УДК 519.216.2
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-57-65

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ, СВОДЯЩИХСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ТЕКУЩИМИ СКОРОСТЯМИ*

Макарова А.В., Демчук А.А., Новикова С.С.
Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина
394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54 «А», Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются дифференциальные включения с текущими скоростями в случае, когда правые части многозначны и удовлетворяют некоторым условиям. В этих условиях мы можем свести включения к дифференциальным уравнениям с текущими скоростями, для которых существование решений известно.

Ключевые слова: квадратичная производная в среднем, дифференциальные включения, текущая скорость.

ON SOME DIFFERENTIAL INCLUSIONS, WHICH REDUCE TO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE CURRENT VELOCITIES

A. Makarova, A. Demchuk, S. Novikova
Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy
ul. Starykh Bolshevikov 54A, 394064 Voronezh, Russian Federation

Abstract. We consider the differential inclusion with current velocities in the case when the right-hand side parts are multivalued and satisfy some conditions. In these conditions we can reduce the inclusion to a differential equation with current velocities for which the existence of solutions is known.

Key words: mean derivatives, current velocities, differential inclusions.

Многие важные в практическом отношении задачи сводятся к исследованию нового класса дифференциальных включений с производными в среднем. Понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном [8; 9; 10]. В последнее время большое развитие получила теория дифференциальных включений со стохастическими интегралами. Теория включений с производными в среднем является достаточно новым направлением. Огромный интерес для приложений представляют дифференциальные уравнения и включения с симметрической производной в среднем – текущей скоростью. Это прямой аналог обычной ско-

* Исследование частично поддержано грантами РФФИ 15-01-00620.

рости не случайных процессов. Такая аналогия позволяет рассматривать более широкий класс задач, чем стохастические дифференциальные включения в интегральной форме.

В работах Гликлиха Ю.Е. [2; 6] исследуются дифференциальные включения с производными в среднем справа, но при исследовании дифференциальных включений с текущими скоростями, не удаётся напрямую использовать стохастические интегралы, то есть для их исследования необходимы новые методы.

В данной работе исследуется специальный класс включений с многозначными правыми частями, удовлетворяющими некоторым условиям.

Предварительные сведения

Пусть T^n – плоский n-мерный тор (компактное многообразие, на котором все гладкие объекты ограничены и геометрические свойства унаследованы из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке). Рассмотрим случайные процессы, заданные на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P), $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\xi(t)$ – такой процесс.

Обозначим через P_t^ξ σ-подалгебру F, порождённую прообразами борелевских множеств в T^n отображением $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ при $0 \le s \le t$. P_t^ξ называется «прошлым» для $\xi(t)$.

Обозначим через N_t^ξ σ-подалгебру F, порождённую прообразами борелевских множеств в T^n отображением $\xi(t) : \Omega \to T^n$; N_t^ξ называется «настоящим» для $\xi(t)$. P_t^ξ и N_t^ξ при всех t предполагаются полными, т.е. содержащими все множества вероятности ноль. Очевидным образом N_t^ξ – σ-подалгебра в P_t^ξ, E_t^ξ – условное математическое ожидание относительно N_t^ξ для $\xi(t)$.

Производная справа $D\xi(t)$ задаётся формулой

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right), \tag{1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$.

Производная слева $D_*\xi(t)$ задаётся формулой

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \right). \tag{2}$$

Симметрическая производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ и антисимметрическая производная $D_A = \frac{1}{2}(D + D_*)$. Введём векторы $v^\xi(t, m)$ и $u^\xi(t, m)$ такие, что $D_s\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t))$ и $D_A\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t))$. Эти векторы существуют и называются регрессиями. Вектор $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_s\xi(t)$ – текущая скорость процесса $\xi(t)$, а $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ – осмотическая скорость процесса $\xi(t)$.

Следуя [3] , зададим дифференцирование D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^{\xi}\left(\frac{\big(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\big)\big(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\big)^*}{\Delta t}\right), \qquad (3)$$

где $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ – вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ – вектор строка (транспонированный или сопряжённый вектор). Результат этого матричного произведения – матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения во множестве симметрических неотрицательно определенных (2, 0) тензоров.

В работе С. Азариной и Ю.Е. Гликлиха [5] утверждается: если известны текущая скорость и квадратичная производная в среднем (информация о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную.

