УДК 533.9.02
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-40-50

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА В ПРОБЛЕМЕ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЫ С РАВНОВЕСНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ФЕРМИ-ДИРАКА

***Латышев А.В.*, *Сулейманова С.Ш.***
*Московский государственный областной университет,*
*105005, Москва, ул. Радио, 10а, Российская Федерация*

***Аннотация.*** Аналитически решена задача о колебаниях электронной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в полупространстве. Применяются кинетическое уравнение Власова-Больцмана с интегралом столкновений типа БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) и уравнение Максвелла для электрического поля. Найдены моды Друде и Ван Кампена и сформулированы условия существования моды Дебая.

***Ключевые слова:*** уравнение Власова-Больцмана, уравнение Максвелла, частота столкновений, электромагнитное поле, моды Друде, Дебая, Ван Кампена, дисперсионная функция, краевая задача Римана.

# THE BOUNDARY VALUE RIEMANN PROBLEM IN THE PROBLEM ABOUT OSCILLATIONS OF A PLASMA WITH THE EQUILIBRIUM FERMI-DIRAC DISTRIBUTION

***A. Latyshev*, *S. Suleymanova***
*Moscow Region State University,*
*ul. Radio 10a, 105005 Moscow, Russian Federation*

***Abstract.*** The boundary problem about the behavior (oscillations) of electronic plasmas with an arbitrary degree of degeneration of the electronic gas in half-space is solved analytically. To this end, use is made of the Vlasov – Boltzmann equation with the integral of collisions of BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) type and Maxwell's equation for the electric field. Drude and Van Kampen modes are found and conditions for existence of the Debye mode are formulated.

***Keywords:*** Vlasov-Boltzmann equation; Maxwell's equation; frequency of collisions; electromagnetic field; Drude, Debaye, and Van Kampen modes; dispersion function; boundary value Riemann problem.

## Введение

В настоящей работе рассматривается краевая задача Римана, лежащая в основе аналитического решения задачи о колебаниях плазмы с равновесным распределением Ферми-Дирака, и поэтому вызывающая некоторый интерес. Используются кинетическое уравнение Власова-Больцмана с интегралом столкновений типа БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) и уравнение Максвелла для электрического поля.

Выяснена структура экранированного электрического поля. Оказалось, что существует область значений параметров задачи, в которой отсутствует мода Дебая.

Показано, что: во-первых, мода Друде, описывающая объёмную проводимость, существует при всех значениях параметров задачи; во-вторых, мода Дебая, описывающая экранировку электрического поля, существует при частотах колебания внешнего поля, меньших некоторой критической частоты, находящейся вблизи плазменного резонанса; в-третьих, моды Ван Кампена [1], представляющие собой смесь (хаотизацию) собственных решений Власова-Больцмана, также существуют при всех значениях параметров задачи. Оказалось, что моды Ван Кампена отвечают непрерывному спектру задачи, мода Друде – спектру, присоединённому к непрерывному.

## Постановка задачи

В работах [2–4] трехмерная задача о колебаниях плазмы была сведена к одномерной и односкоростной, и были получены следующие уравнения:

$$\mu\frac{\partial H}{\partial x_1}+w_0H\left(x_1,\mu\right)=\mu e\left(x_1\right)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}k\left(\mu',\alpha\right)H\left(x_1,\mu'\right)d\mu', \tag{1.1}$$

$$\frac{de\left(x_1\right)}{dx_1}=\grave{u}^{\,2}\left(\alpha\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}k\left(\mu',\alpha\right)H\left(x_1,\mu'\right)d\mu'. \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2):

$$w_0=1-i\frac{\omega}{\varepsilon\omega_p},\ \grave{u}^{\,2}\left(\alpha\right)=\frac{\omega_p^2}{\nu^2}\cdot\frac{s_0\left(\alpha\right)}{s_2\left(\alpha\right)}=\frac{\omega_p^2}{\nu^2}\cdot\frac{1}{r\left(\alpha\right)}=\frac{1}{\varepsilon^2r\left(\alpha\right)},$$

где

$$r\left(\alpha\right)=\frac{s_2\left(\alpha\right)}{s_0\left(\alpha\right)},\ \varepsilon=\frac{\nu}{\omega_p},\ s_n\left(\alpha\right)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\mu^n d\mu}{1+e^{\mu^2-\alpha}}.$$

Здесь $\omega_p$ – плазменная (ленгмюровская) частота. Известно, что частота плазменных колебаний, как правило, много больше частоты столкновений электронов в металле [5]. Поэтому в случае, когда $\omega \sim \omega_p$, выполняется условие $\omega >> \nu$.

