УДК 519.852
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-1-113-123

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ

Хасанов А.С.
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
117997, Москва, Стремянный пер., 36, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассмотрены особенности алгоритмов графического метода, метода простого перебора всех опорных решений и симплекс-метода для решения задач линейного программирования в случае задач с неограниченными областями допустимых решений. Приведены соответствующие примеры решённых задач.

Ключевые слова: линейное программирование, опорное решение, оптимальное решение.

PECULIARITIES OF ALGORITHMS FOR SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH UNBOUNDED FEASIBLE REGIONS

A. Khasanov
Plekhanov Russian University of Economics
Stremyannyi per. 36, 117997 Moscow, Russian Federation

Abstract. The peculiarities of the algorithms of the graphical method, the method of iteration over all basic feasible solutions, and the simplex method for solving linear programming problems are considered in the case of problems with unbounded feasible regions. The appropriate examples of solved problems are presented.

Keywords: linear programming, basic feasible solution, optimal solution.

Введение

Задача линейного программирования (ЛП) может быть записана в виде

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le (\ge) b_{k+1}, \\ \ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j \in I. \quad (3)$$

Запись (1)–(3) (общая задача ЛП) означает следующее: найти максимум (минимум) целевой функции $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n$ ($n \ge 2$) n переменных $x_1, ..., x_n$ при условии, что эти переменные удовлетворяют системе ограничений (2) и условиям неотрицательности (3). В соотношении (1) $X = (x_1, ..., x_n)$ – n-мерный вектор. Последовательность $(x_1, ..., x_n)$ можно интерпретировать и как n-мерную точку, и как n-мерный вектор с началом в начале координат и с концом в точке с координатами $(x_1, ..., x_n)$. Допустимым решением задачи ЛП называется любой вектор $X = (x_1, ..., x_n)$, координаты которого удовлетворяют системе ограничений (2) и условиям (3). Множество допустимых решений задачи образует область допустимых решений (ОДР). Оптимальным решением задачи ЛП называется такое допустимое решение, при котором целевая функция достигает искомого экстремума. Будем считать, что ОДР не является пустым множеством и требование $x_j \ge 0$ в условиях (3) относится ко всем переменным [1] ($x_j \ge 0 \forall j$).

ОДР задачи (1)–(3) является общей частью полупространств вида $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le (\ge) b_i$ и гиперплоскостей вида $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i$ (является выпуклым многогранным множеством [1]). Если ОДР является неограниченным множеством, то оно совпадает [1] с множеством точек

$$X = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^{N_2} \beta_i R_i, \quad (4)$$

где $X_1, ..., X_{N_1}$ – вершины ОДР, $R_1, ..., R_{N_2}$ – направляющие векторы неограниченных рёбер ОДР, $\alpha_i \ge 0$, $\beta_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i = 1$. Наличие в представлении (4) второй суммы вносит свои особенности в алгоритмы решения задач ЛП. Пусть $C = (c_1, ..., c_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции. Если в задаче на максимум (минимум) существует вектор R_i, для которого скалярное произведение $(C, R_i) > 0$ ($(C, R_i) < 0$), то задача неразрешима [1]. Если в задаче на максимум (минимум) $(C, R_i) \le 0$ ($(C, R_i) \ge 0$) при всех i, то задача разрешима и совокупность всех оптимальных решений совпадает [1] с множеством точек вида

$$X^* = \sum_{\lambda=1}^{n_1} \alpha_{i_\lambda} X_{i_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n_2} \beta_{i_\lambda} R_{i_\lambda}, \quad (5)$$

где $\alpha_{i_\lambda} \geq 0, \beta_{i_\lambda} \geq 0, \sum_{\lambda=1}^{n_1} \alpha_{i_\lambda} = 1$, X_{i_λ}, $\lambda = 1, ..., n_1$, – оптимальные вершины, R_{i_λ}, $\lambda = 1, ..., n_2$,– направляющие векторы неограниченных ребер, для которых $(C, R_{i_\lambda}) = 0)$. Мы начнём с алгоритма графического метода, так как в этом случае алгебраический подход допускает геометрическое истолкование.