Дифференциальные уравнения с текущими скоростями

Пусть $v(t, m)$ – векторное поле, $\alpha(t, m)$ – симметрическое неотрицательно определённое (2, 0)-тензорное поле на торе T^n. Система

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v(t, \xi(t)) \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \qquad (4)$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка.*

Определение 1. Говорят, что (4) на T^n имеет решение на $[0, T]$ с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$, если существует вероятностное пространство (Ω, F, P) и процесс $\xi(t)$, заданный на (Ω, F, P) и принимающий значения в T^n, такой, что $\xi(0) = \xi_0$ и для почти всех $t \in [0, T]$ уравнение (4) выполняется P-п.н. для $\xi(t)$.

Замечание 1. В работе используется единственная известная в настоящее время теорема существования решений уравнения (4), доказанная С.В. Азариной и Ю.Е. Гликлихом [5], в предположениях, что правые части (4) гладки и ограничены вместе с первыми частными производными, а плотность распределения начального условия гладка и нигде не равна нулю.

Дифференциальные включения с текущими скоростями

Пусть $v(t, m)$ – многозначное векторное поле, $\alpha(t, m)$– многозначное симметрическое положительно определённое (2, 0) – тензорное поле на T^n.

Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in v(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \alpha(t, \xi(t)). \end{cases} \qquad (5)$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка. Понятие решение включения (5) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введённому в определении 1.

Рассматривается случай отсутствия гладких селекторов правых частей, но при этом существуют гладкие – ε_k *аппроксимации* с равномерно ограниченными первыми частными производными (откуда следует, что правые части имеют непрерывные селекторы).

Необходимо выполнение следующих условий:

условие 1. *Векторное поле $v(t, m)$ на T^n – многозначно, автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы.*

условие 2. $(2, 0)$*-тензорное поле $\alpha(t, m)$ на T^n – многозначно, автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы.*

В этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $v(t, m)$ удовлетворяет условию 1. $\alpha(t, m)$ удовлетворяет условию 2. Пусть существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что для любого ε_k поле $v(t, m)$ ($\alpha(t, m)$) имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_i(m)$ ($\alpha_i(m)$, соответственно) и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$ ($\dfrac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^l}$, соответственно). Рассмотрим случайный элемент ξ_0 со значениями в T^n, у которого распределение относительно формы объема Λ_E, подробнее в* [5], *равно $\sqrt{C}\rho_0$, где ρ_0 гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (4) имеет решение, определённое на всем интервале $t \in [0, T]$.*

Доказательство. Из условия данной теоремы для последовательности положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$ существуют последовательности $v_i(m)$ ($\alpha_i(m)$, соответственно) гладкие α_k-аппроксимаций. Тогда, согласно теореме Асколи, эти наборы аппроксимаций компактны относительно равномерной нормы, то есть можно выделить подпоследовательности v_k (соответственно, α_k) сходящиеся к непрерывным селекторам $v(m)$ ($\alpha(m)$, соответственно) в $v(m)$ ($\alpha(m)$, соответственно).

Обозначим компоненты поля ($\alpha_k(m)$ через α_k^{ij}. Из тензорных полей $\alpha_k(m)$ построим Римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим последовательность уравнений типа (4).

Для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0, так как его плотности относительно $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой.

Известно, что аппроксимации v_k и α_k равномерно ограничены одной и той же константой, так как они являются ε_k-аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Также все эти ε_k-аппроксимации (по условию теоремы), заданные на компактном торе, для любого k, имеют равномерно ограниченные одной и той же константой первые частные производные $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$ ($\dfrac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^l}$, соответственно). Таким образом, уравнения (4) удовлетворяют условиям теоремы о существовании решений, доказанной в [5]. То есть для каждого уравнения существует решение. Пусть ξ_k – решение k-го уравнения.

На Банаховом многообразии $C^0([0, T], T^n)$ непрерывных кривых в T^n введем σ-алгебру C, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $C^0([0, T], T^n), C)$, порождённую решением $\xi_k(t)$. Также введём семейство полных σ-подалгебр P_t, порождённых цилиндрическими множествами с основаниями над $[0, t]$, $t \in [0, T]$, и семейство полных σ подалгебр N_t, порождённых прообразами Борелевских множеств в T^n при отображении $x(\cdot) \to x(t)$. Ясно, что N_t является σ-подалгеброй в P_t и что P_t есть «прошлое», а N_t – «настоящее» для координатного процесса на $(C^0([0, T], T^n), C, \mu_k)$.