Граничные условия для поля на поверхности плазмы и функции распределения имеют вид:

$$e\left(0\right)=1,\ H\left(0,\mu\right)=A,\ 0<\mu<1,$$

где $A$ – неизвестная постоянная.

Вдали от поверхности поле предполагается ограниченным:

$$e(+\infty)=e_\infty,\ \left|e(+\infty)\right|<+\infty.$$

Далее возьмём условие непротекания электронов через границу плазмы:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu' H(0,\mu')f_0(\mu',\alpha)d\mu'=0.$$

Найдём общее решение системы уравнений (1.1) и (1.2) с помощью разделения переменных согласно общему методу Фурье, используя следующую подстановку:

$$H_\eta(x,\mu)=\exp\left(-\frac{w_0x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu),\ e_\eta(x)=\exp\left(-\frac{w_0x}{\eta}\right)E(\eta), \tag{1.3}$$

где $\eta$ – спектральный параметр, или параметр разделения, вообще говоря комплексный. Подставим равенства (1.3) в уравнения (1.1) и (1.2). С помощью некоторых преобразований получаем:

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{E(\eta)}{w_0}\left(\eta\mu-\eta_1^2\right), \tag{1.4}$$

где $\eta_1^2\equiv\eta_1(\alpha)=w_0\varepsilon^2r(\alpha)$.

При $\eta\in(-\infty,+\infty)$ ищем решение уравнения (1.4) в пространстве обобщённых функций [6]. Собственные функции характеристического уравнения (1.4) представим в виде

$$\Phi(\eta,\mu)=\frac{E(\eta)}{w_0}\left[P\frac{\mu\eta-\eta_1^2}{\eta-\mu}-w_0\eta_1^2\frac{\Lambda(\eta)}{\eta k(\eta,\alpha)}\delta(\eta-\mu)\right], \tag{1.5}$$

В равенстве (1.5) $\eta\in(-\infty,+\infty)$, $\mu\in(-\infty,+\infty)$ множество значений $\eta$, заполняющих числовую прямую, называют непрерывным спектром характеристического уравнения; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; символ $Px^{-1}$ означает главное значение интеграла при интегрировании выражения $x^{-1}$; $\Lambda(z)$ – дисперсионная функция

$$\Lambda(z)=\Lambda(z,\Omega,\varepsilon,\alpha)=1+\frac{z}{w_0\eta_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta_1^2-\mu' z}{\mu'-z}k(\mu',\alpha)d\mu'.$$

Семейство собственных функций $\Phi(\eta,\mu)$ характеристического уравнения, отвечающих непрерывному спектру, называют «моды Ван Кампена» [1; 7].

Дисперсионную функцию задачи $\Lambda(z)$ можно представить следующим образом:

$$\Lambda(z)=1-\frac{1}{w_0}-\frac{z^2-\eta_1^2}{w_0\eta_1^2}\lambda_0(z,\alpha).$$

Здесь $\lambda_0(z,\alpha)=1+z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k(\mu,\alpha)d\mu}{\mu-z}$.

## Нули дисперсионной функции

Найдём нули дисперсионного уравнения

$$\frac{\Lambda(z)}{z}=0. \qquad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что значение дисперсионной функции в бесконечно удалённой точке равно:

$$\Lambda_\infty=\Lambda(\infty)=1-\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_0^2\varepsilon^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\Lambda_\infty=\frac{-i\nu\omega+\omega_p^2-\omega^2}{(\nu-i\omega)^2}\neq 0$$

при любых $\nu\neq 0$, то есть в любой столкновительной плазме.

Это значит, что точка $z_i=\infty$ является нулём дисперсионного уравнения. Можно считать, что эта точка принадлежит спектру, присоединённому к непрерывному спектру, составляющему открытую часть числовой оси. Точке $z_i=\infty$ отвечает следующее решение уравнения (1.4):

$$H_\infty(x,\mu)=\frac{E_\infty}{w_0}\cdot\mu,\ e_\infty=E_\infty. \qquad (2.2)$$

Здесь $E_\infty$ – произвольная постоянная.