Графический метод в случае *n* = 2

Задача ЛП с двумя переменными имеет вид $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min)$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq) b_1, \\ \qquad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq (\geq) b_m, \end{cases}$$

где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Эта задача решается на плоскости Ox_1x_2 графическим методом. Предполагается, что $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда линии уровня целевой функции $Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2$ образуют семейство параллельных прямых $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ с общим нормальным вектором $\vec{n} = (c_1, c_2)$. При перемещении линии уровня параллельно начальному положению в направлении нормального вектора значение целевой функции возрастает [1]. Перемещая линию уровня в задаче на максимум в направлении нормального вектора, а в задаче на минимум – в противоположном направлении, можно найти множество оптимальных решений или убедиться, что оптимальных решений нет. Если ОДР является неограниченным множеством, то множеством оптимальных решений может быть луч или задача может не иметь решения.

Пример 1. Рассмотрим задачу ЛП $Z(X) = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \geq 1, \end{cases}$$

где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Точки $X_1(0, 2)$ и $X_2(0, 1)$ являются вершинами ОДР (фигуры, ограниченной прямыми $-2x_1 + x_2 = 2$, $-x_1 + x_2 = 1$ и осью Ox_2 (рис. 1)).

Лучи X_1A и X_2B имеют направляющие векторы $R_1 = (1, 2)$ и $R_2 = (1, 1)$. Линия уровня MN имеет уравнение $4x_1 - 2x_2 = c$ и параллельна прямой X_1A. Перемещая линию уровня против направления нормального вектора $\vec{n} = (4, -2)$ до крайнего положения X_1A, получим, что множеством оптимальных решений является луч X_1A. В векторной форме это множество можно записать в виде $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \geq 0$. Так как $Z(X_1) = -4$, то $Z_{\min} = -4$.

Если в примере 1 рассмотреть задачу на максимум, то новая задача не имеет решения, так как при перемещении линии уровня в направлении нормального вектора $Z \rightarrow +\infty$. Рассмотрим в примере 1 и алгебраический подход. ОДР является неограниченным множеством, формула (4) имеет вид $X = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \beta_1R_1 + \beta_2R_2$, где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$. Так как $(C, R_1) = 0 \geq 0$, $(C, R_2) = 2 \geq 0$, то задача на минимум разрешима. Так как $Z(X_1) = -4$, $Z(X_2) = -2$, то

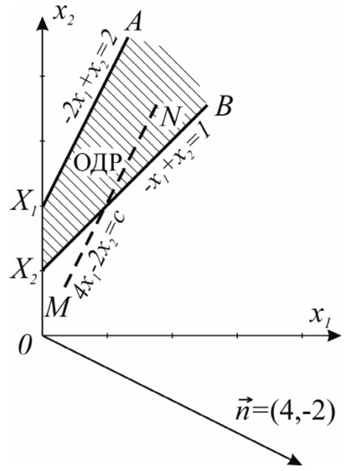

Рис. 1.

оптимальной вершиной является X_1. Так как $(C, R_1) = 0$, то формула (5) имеет вид $X^* = X_1 + \beta_1 R_1$, где $\beta_1 \geq 0$. Так как $(C, R_2) = 2 > 0$, то задача на максимум неразрешима.

Графический метод в случае $n > 2$

Некоторые задачи ЛП могут быть решены графическим методом и в случае $n > 2$. Канонической задачей ЛП называется задача вида

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{6}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_j \geq 0\,\forall j. \tag{8}$$

Условие (7) можно записать в виде $x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = B$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если ранг системы $A_1, \ldots A_n$ равен $n - 2$, то задачу (6)–(8) можно свести к задаче с двумя переменными.

