alpha)\left(N^+(\mu,\alpha)-2U_0\right)=X^-(\mu,\alpha)\left(N^-(\mu,\alpha)-2U_0\right),\ \ \mu>0.$$

Отсюда получаем:

$$N(z,\alpha)=2U_0+\frac{C}{X(z,\alpha)}.$$

Из условия $N(\infty)=0$ находим, что $C=-2U_0$, следовательно,

$$N(z,\alpha)=2U_0\left(1-\frac{1}{X(z,\alpha)}\right).$$

Коэффициент непрерывного спектра равен:

$$A(\eta,\alpha)=-\frac{1}{2\pi i\eta}\left(N^+(\eta,\alpha)-N^-(\eta,\alpha)\right)=\frac{-2U_0}{2\pi i\eta}\left(\frac{1}{X^+(\eta,\alpha)}-\frac{1}{X^-(\eta,\alpha)}\right)=$$

$$=\frac{2U_0}{2\pi i\eta X(\eta,\alpha)}\left(e^{q(\eta,\alpha)}-e^{-q(\eta,\alpha)}\right)=\frac{2U_0 sh\,q(\eta,\alpha)}{2\pi i\eta X(\eta,\alpha)},$$

где

$$q(\tau,\alpha)=\frac{1}{2}\Big[\ln\left|G(\tau,\alpha)\right|+i\theta(\tau)\Big].$$

Итак, коэффициенты разложения (4) найдены в обоих случаях.

Единственность. Предположим, что помимо разложения (4) имеется ещё одно разложение решения граничной задачи (1)–(3):

$$h(x_1,\mu)=\tilde{A}_0\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\eta_0}\right)\Phi(\eta_0,\mu)+\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{x_1z_0}{\eta}\right)\Phi(\eta_0,\mu)\tilde{A}(\eta,\alpha)d\eta,$$

причём, по крайней мере, выполняется одно из неравенств:

$$A_0\neq\tilde{A}_0,\qquad A(\eta,\alpha)\neq\tilde{A}(\eta,\alpha).\tag{17}$$

Подставим решение (17) в граничные условия (2). Получаем систему интегральных сингулярных уравнений с ядром Коши:

$$2U_0 = \tilde{A}_0 \frac{\eta_0}{\eta_0 - \mu} + \int_0^\infty \frac{\eta \tilde{A}(\eta,\alpha)\, d\eta}{\eta - \mu} + \frac{\Lambda(\mu,\alpha)}{K_B(\mu,\alpha)} \tilde{A}(\mu,\alpha),\ \mu > 0. \qquad (18)$$

Составим разность уравнений (6) и (18):

$$\frac{\left(A_0 - \tilde{A}_0\right)\eta_0}{\eta_0 - \mu} + \int_0^\infty \frac{\eta\left(A(\eta,\alpha) - \tilde{A}(\eta,\alpha)\right) d\eta}{\eta - \mu} +$$
$$+ \frac{\Lambda(\mu,\alpha)\left(A(\mu,\alpha) - \tilde{A}(\mu,\alpha)\right)}{K_B(\mu,\alpha)} = 0,\ \mu > 0. \qquad (19)$$

Введём ещё одну вспомогательную функцию:

$$\tilde{N}(z,\alpha) = \int_0^\infty \frac{\eta \tilde{A}(\eta,\alpha)}{\eta - z} d\eta\ ,$$

Рассуждая, как и выше, получаем решение уравнения (19):

$$N(z,\alpha) - \tilde{N}(z,\alpha) = -\frac{(A_0 - \tilde{A}_0)\eta_0}{\eta_0 - z} + \frac{\tilde{N}}{(\eta_0 - z)X(z,\alpha)}.$$