Решение (2.2) называется модой Друде. Оно не зависит от химического потенциала и описывает объёмную проводимость плазмы полуметалла, рассмотренную Друде [8].

По определению, дискретным спектром характеристического уравнения (1.4) называется множество конечных комплексных нулей дисперсионного уравнения (2.1), не лежащих на действительной оси (разрезе дисперсионной функции).

Найдём нули дисперсионного уравнения. Для этого напишем разложение дисперсионной функции в асимптотический ряд Лорана:

$$\Lambda(z)=\Lambda_\infty+\frac{\Lambda_2}{z^2}+\frac{\Lambda_4}{z^4}+\ldots,\ z\to\infty. \qquad (2.3)$$

В (2.3) введены обозначения:

$$\Lambda_2=\frac{s_4(\alpha)-\eta_1^2s_2(\alpha)}{w_0\eta_1^2s_0(\alpha)},\ \Lambda_4=\frac{s_6(\alpha)-\eta_1^2s_4(\alpha)}{w_0\eta_1^2s_0(\alpha)},\ \ldots,\ s_n(\alpha)=\int\limits_0^\infty\mu^n f_0(\mu,\alpha)d\mu.$$

Из разложения (2.3) видно, что в окрестности бесконечно удалённой точки существует два нуля $\pm\eta_0$ дисперсионной функции $\Lambda(z)$:

$$\pm\eta_0 \approx \sqrt{-\frac{\Lambda_2}{\Lambda_4}}. \tag{2.4}$$

В силу четности дисперсионной функции её нули различаются лишь знаком. Под нулем $\eta_0$ будем понимать такое значение радикала из (2.4), что $\mathrm{Re}(w_0/\eta_0) > 0$. Для такого нуля экспонента $\exp[-(w_0/\eta_0)x]$ является монотонно убывающей при $x \to +\infty$.

Нулю $\eta_0$ отвечает следующее уравнение

$$H_{\eta_0}(x,\mu) = \exp\left(-\frac{w_0}{\eta_0}x\right)\Phi(\eta_0,\mu),\; e_{\eta_0}(x) = \exp\left(-\frac{w_0}{\eta_0}x\right)E_0.$$

Здесь $\Phi(\eta_0,\mu) = \dfrac{E_0}{w_0}\dfrac{\eta_0\mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu}$.

Это решение называется модой Дебая (это – плазменная мода). В низкочастотном случае она описывает известное экранирование Дебая [8].

Равенство (2.4) представим в явном виде:

$$\eta_0 = \eta_0(\alpha,\Omega,\varepsilon) \approx \sqrt{\frac{(\Omega + i\varepsilon)^2\left[\eta_1^2 s_2(\alpha) - s_4(\alpha)\right]}{w_0\eta_1^2 s_0(\alpha)\left(\Omega^2 - 1 + i\varepsilon\Omega\right)}}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) видно, что вблизи плазменного резонанса, то есть при $\Omega \approx 1$, и при $\omega \approx \omega_p$ модуль нуля $|\eta_0(\alpha, \Omega, \varepsilon)|$ становится неограниченным при любых значениях безразмерного химического потенциала $\alpha$ в случае $\varepsilon \to 0$.

## О существовании плазменной моды

Нуль $\eta_0$ является функцией параметров исходной системы уравнений $\mu$, $\omega$ и $\nu$, или функцией параметров $\alpha$, $\Omega$, $\varepsilon$. Требуется найти область $D^+(\alpha)$, лежащую в плоскости параметров $(\Omega, \varepsilon)$, такую, что если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, то число нулей $N$ дисперсионной функции $\Lambda(z)$ равно двум: $N = 2$. Через $D^+(\alpha)$ обозначим такую область на плоскости параметров, что число нулей дисперсионной функции равно нулю: $N = 0$. Кривую, являющуюся границей этих областей, обозначим через $L = L(\alpha)$.

Пусть множество физически значимых параметров $(\Omega, \varepsilon)$ заполняет четверть-плоскость $\mathbb{R}_+^2 = \{(\Omega,\varepsilon) : \Omega \geq 0, \varepsilon \geq 0\}$. Случай $\Omega \geq 0$ (или $\omega = 0$) отвечает внешнему стационарному электрическому полю, а случай $\varepsilon = 0$ (или $\nu = 0$) отвечает случаю бесстолкновительной плазмы.