Пример 2. Рассмотрим задачу ЛП

$$Z(X) = -5 - x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min, \tag{9}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_j \geq 0 \, \forall j. \tag{11}$$

Систему (10) запишем в табличной форме и решим методом Жордана-Гаусса (разрешающие элементы заключены в круглые скобки). Параллельно исключим базисные переменные из целевой функции, для чего запишем её в виде уравнения $z + x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -5$ и поместим над табличной формой системы (10). В столбце z этой таблицы расположены коэффициенты при переменной z.

Таблица 1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	1	–4	–3	–5
0	–4	3	(1)	–2	4
0	3	–1	–2	–1	–3
1	–15	13	0	–11	11
0	–4	3	1	–2	4
0	–5	5	0	(–5)	5
1	–4	2	0	0	0
0	–2	1	1	0	2
0	1	–1	0	1	–1

Последние три строчки этой таблицы соответствуют следующей задаче ЛП (базисные переменные в системе (13) заключены в круглые скобки):

$$Z(X) = 4x_1 - 2x_2 \to \min, \tag{12}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + (x_3) = 2, \\ x_1 - x_2 + (x_4) = -1, \end{cases} \tag{13}$$

$$x_j \geq 0 \, \forall j. \tag{14}$$

Система (13) позволяет выразить базисные переменные x_3, x_4 через свободные переменные x_1, x_2. Если подставить эти выражения в условия $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, то получим задачу с двумя переменными:

$$Z(X) = 4x_1 - 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq -1, \end{cases}$$

где $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

После нахождения x_1, x_2 неизвестные x_3, x_4 могут быть найдены из системы (13). Заметим, что систему ограничений этой задачи с двумя переменными можно также получить из системы (13) путём отбрасывания базисных переменных и замены знаков «=» знаками «≤». Полученная задача с двумя переменными совпадает с задачей, рассмотренной в предыдущем параграфе. Следовательно, множество оптимальных решений задаётся формулами $x_1^* = \beta, x_2^* = 2+2\beta$, где $\beta \ge 0$. Из системы (13) находим, что $x_3^* = 0, x_4^* = 1+\beta$. Теперь множество оптимальных решений $X^* = (\beta, 2+2\beta, 0, 1+\beta)$ задачи (9)–(11) можно записать в следующей векторной форме $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \ge 0$, $X_1 = (0, 2, 0, 1)$, $R_1 = (1, 2, 0, 1)$. Ясно, что $Z_{\min} = -4$.

Метод простого перебора опорных решений

Решение общей задачи ЛП можно свести [1] к решению канонической задачи ЛП (6)–(8), в которой все правые части b_i неотрицательны. Эту задачу можно записать в следующем виде:

$$Z(X) = c_0 + (C, X) \to \max(\min), \tag{15}$$

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = B, \tag{16}$$

$$x_j \ge 0 \, \forall j, b_i \ge \theta \, \forall i. \tag{17}$$

Пусть r – ранг системы $A_1, \ldots, A_n$. Опорным решением задачи (15)–(17) называется её допустимое решение $X = (x_1, \ldots, x_n)$, для которого векторы $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, соответствующие его положительным координатам $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, линейно независимы. Если $k = r$, то система $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ является базисом системы $A_1, \ldots, A_n$. Этот базис называется базисом опорного решения X, а X называется невырожденным. В случае $k < r$ опорное решение X называется вырожденным. В этом случае базисом опорного решения X называется любой базис системы $A_1, \ldots, A_n$, содержащий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$.

