УДК 621.378+514.76
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-51-56

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ВСЕЛЕННОЙ ГЁДЕЛЯ

Андроникова Е.О.
Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,
127994, Москва, Вадковский пер., д. 1

Аннотация. В работе рассматриваются геометрические свойства псевдориманова многообразия из серии «вселенные Гёделя». Устанавливается приводимость этого пространства. Доказывается, что вселенная Гёделя представляет собой двухпараметрическое семейство плоских двумерных вполне геодезических подмногообразий аффинной связности. Интегрируется система уравнений геодезических линий в элементарных функциях.

Ключевые слова: пространства аффинной связности, псевдоримановы многообразия, вселенная Гёделя, геодезические линии, квантовая теория информации, телепортация.

ON GEOMETRIC PROPERTIES OF GODEL UNIVERSE

E. Andronikova
Moscow State University of Technology «STANKIN»,
Vadkovskii per. 1, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper examines the geometric properties of the pseudo-Riemannian affine connected manifold known as the ‘Gödel Universe’. The reducibility of this space is established. It is proved that the Gödel Universe is a two-parameter family of two-dimensional flat geodesic submanifolds of affine connection. The system of equations, which determines geodesic lines, is solved in elementary functions.

Keywords: affine connected spaces, pseudo-Riemannian manifold, Gödel Universe, geodesic lines, quantum information theory, teleportation.

В настоящее время обострился интерес сообщества серьёзных и честных учёных к завлекательным тайнам мироздания. Революция в информатике, неуклонная эволюция в теоретической физике, в частности, в общей теории относительности, загадки, парадоксы и отчаянные гипотезы космологии (как будто строго теоретически доказана и частично экспериментально подтверждена возможность телепортации материальных тел, жаркая дискуссия о существовании и, вообще, проблематике «чёрных дыр», тополого-геометрическое решение проблем, сформулированных Анри Пуанкаре) – всё это стимулирует развитие классических и построение новых математических моделей, в первую очередь в области дифференциальной геометрии. Свойства того, или иного «пространства – времени», на фоне которого разворачиваются конкретные материальные физические явления, оказывают существенное влияние на оценку результирующих параметров, необходимых для оптимального управления процессом.

В классической и широко известной работе [4] даётся полный вывод серии метрик псевдоримановых многообразий аффинной связности лоренцева типа. Каждое из этих пространств носит название вселенная Гёделя. В статье [6] рассматривается энергетический спектр заряженных скалярных частиц в одной из вселенных Гёделя из этого ряда – простейшей модели с космологическим вращением. В работе [3] выдвигается гипотеза о возможности телепортации в дифференциально-геометрической модели «Вселенная Гёделя». Обсуждаются особенности физического явления «мгновенного» распространения световых сигналов в пространстве-времени [5]. Приводится система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая определяет уравнения геодезических линий пространства Гёделя, выведены некоторые первые интегралы. Настоящая статья является продолжением работы [3], в ней описываются некоторые дальнейшие результаты исследований. Система уравнений геодезических линий интегрируется в элементарных функциях.

Геометрия многообразия аффинной связности Гёделя в некоторой системе координат задается фундаментальной квадратичной формой:

$$ds^2 = (dt)^2 - (dx)^2 + \frac{1}{2}\exp\left(2\sqrt{2}\omega x\right)(dy)^2 + \\ + 2\exp\left(2\sqrt{2}\omega x\right)dtdy - (dz)^2, \tag{1}$$

где ω – положительная постоянная, являющаяся угловой скоростью вращения вектора потока идеальной жидкости, заполняющей Вселенную Гёделя [6]. В выбранной системе координат ненулевые компоненты метрического тензора имеют вид:

$$\mathrm{g}_{11} = 1,\ \ \mathrm{g}_{13} = \mathrm{g}_{31} = exp\left(\sqrt{2}\omega x\right),$$

$$\mathrm{g}_{22} = -1,\ \mathrm{g}_{33} = (1/2)exp\left(2\sqrt{2}\omega x\right),\ \mathrm{g}_{44} = -1.$$

Инвариант $\mathrm{g} = \det(\mathrm{g}_{ii}) = -2^{-1}exp\left(2\sqrt{2}\omega x\right)$.

Поскольку все компоненты метрического тензора с индексом 4, кроме g_{44}, равны нулю, то пространство Гёделя приводимо, то есть является декартовым произведением $M^3 \times R$, где M^3 – трёхмерное некомпактное псевдориманово многообразие сигнатуры (+, –, –), а R – одномерное действительное пространство.