Возьмём контур $\Gamma_\rho = C_\rho^+ \cup C_\rho^-$, состоящий из двух замкнутых полуокружностей $C_\rho^+$ и $C_\rho^-$ радиуса $R = 1/\rho$, лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях; $\rho$ – достаточно малое действительное положительное число;

$C_\rho^+ = \left\{ z = x + iy, |z| = \frac{1}{\rho}, |x \pm iy| \le \frac{1}{\rho} \right\}$. Число $R$ возьмём достаточно большим, чтобы нули дисперсионной функции (если они существуют), лежали внутри области $D_\rho$, ограниченной контуром $\Gamma_\rho$. Заметим, что в пределе при $\rho \to 0$ область $D_\rho$ переходит в область $D_0$, ограниченную контуром $\Gamma_0 = \lim\limits_{\rho \to 0} \Gamma_\rho$. Эта область совпадает с комплексной плоскостью с разрезом вдоль действительной оси.

В силу принципа аргумента число [9] нулей $N$ дисперсионной функции в области $D_\rho$ равно:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\rho} d \ln \Lambda(z).$$

После некоторых преобразований получаем:

$$N = \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^\infty d \ln \frac{\Lambda^+(\tau)}{\Lambda^-(\tau)} = 2\grave{u}_{\mathbb{R}_+}(G). \tag{3.1}$$

Здесь $\grave{u}_{\mathbb{R}_+}(G)$ – индекс функции $G(\tau) = \Lambda^+(\tau)/\Lambda^-(\tau)$, вычисленный вдоль положительной действительной полуоси.

Рассмотрим в комплексной плоскости кривую $\Gamma_\alpha = \Gamma(\alpha)$,

$$\Gamma(\alpha): z = G(\tau), 0 \le \tau \le +\infty.$$

Ясно, что $G(0) = 1$, $\lim\limits_{\tau \to +\infty} G(\tau) = 1$. Следовательно, согласно (3.1), число нулей $N$ равно удвоенному числу оборотов кривой $\Gamma(\alpha)$ вокруг начала координат, то есть

$$N = 2\grave{u}\ (G), \grave{u}\ (G) = \operatorname{ind}_{[0,+\infty]} G(\tau).$$

Выделим у функции $G(\mu)$ действительную и мнимую части. Сначала представим функцию $G(\mu)$ в виде:

$$G(\mu) = \frac{\Omega^+(\mu)}{\Omega^-(\mu)},$$

где $\Omega^\pm(\mu) = (w_0 - 1)\eta_1^2 + (\eta_1^2 - \mu^2)\lambda_0(\mu, \alpha) \pm is(\mu, \alpha)(\eta_1^2 - \mu^2)$,

$$s(\mu, \alpha) = \frac{\pi}{2s_0(\alpha)} \mu f_0(\mu, \alpha).$$

Заметим, что

$$w_0 - 1 = i\frac{\Omega}{\varepsilon},\ \eta_1^2 = \varepsilon r(\alpha)(\varepsilon - i\Omega), (w_0 - 1)\eta_1^2 = -\Omega(\Omega + i\varepsilon) r(\alpha).$$

Выделим действительную и мнимую части у функций $\Omega^\pm(\mu)$. Имеем:

$$\Omega^{\pm}(\mu) = -P^{\pm}(\mu) - iQ^{\pm}(\mu),$$

где

$$P^{\pm}(\mu) = (1+\gamma)^2 r(\alpha) + \lambda_0(\mu,\alpha)\left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right) \mp \varepsilon(1+\gamma) r(\alpha) s(\mu,\alpha),$$

$$Q^{\pm}(\mu) = \varepsilon(1+\gamma) r(\alpha)\left(1+\lambda_0(\mu,\alpha)\right) \pm \left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right) s(\mu,\alpha).$$

Коэффициент $G(\mu)$ представим в виде:

$$G(\mu) = \frac{P^{+}(\mu) + iQ^{+}(\mu)}{P^{-}(\mu) + iQ^{-}(\mu)}.$$

Тогда легко выделить действительную и мнимую части функции $G(\mu)$:

$$G(\mu) = \frac{P^{+}P^{-} + Q^{+}Q^{-}}{\left(P^{-}\right)^2 + \left(Q^{-}\right)^2} + i\frac{P^{-}Q^{+} - P^{+}Q^{-}}{\left(P^{-}\right)^2 + \left(Q^{-}\right)^2},$$

или, кратко $G(\mu) = G_1(\mu) + iG_2(\mu)$,

где $G_1(\mu) = \dfrac{g_1(\mu)}{g(\mu)}$, $G_2(\mu) = \dfrac{g_2(\mu)}{g(\mu)}$.