Так как ОДР не является пустым множеством, то в задаче (15)–(17) есть хотя бы одно опорное решение [1]. Перейдём от системы ограничений (16) к её табличной форме, решим систему методом Жордана-Гаусса и найдём базисное решение, присвоив свободным переменным нулевые значения. Базисное решение будет допустимым, если разрешающие элементы выбираются специальным образом [1] из столбцов, содержащих хотя бы один положительный элемент. Если разрешающий элемент выбирается в j-м столбце и элемент a_{ij} является его единственным положительным элементом, то выбирается a_{ij}. В случае нескольких положительных элементов $a_{i_1 j}, \ldots, a_{i_k j}$ из них выбирается элемент $a_{i_l j}$, для которого отношение $b_{i_l}/a_{i_l j}$ является наименьшим среди отношений $b_{i_1}/a_{i_1 j}, \ldots, b_{i_k}/a_{i_k j}$ Полученное допустимое базисное решение X будет опорным решением. Векторы условий, соответствующие базисным переменным, образуют базис Б этого опорного решения. О системе (16) будем говорить, что она приведена к базису Б опорного решения X. Если в базис ввести новый вектор (ясно, что при этом из базиса выводится один из старых векторов), то получим новый базис. Переходя от одного базиса к другому, можно найти все базисы опорных решений и все опорные решения. Так как допустимое решение задачи (15)–(17) является опорным тогда и только тогда, когда оно является вершиной ОДР [1], то можно найти все вершины ОДР, а затем найти среди них оптимальные. Если ОДР является неограниченным множеством, то в формуле (4) будут присутствовать ещё и направляющие векторы неограниченных рёбер.

Пример 3. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 \to \max, \tag{18}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \end{cases} \tag{19}$$

$$x_j \geq 0 \, \forall j. \tag{20}$$

Запишем систему (19) в табличной форме и решим методом Жордана-Гаусса. Базисные векторы приведены в столбце Б, а отношения $b_{i_1} / a_{i_1 j}, \ldots, b_{i_k} / a_{i_k j}$ – в столбце θ (минимальное отношение подчёркнуто).

Таблица 2

Б	A_1	A_2	A_3	A_4	B	θ
	(1)	–1	2	–1	2	$\underline{2}$
	2	1	–3	1	6	3
	1	–1	2	–1	2	
	0	(3)	–7	3	2	
A_1	1	0	–1/3	0	8/3	
A_2	0	1	–7/3	1	2/3	

Здесь базисными переменными являются x_1 и x_2, а свободными – x_3 и x_4. Базисное решение X_1 = (8/3,2/3,0,0) является начальным опорным решением с базисом Б$_1$ = (A_1, A_2). Система (19) приведена к базису Б$_1$ опорного решения X_1. Ранг r системы векторов A_1, A_2, A_3, A_4 равен двум. Поиск всех базисов опорных решений следует вести среди следующих $C_n^r = C_4^2 = 6$ комбинаций: A_1, A_2; A_1, A_3; A_1, A_4; A_2, A_3; A_2, A_4; A_3, A_4. Если в полученной выше разрешённой системе разрешающий элемент выбрать в столбце A_3, то вектор A_3 окажется в базисе вместо A_1 или A_2, но в обоих случаях базисные решения не будут допустимыми, то есть A_1, A_3 и A_2, A_3 не являются базисами опорных решений. Выберем разрешающий элемент в столбце A_4. Вектор A_4 можно ввести в базис только вместо A_2 (A_2, A_4 не является базисом опорного решения). Тогда базисными переменными будут x_1 и x_4, а свободными – x_2 и x_3.

Таблица 3

Б	A_1	A_2	A_3	A_4	B	θ
A_1	1	0	–1/3	0	8/3	
A_2	0	1	–7/3	(1)	2/3	
A_3	1	0	–1/3	0	8/3	
A_4	0	1	–7/3	1	2/3	

Базисное решение $X_2 = (8/3,0,0,2/3)$ является вторым опорным решением с базисом Б$_2 = (A_1, A_4)$. Здесь мы привели систему (19) к базису Б$_2$ опорного решения X_2. Из шести комбинаций осталось рассмотреть только одну комбинацию A_3, A_4). Для перехода к этому базису мы должны выбрать разрешающий элемент из столбца A_3 последней разрешённой системы. Но тогда базисное решение не будет допустимым, то есть опорным. Итак, в этой задаче ОДР имеет только две вершины: X_1 и X_2.