Уравнения геодезических линий в этой метрике имеют вид [3]:

$$\begin{cases} t'' = -\sqrt{2}\omega x'\left(2t' + \exp\left(\sqrt{2}\omega x\right)y'\right), \\ x'' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\omega\exp\left(\sqrt{2}\omega x\right)y'\left(2t' + \exp\left(\sqrt{2}\omega x\right)y'\right), \\ y'' = 2\sqrt{2}\omega\exp\left(-\sqrt{2}\omega x\right)t'x', \\ z'' = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $t' = \dfrac{dt}{du}$, u-аффинный параметр вдоль геодезической линии; аналогично, производные от x, y, z берутся по u.

Первый интеграл этой системы уравнений геодезических линий имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} &(t')^2 + 2\exp\left(\sqrt{2}\omega x\right)t'y' - (x')^2 + \frac{1}{2}\exp\left(2\sqrt{2}\omega x\right)(y')^2 - (z')^2 = \\ &= \varepsilon k^2 = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь индекс ε принимает значения –1 (временоподобная геодезическая линия), 0 (изотропная), 1 (пространственноподобная).

ТЕОРЕМА. Система дифференциальных уравнений геодезических линий (2) вселенной Гёделя в выбранной системе координат интегрируется в элементарных функциях.

Приведём эскиз доказательства теоремы. Частными решениями системы (2) являются следующее семейства:

$$\begin{cases} t = \gamma_1 u + \gamma_2, \\ x = \gamma_1 u + \gamma_3, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{\omega}e^{-\sqrt{2}\omega(\gamma_1 u + \gamma_3)} + \gamma_4, \\ z = \gamma_5 u + \gamma_6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = c_1, \\ x = c_2 u + c_3, \\ y = c_4, \\ z = c_5 u + c_6. \end{cases} \tag{4}$$

В этих семействах решений индекс ε отрицателен, то есть эти семейства состоят из временоподобных незамкнутых геодезических линий. Из формул (4) следует, что *вселенная Гёделя представляет собой двухпараметрическое семейство плоских двумерных вполне геодезических подмногообразий аффинной связности.*

Найдём общее решение системы (2). Производя замену $v = y'\exp\left(\sqrt{2}\omega x\right)$, упрощаем исходную систему дифференциальных уравнений и получаем следующие первые интегралы:

$$t' + y'\exp\left(\sqrt{2}\omega x\right) = \frac{1}{2}m, \tag{5}$$

где $m = const$,

$$\left(x'\right)^2 + \frac{1}{2}v^2 = \alpha, \tag{6}$$

где α – положительная константа. Без ограничения общности, далее можно считать, что α не равно нулю, иначе мы приходим к решению (4);

$$v = e^{\sqrt{2}\omega x}y' = m + ce^{-\sqrt{2}\omega x}, \tag{7}$$

где c – константа интегрирования. Решение исходной системы (2) имеет следующий вид в случае, когда $\alpha - \frac{m^2}{2} = 0$:

$$\begin{cases} t(u) = -\dfrac{mu}{2} + \dfrac{2}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\omega m(u+d)\right) + \mu_2, \\ x(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\omega}\left(\ln\left[\omega^2 m^2(u+d)^2 + 1\right] + \ln\left[-\dfrac{c}{2m}\right]\right), \\ y(u) = \dfrac{2m^2(u+d)}{c\left(\omega^2 m^2 (u+d)^2 + 1\right)} + \mu_1, \\ z(u) = \mu_3 u + \mu_4, \end{cases} \tag{8}$$

где ω, c, m, d, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 – константы. Эти геодезические линии также являются времениподобными. Система (2) также допускает решение:

$$\begin{cases} t(u) = -\dfrac{mu}{2} + \dfrac{2}{\omega\gamma^2}\operatorname{arctg}\left[\gamma^{-1}\left(m\operatorname{tg}\left(2^{-1}\omega\gamma(u+\psi)\right) + \sqrt{2\alpha}\right)\right] + \psi_2, \\ x(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\omega}\ln\left[c\left(-m - \sqrt{2\alpha}\right)\sin\left(\omega\gamma(u+\psi)\right)\right] - \dfrac{\sqrt{2}}{\omega}\ln\gamma, \\ y(u) = \dfrac{\gamma\sqrt{2\alpha}}{c\omega}\dfrac{\cos\left(\omega\gamma(u+\psi)\right)}{m + \sqrt{2\alpha}\sin\left(\omega\gamma(u+\psi)\right)} + \psi_1, \\ z(u) = \psi_3 u + \psi_4. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь m, c, α, ψ, ψ_1 – ψ_4, – константы, $m^2 - 2\alpha > 0; \gamma = \sqrt{m^2 - 2\alpha} = \text{const}$

Замечание. Если $m^2 - 4\alpha - 4\psi_3^2 > 0$, то геодезическая линия пространственноподобная. Если $m^2 - 4\alpha - 4\psi_3^2 = 0$, то геодезическая линия изотропная. Если $m^2 - 4\alpha - 4\psi_3^2 < 0$, то геодезическая линия времениподобная.