Здесь

$$g(\mu) = \left[P^{-}(\mu)\right]^2 + \left[Q^{-}(\mu)\right]^2 =$$

$$= \left[\Omega^2 r(\alpha) + \lambda_0(\mu,\alpha)\left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right) + \varepsilon\Omega r(\alpha) s(\mu,\alpha)\right]^2 +$$

$$+ \left[\varepsilon\Omega\left(1+\lambda_0(\mu,\alpha)\right) - s(\mu,\alpha)\left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right)\right]^2,$$

$$g_1(\mu) = P^{+}P^{-} + Q^{+}Q^{-} = \left[\Omega^2 r(\alpha) + \lambda_0(\mu,\alpha)\left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right)\right]^2 +$$

$$+ \varepsilon^2\Omega^2 r^2(\alpha)\left[\left(1+\lambda_0(\mu,\alpha)\right)^2 - s^2(\mu,\alpha)\right] - \left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right)^2 s^2(\mu,\alpha).$$

$$g_2(\mu) = P^{-}Q^{+} - P^{+}Q^{-} = 2s(\mu,\alpha)\Big\{\big[2\Omega r(\alpha) +$$

$$+ \lambda_0(\mu,\alpha)\left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right)\big]\left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right) + \varepsilon^2\Omega^2 r^2(\alpha)\left(1+\lambda_0(\mu,\alpha)\right)\Big\}.$$

Выделим (рис. 1, 2) на плоскости параметров $(\Omega, \varepsilon)$ однопараметрическое семейство кривую $L_\alpha = L(\Omega, \varepsilon)$, определяемую неявно заданными параметрическими уравнениями:

$$L_\alpha = L(\Omega,\varepsilon): g_1(\mu,\alpha,\Omega,\varepsilon) = 0,\ g_2(\mu,\alpha,\Omega,\varepsilon) = 0,\ 0 \le \mu \le +\infty,$$

такую, что при переходе через эту кривую индекс функции $G(\mu)$ на положительной полуоси меняется скачком.

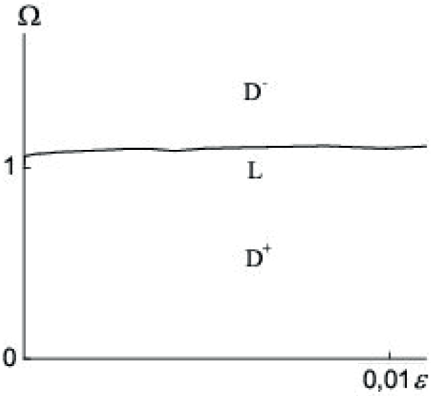


Рис. 1. Кривая $L$ разделяет области $D^+$ и $D^-$. Случай $\alpha = -3$.

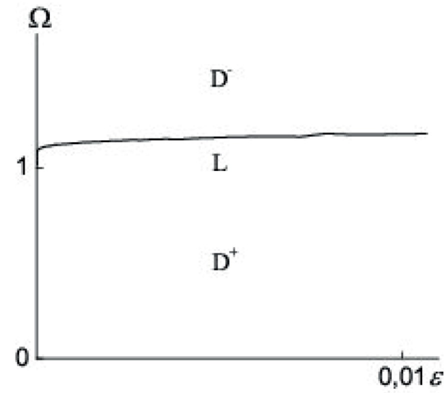


Рис. 1. Кривая $L$ разделяет области $D^+$ и $D^-$. Случай $\alpha = 3$.

Каждая кривая $L_\alpha$ разбивает плоскость параметров $(\Omega, \varepsilon)$ на две области $D^+(\alpha)$ и $D^-(\alpha)$, такие, что при переходе точки $(\Omega, \varepsilon)$ из одной области в другую индекс функции $G(\mu)$ на положительной полуоси меняется скачком.