Из условия $\tilde{N}(\infty) = N(\infty) = 0$ сразу находим, что $C = 0$, а устраняя полюс в точке $z = \eta_0$, находим, что $A_0 = \tilde{A}_0$. Это означает, что $\tilde{N}(z,\alpha) \equiv N(z,\alpha)$. Отсюда следует, что $A(\eta,\alpha) = \tilde{A}(\eta,\alpha)$. Единственность доказана. Таким образом, теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимова В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение второй задачи Стокса о поведении газа над колеблющейся поверхностью // Известия РАН. Серия: Механика жидкости газов. 2013. № 1. С. 125–140.
2. Акимова В.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Вторая задача Стокса с зеркально–диффузными граничными условиями // Известия ВУЗов. Серия. Физика. № 3, т. 56. 2013. С. 101–105.
3. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851), Math, and Phys. Papers III, 1–141, Cambridge, 1901.
4. Asghar S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T. Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid // Math. Probl. Eng. Vol. 2006, Article ID 72468, 8 p.
5. Siewert C.E., Sharipov F. Model equations in rarefied gas dynamics: viscous–slip and thermal–slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. No. 12. P. 4123–4129.
6. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Влияние свойств поверхности на характеристики сдвиговых волн // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 134–135.
7. Дудко В.В., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Генерация колеблющейся поверхностью сдвиговых волн в газе // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47. №. 2. С. 262–268.
8. Дудко В.В. Скольжение разреженного газа вдоль неподвижных и колеблющихся поверхностей: дисс. … канд. физ.-мат. наук. Москва, 2010. 108 с.

9. Бедрикова Е.А., Латышев А.В. Граничная задача о генерировании сдвиговых волн колеблющейся поверхностью в газах бозе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. №2. С. 18–28.
10. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории: монография. М.: Изд-во МГОУ. 2008. 280 с.

REFERENCES

1. Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analytical solution of the second Stokes problem on the behavior of a gas over an oscillating surface. In: Izvestiya RAN. Seriya: Mekhanika zhidkosti gazov [RAS News. Series: Mechanics of liquid gases]. 2013, no. 1, pp. 125–140.
2. Akimova V.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The second Stokes problem with mirror–diffuse boundary conditions. In: Izvestiya VUZov. Seriya: Fizika [Universities news. Series: Physics]. 2013, no. 3, vol. 56, pp. 101–105.
3. Stokes G.G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. IX, 8 A851), Math, and Phys. Papers III, 1–141, Cambridge, 1901.
4. Asghar S., Nadeem S., Hanif K., Hayat T. Analytic solution of Stokes second problem for second grade fluid // Math. Probl. Eng. Vol. 2006, Article ID 72468, 8 p.
5. Siewert C.E., Sharipov F. Model equations in rarefied gas dynamics: viscous–slip and thermal–slip coefficients // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. No. 12. P. 4123–4129.
6. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The influence of surface properties on the characteristics of shear waves. In: Zhurnal tekhnicheskoi fiziki [Journal of technical physics]. 2005, vol. 75, no. 4, pp. 134–135.
7. Dudko V.V., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. The generation of fluctuating surface shear waves in gas. In: Teplofizika vysokikh temperatur [Thermophysics of high temperatures]. 2009, vol. 47, no. 2, pp. 262–268.
8. Dudko V.V. Skol'zhenie razrezhennogo gaza vdol' nepodvizhnykh i koleblyushchikhsya poverkhnostei: diss. … kand. fiz.-mat. nauk [The slip of a rarefied gas along stationary and oscillating surfaces: PhD thesis in Physico-mathematical sciences]. Moscow, 2010. 108 p.
9. Bedrikova E.A., Latyshev A.V. The boundary problem of generation of shear waves by an oscillating surface in the Bose gases. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and mathematics]. 2016, no. 2, pp. 18–28.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Analiticheskie metody v kineticheskoi teorii: monografiya [Analytical methods in kinetic theory: a monograph]. Moscow, MRSU Publ., 2008. 280 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бедрикова Екатерина Алексеевна – старший преподаватель кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета,
e-mail: bedrikova@mail.ru

Латышев Анатолий Васильевич – д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, заслуженный деятель науки РФ,
e-mail: avlatyshev@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ekaterina Bedrikova – senior lecturer of the Department of the Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow Region State University;
e-mail: bedrikova@mail.ru

Anatoly Latyshev – doctor of physico-mathematical sciences, professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry at the Moscow Region State University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бедрикова Е.А., Латышев А.В. Существование и единственность решения второй задачи Стокса для бозе–газов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 28–39.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-28-39.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

E. Bedrikova, A. Latyshev. Existence and uniqueness of the decision of second Stokes' problem for bose-gases. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 28–39.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-28-39.