В случай, когда $\alpha - \frac{m^2}{2} > 0$, система (2) допускает следующее решение:

$$\begin{cases} t(u) = -\dfrac{mu}{2} - \dfrac{2}{\omega\lambda}\operatorname{arctg}\left[(\lambda c)^{-1}\left[\exp\left(\omega\lambda(u+\psi)\right)+mc\right]\right]+\mu_1, \\ x(u) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\omega}\ln\dfrac{2\ {}^{2}\exp\ \left(\omega\lambda(u+\psi)\right)}{\left[\ddot{e}xp\left(\omega\lambda(u+\psi)\right)+\mathrm{mc}\right]^2+\ {}^{2}\ {}^{2}}, \\ y(u) = -\dfrac{2\lambda}{\omega}\dfrac{m\acute{e}xp\left(\omega\lambda(u+\psi)\right)+2c}{\left[\ddot{e}xp\left(\omega\lambda(u+\psi)\right)+mc\right]^2+\ {}^{2}\ {}^{2}}+\mu_2, \\ z(u) = \mu_3 u+\mu_4, \end{cases} \qquad (10)$$

где $\lambda = \sqrt{2\alpha - m^2}$, $2\alpha - m^2 > 0$, m, ω, c, ψ, α, $\mu_1 - \mu_4$ – константы.

Мы перебрали все возможные варианты, тем самым обзор доказательства теоремы завершается.

В явном виде посчитаны компоненты основных тензорных характеристик пространства Гёделя с метрикой (1). (При этом использован пакет программ «Математика–8»). Определенно прослеживается устойчивая аналогия исследуемого псевдориманова многообразия с пространством постоянной кривизны гиперболического типа (в частности скалярная кривизна R = $2\omega^2$ постоянна). Вселенная Гёделя попадает в широкий класс многообразий аффинной связности, близких к симметрическим [1; 2]. Модели вселенных Гёделя (наряду с Миром де Ситтера, метрикой Шрёдингера и т.д.) безусловно уже востребованы в теоретической физике, общей теории относительности, космологии, информатике и в смежных науках. Исследование геометрических свойств всей серии пространств Гёделя актуально. Представляется, что в ближайшем будущем целесообразно: 1) уточнить геометрические свойства группы Ли (и соответствующей ей алгебры Ли) движений псевдориманова многообразия M^3; 2) найти касательную алгебру M^3, используя технику теории неассоциативных универсальных алгебр; 3) подробно рассмотреть свойства (инфинитезимальных) гомотетий и параллельных переносов M^3, опираясь на теорию дифференцируемых квазигрупп и луп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
2. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: Изд-во МГОУ. 2012. 132 с.
3. Матвеева Е.О. Квантово-информационный подход к распространению сигналов во Вселенной Гёделя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2013. № 2. С. 34–38.
4. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. М.: ИЛ. 1963. 432 с.
5. Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО. 2010. 128 с.
6. Шикин Г.Н., Ющенко. Л.П. Энергетический спектр заряженных скалярных частиц во вселенной Гёделя // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Физика. 2011. № 3. С. 112–118.

REFERENCES

1. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Algebraic theory of close-to-symmetric spaces: monograph]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 p.
2. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim: monografiya [Universal algebras in the theory of close-to-symmetric spaces with affine connection: monograph]. Moscow, MRSU Publ., 2012. 132 p.
3. Matveeva E.O. The quantum-information approach to the distribution of signals in the Gödel Universe. In: Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics]. 2013, no. 2, pp. 34–38.
4. Synge J.L. Relativity: The General Theory. New York, North-Holland, Amsterdam, Interscience, 1960.
5. Kholevo A.S. Kvantovye sistemy, kanaly, informatsiya [Quantum systems, channels, information]. Moscow, MTSNMO Publ., 2010. 128 p.
6. Shikin G.N., Yushchenko. L.P. The energy spectrum of charged scalar particles in the Gödel universe. In: Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika. Fizika [Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Physics]. 2011, no. 3, pp. 112–118.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Андроникова Екатерина Олеговна – магистр, аспирант Московского государственного технологического университета «СТАНКИН»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Ekaterina Andronikova – postgraduate student, degree seeking candidate at the Moscow State University of Technology «STANKIN»;
e-mail: ya.kmatveyeva@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Андроникова Е.О. О геометрических свойствах вселенной Гёделя // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 51–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-51-56.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

E. Andronikova. On geometric properties of the Gödel Universe. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 51–56.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-51-56.