Так же, как и в [10], можно показать, что если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, то $\grave{u}_{[0,+\infty]}(G) = 1,$ а если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$, то $\grave{u}_{[0,+\infty]}(G) = 0.$ В первом случае (индекс равен единице) замкнутая кривая $\Gamma_\alpha$, введённая выше, один раз охватывает начало координат. Во втором случае (индекс равен нулю) замкнутая кривая не охватывает начало координат.

Из равенства (3.1) вытекает, что число нулей дисперсионной функции равно двум ($N = 2$), если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, и дисперсионная функция нулей не имеет, если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$.

Отметим, что в работе [10] разработан метод исследования граничного режима, когда $(\Omega, \varepsilon) \in L_\alpha$.

Выведем явные параметрические уравнения кривой $L_\alpha$, разделяющей четверть-плоскость параметров $(\Omega, \varepsilon)$ на две области $D^+(\alpha)$ и $D^-(\alpha)$.

Из уравнения $g_2 = (\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon) = 0$ находим:

$$\Omega^2 = -\frac{1}{r(\alpha)} \cdot \frac{\lambda_0(\mu,\alpha)\left(\mu^2 - \varepsilon^2 r(\alpha)\right)}{\mu^2 + \varepsilon^2 r(\alpha)\lambda_0(\mu,\alpha)}. \qquad (3.2)$$

Возьмем уравнение $g_1 = (\mu, \alpha, \Omega, \varepsilon) = 0$. Преобразуем это уравнение с помощью равенства (3.2). Проделаем эту выкладку в общем виде. Из уравнения $g_2 = P^+P^- - Q^+Q^-$ находим, что $P^- = P^+(Q^-/Q^+)$. Далее находим, что

$$g_1\Big|_{g_2=0}=\left[P^+P^-+Q^+Q^-\right]\Big|_{P^-=\frac{Q^-}{Q^+}P^+}=\frac{Q^-}{Q^+}\left[\left(P^+\right)^2+\left(P^-\right)^2\right].$$

Ясно, что уравнение $g_1\big|_{g_2}=0$ эквивалентно уравнению $Q^-(\mu)=0$. Из этого уравнения и (3.2) находим параметрические уравнения семейства кривых $L_\alpha$:

$$L_\alpha:\Omega=\sqrt{L_1(\mu)},\ \varepsilon=\sqrt{L_2(\mu)},\ 0\le\mu\le+\infty. \qquad (3.3)$$

В (3.3) введены обозначения:

$$L_1(\mu)=\frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)}\cdot\frac{\mu^2\left[\lambda_0(\mu,\alpha)\left(1+\lambda_0(\mu,\alpha)\right)+s^2(\mu,\alpha)\right]^2}{\left[-\lambda_0(\mu,\alpha)\right]\left[\left(1+\lambda_0(\mu,\alpha)\right)^2+s^2(\mu,\alpha)\right]}$$

и

$$L_2(\mu)=\frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)}\cdot\frac{\mu^2 s^2(\mu,\alpha)}{\left[-ё_0(\mu,\alpha)\right]\left[\left(1+ё_0(\mu,\alpha)\right)^2+s^2(\mu,\alpha)\right]}.$$

Итак, нами построена кривая $L_\alpha$, являющаяся границей областей $D^+(\alpha)$ и $D^-(\alpha)$. Кривая $\Gamma_\alpha$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ определяется уравнениями:

$$\Gamma_\alpha: x=\operatorname{Re}\frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)},\ y=\operatorname{Im}\frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)},\ 0\le\mu\le+\infty.$$

Подчеркнём, что кривая $L_\alpha$ на плоскости параметров $(\Omega, \varepsilon)$ определяется параметрическими уравнениями:

$$L_\alpha:\operatorname{Re}\frac{\Lambda^+(\mu,\alpha,\Omega,\varepsilon)}{\Lambda^-(\mu,\alpha,\Omega,\varepsilon)}=0,\ \operatorname{Im}\frac{\Lambda^+(\mu,\alpha,\Omega,\varepsilon)}{\Lambda^-(\mu,\alpha,\Omega,\varepsilon)}=0,\ 0\le\mu\le+\infty.$$

Значение приведённого химического потенциала $\alpha$ при этом заполняет всю замкнутую числовую прямую: $-\infty\le\alpha\le+\infty$. При этом случай $\alpha=-\infty$ отвечает максвелловской плазме, а случай $\alpha=+\infty$ отвечает полностью вырожденной плазме.