В [7] было доказано следующее условие: множество мер $\{\mu_k\}$ на $C^0([0, T], T^n)$, C) слабо компактно. Исходя из этого можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности, мы можем предположить, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], T^n), C, \mu)$, то есть для каждого элементарного события $x(\cdot) \in C^0([0, T], T^n)$ по определению $\xi(t, x(\cdot)) = m(t)$. Напомним, P_t – «прошлое» $\xi(t)$, а N_t – «настоящее» для этого же координатного процесса.

По построению $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi(t))$. Таким образом, для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0, T], T^n)$, измеримой относительно N_t, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],T^n)}\left[\frac{\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*}{\Delta t}-\alpha_k(m(t))\right]f(m(\cdot))d\mu_k=0$$

Так как $\alpha_k(t, m)$ сходятся равномерно к $\alpha(t, m)$ при $k \to \infty$, выводим, что $\alpha_k(t, m(t))$ стремится к $\alpha(t, m(t))$ равномерно для всех μ_k включая μ.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $(C^0([0, T], T^n)$, так как $\alpha(m)$ непрерывно на T^n.

Из равномерной сходимости при всех $m(\cdot)$ выводим, что при достаточно больших k

$$\sup_{m(\cdot),t}\left\|\alpha_k(m(t)-\alpha(m(t))\right\|<\delta.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для всех $(m(\cdot)$. Тогда

$$\left\|\int_{C^0([0,T],T^n)}\big[\alpha_k(m(t)-\alpha(m(t))\big]f(m(\cdot))d\mu_k\right\|<2\delta\Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ – произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],T^n)}\big[\alpha_k(m(t)-\alpha(m(t))\big]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Тогда $\alpha(m(t))$ – μ-п.н. непрерывна и ограничена на ($C^0([0, T], T^n)$. Так как меры μ_k слабо сходятся к μ, по Теореме 2 [1, параграф 1, гл. VI] имеем

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t)f(m(\cdot))d\mu_k=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\alpha(m(t)f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидно

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*\right]f(m(\cdot))d\mu_k=$$

$$=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*\right]f(m(\cdot))d\mu.$$

Таким образом

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[\frac{\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)\big(m(t+\Delta t)-m(t)\big)^*}{\Delta t}-\alpha(m(t))\right]f(m(\cdot))d\mu=0.$$

Так как $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно N_t, это означает, что $D_2\xi(t)=\alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t))\in\alpha(\xi(t))$μ-п.н.

Далее нас будет интересовать текущая скорость решения.

По построению $D_S\xi_k(t)=v_k(t,\xi_k(t))$ для всех k. Это означает, что для любой вещественной ограниченной непрерывной функции f на ($C^0([0, T], T^n)$, измеримой относительно N_t, при любом k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[\frac{\big(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\big)}{\Delta t}-v_k(m(t))\right]f(m(\cdot))d\mu_k=0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k > K(\varepsilon)$.

$$\Big\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\big[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\big]f(m(\cdot))d\mu_k-$$

$$-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\big[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\big]f(m(\cdot))d\mu\Big\|<\varepsilon$$

и

$$\Big\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v(m(t)d\mu_k-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v(m(t)d\mu\Big\|<\varepsilon.$$

Такими же рассуждениями, как и выше, используя теорему Егорова, докажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\big[v_k(m(t))-v(m(t))\big]f(m(\cdot))d\mu_k=0$$

и что v непрерывна на множестве полной меры. Напомним, что v ограничено как селектор ограниченного многозначного отображения.

Тогда по Теореме 2 [1, параграф 1, гл. VI] получаем

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu_k=\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} v(m(t))f(m(\cdot))d\mu.$$

Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\right]f(m(\cdot))d\mu_k=$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\right]f(m(\cdot))d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}\left[\frac{\left(m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)\right)}{\Delta t}-v(m(t))\right]f(m(\cdot))d\mu=0,$$

так как $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно N_t. Это означает, что $D_S\xi_k(t) = v(\xi(t))$. Но по построению $v(\xi(t)) \in v(\xi(t))$$\mu$-п.н. Теорема доказана.