Сформулируем выводы в терминах плазменной (дебаевской, или дискретной) моды: плазменная мода существует (или число нулей дисперсионной функции равно двум, или индекс коэффициента $G(\mu)=\Lambda^+(\mu)/\Lambda^-(\mu)$ равен единице на действительной полуоси), если $(\Omega, \varepsilon)\in D^+(\alpha)$, и плазменная мода отсутствует (или число нулей дисперсионной функции равно нулю, или индекс коэффициента равен нулю на действительной полуоси), если $(\Omega, \varepsilon)\in D^-(\alpha)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Кампен Н.Г.. Дисперсионное уравнение для волн в плазме. К теории стационарных волн в плазме // Сб. статей «Колебания сверхвысоких частот в плазме» / под. ред. Бернашевского Г.А. и Чернова З.С. М.: ИИЛ, 1961. С. 37–70.
2. Latyshev A.V., Suleimanova S. The analytical solution of the problem on plasma oscillations in half-space with diffusion boundary conditions [2016]. URL: https://arxiv.org/abs/1701.01145.
3. Латышев А.В., Юшканов А.А. Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в столкновительной вырожденной плазме // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. Вып. 9. С. 1667–1676.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Продольный электрический ток в столкновительной плазме, генерируемый поперечным электромагнитным полем // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 187. Вып. 1. С. 127–138.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
6. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
7. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.
8. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. М.: Наука, 1970. 458 с.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Латышев А.В., Юшканов А.А. Нестационарная граничная задача для модельных кинетических уравнений при критических параметрах // Теоретическая и математическая физика. 1998. Т. 116. Вып. 2 (август). С. 305–320.

## REFERENCES

1. Van Kampen N.G. The dispersion equation for plasma waves. In: Physica. 1957, Vol. XXIII, pp. 641–650.
2. Latyshev A.V., Suleimanova S. The analytical solution of the problem on plasma oscillations in half-space with diffusion boundary conditions [2016] [E-source]. URL: https://arxiv.org/abs/1701.01145.
3. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. The generation of the longitudinal current by a transverse electromagnetic field in the collisional degenerate plasma. In: Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [Computational mathematics and mathematical physics]. 2016, vol. 56, no. 9, pp. 1667–1676.
4. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Longitudinal electric current in the collisional plasma generated by the transverse electromagnetic field. In: Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and mathematical physics]. 2016, vol. 187, no. 1, pp. 127–138.
5. Lifshits E.M., Pitaevskii L.P. Physical kinetics. Oxford, Pergamon Press., 1981.
6. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 399 p.
7. Kadomtsev B.B. Kollektivnye yavleniya v plazme [Collective phenomena in plasma]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 238 p.
8. Ashkroft N., Mermin N. Fizika tverdogo tela [Solid state physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 458 p.
9. Gakhov F.D. Kraevye zadachi [Boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Nonstationary boundary problem for model kinetic equations at critical parameters. In: Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and mathematical physics]. 1998, vol. 116, no. 2 (August), pp. 305–320.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Латышев Анатолий Васильевич* – д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета, заслуженный деятель науки РФ,
e-mail: avlatyshev@mail.ru

*Сулейманова Севда Ширин кызы* – аспирант кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета,
e-mail: sevda-s@yandex.ru

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Anatoly Latyshev* – Doctor of Physico-mathematical sciences, full professor at the Department of mathematical analysis and geometry, Moscow Region State University;
e-mail: avlatyshev@mail.ru

*Sevda Suleymanova* – postgraduate student at the Department of mathematical analysis and geometry, Moscow Region State University;
e-mail: sevda-s@yandex.ru

## ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Латышев А.В., Сулейманова С.Ш. Краевая задача Римана в проблеме о колебаниях плазмы с равновесным распределением Ферми-Дирака // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 40–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-40-50.

## THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

A. Latyshev, S. Suleymanova. Boundary value Riemann problem in the problem about oscillations of the plasma with the equilibrium distribution of Fermi-Dirac. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics, 2017, no. 1, pp. 40–50.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-40-50.