Данный результат был анонсирован в тезисах [4].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 1971. Т. 1. 496 с.
2. Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математи-ческой физики. М.: Комкнига. 2005. 416 с.
3. Гликлих Ю.Е. Стохастические уравнения в производных в среднем и их приложения. II // Известия РАЕН, Серия МММИУ. 2000. Т. 4, № 4. С. 17-36.
4. Макарова А.В. О существовании решений стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями I // Математика. Экономика Образование. IX Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Материалы XXIV международной конференции по стохастическим методам. Ростов н/Д, 2016. С. 63.
5. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities // Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2015. Vol. 8. № 4. P. 100-106.
6. Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. Springer-Verlag London, 2011. 460p.
7. Makarova A.V., Yu.E. Gliklikh On stochastic differential inclusions with current velocities // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015. Vol. 2,№ 3. P. 25–33.
8. Nelson E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Reviews. 1966. Vol. 150, №. 4.- P. 1079–1085.
9. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967. 142 p.
10. Nelson E. Quantum fluctuations. Princeton: Princeton University Press, 1985. 147 p.

REFERENCES

1. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Teoriya sluchainykh protsessov. [The theory of random processes]. Vol. 1. Moscow, Fizmatlit, 1971. 496 p.

2. Gliklikh Yu.E. Global'nyi i stokhasticheskii analiz v zadachakh matematicheskoi fiziki [Global and stochastic analysis in problems of mathematical physics]. Moscow, Komkniga Publ., 2005. 416 p.
3. Gliklikh Yu.E. Stochastic equations in mean derivatives and their applications. II. In: Izvestiya RAEN, Seriya MMMIU [RAEN News, Series MMMIU]. Vol. 4. 2000, no. 4, pp. 17–36.
4. Makarova A.V. On the existence of solutions to stochastic differential inclusions with current velocities of I. In: Matematika. Ekonomika Obrazovanie. IX Mezhdunarodnyi simpozium "Ryady Fur'e i ikh prilozheniya". Materialy XXIV mezhdunarodnoi konferentsii po stokhasticheskim metodam [Math. Economy Education. IX international Symposium "Fourier Series and their applications". Materials of the XXIV international conference on stochastic methods]. Rostov n/D, 2016, p. 63.
5. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities. In: Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2015, vol. 8, no 4, pp. 100–106.
6. Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. Springer-Verlag London, 2011. 460 p.
7. Makarova A.V., Yu.E. Gliklikh. On stochastic differential inclusions with current velocities. In: Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015, vol. 2, no. 3, pp. 25–33.
8. Nelson E. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics. In: Phys. Reviews. 1966, vol. 150, no. 4, pp. 1079–1085.
9. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967. 142 p.
10. Nelson E. Quantum fluctuations. Princeton: Princeton university press, 1985. 147 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Макарова Алла Викторовна – кандидат физико-математических наук, преподаватель 206 кафедры математики ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»;
e-mail: allagm@mail.ru

Демчук Анжелика Анатольевна – кандидат педагогических наук, доцент 206 кафедры математики ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»;
e-mail: angel_2268@mail.ru

Новикова Светлана Сергеевна – кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник 21 НИО, 2 научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией ВВС) ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»;
e-mail: sv281174@rambler.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alla Makarova – PhD of Physico-mathematicфl sciences, lecturer of 206 Department of Math, MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh);
e-mail: allagm@mail.ru

Anzhelika Demchuk – PhD of Pedagogic sciences, docent of 206 Department of Math, MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh);
e-mail: angel_2268@mail.ru

Svetlana Novikova – PhD of Pedagogic sciences, Senior researcher of the 21 Scientific and Research department of Scientific and Research Center, MESC AF "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy" (Voronezh);
e-mail: sv281174@rambler.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Макарова А.В., Демчук А.А., Новикова С.С. О некоторых дифференциальных включениях, сводящихся к дифференциальным уравнениям с текущими скоростями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 57–65.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-57-65

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

A. Makarova, A. Demchuk, S. Novikova. On some differential inclusions, which reduce to differential equations with the current velocities. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics. 2017. no. 1. pp. 57–65.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-57-65