Перейдём к правилу выявления неограниченности ОДР. Если в системе ограничений, приведённой к какому-нибудь базису опорного решения, среди коэффициентов какой-нибудь свободной переменной нет положительных чисел, то ОДР является неограниченным множеством [1–3]. По столбцам коэффициентов таких переменных можно найти [3] координаты соответствующих направляющих векторов неограниченных ребер. Пусть x_i – такая свободная переменная. Тогда в направляющем векторе $R = (x_1, ..., x_n)$ координата $x_i = 1$, остальным свободным переменным соответствуют нули, а базисным переменным соответствуют коэффициенты при x_i, взятые с противоположным знаком (для каждой базисной переменной коэффициент при x_i берётся из того уравнения, в которое входит эта базисная переменная). Пусть система (19) приведена к базису Б$_1 = (A_1, A_2)$. Из этой системы видим, что ОДР является неограниченным множеством. В этом базисе можно найти направляющий вектор неограниченного ребра $R_1 = (1/3,7/3,1,0)$. Если система (19) приведена к базису Б$_2 = (A_1, A_4)$, то можно найти ещё один направляющий вектор неограниченного ребра $R_2 = (1/3,0,1,7/3)$. Из формулы (4) следует, что ОДР является множеством точек $X = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \beta_1R_1 + \beta_2R_2$, где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$.

Перейдём к правилу выявления разрешимости задачи. Так как $(C, R_1) = 2/3 + 7/3 - 3 - 0 = 0 \leq 0$, $(C, R_2) = 2/3 + 0 - 3 - 35/3 = -14 \leq 0$, то задача на максимум (18) – (20) разрешима.

Перейдем к нахождению множества оптимальных решений по формуле (5). Так как $Z(X_1) = 16/3 + 2/3 - 0 - 0 =16$, $Z(X_2) = 16/3 + 0 - 0 - 10/3 = 2$, $(C, R_1) = 0$, $(C, R_2) \neq 0$, то $Z_{\max} = 6$, множество оптимальных решений можно записать в виде $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \geq 0$, $X_1 = (8/3,2/3,0,0)$, $R_1 = (1/3,7/3,1,0)$. Заметим, что задача неразрешима в случае $Z(X) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 \to \min$, так как $(C, R_2) < 0$.

Симплексный метод

Симплексный метод является методом последовательного улучшения опорных решений. Для рассмотрения особенностей метода в случае неограниченных ОДР, рассмотрим решение задачи (18)–(20) симплексным методом. Запишем систему (19) в табличной форме, а целевую функцию (18) в виде уравнения $z - 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$. Поместим это уравнение (z-строку) в таблице над системой (19). Решим систему (19) методом Жордана-Гаусса и параллельно исключим базисные переменные из z-строки. В этой симплексной таблице столбец A_0 – столбец коэффициентов при z в z-строке и системе (19), а в столбце Б записаны базисные векторы и буква z в z-строке.

Таблица 4

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	B	θ
z	1	–2	–1	3	5	0	
	0	(1)	–1	2	–1	2	<u>2</u>
	0	2	1	–3	1	6	3
z	1	0	–3	7	3	4	
	0	1	–1	2	–1	2	
	0	0	(3)	–7	3	2	
z	1	0	0	0	6	6	
A_1	0	1	0	–1/3	0	8/3	
A_2	0	0	1	–7/3	1	2/3	

Из полученной разрешённой системы находим начальное опорное решение $X_1 = (8/3,2/3,0,0)$ с базисом $Б_1 = (A_1, A_2)$. Неограниченность ОДР выявляется так же, как в предыдущем параграфе. Если в системе ограничений, приведённой к базису опорного решения, среди коэффициентов какой-нибудь свободной переменной x_i нет положительных чисел, то ОДР является неограниченным множеством. Пусть R – соответствующий направляющий вектор неограниченного ребра. Тогда из определения этого вектора следует, что $(C, R) = c_i$, где c_i – i-й коэффициент целевой функции, приведенной к базису опорного решения (из целевой функции исключены базисные переменные). Заметим, что в z-строку коэффициенты целевой функции входят с противоположным знаком. Из последних трёх строк таблицы следует, что ОДР является неограниченным множеством, имеет неограниченное ребро с направляющим вектором $R_1 = (1/3,7/3,1,0)$ и $(C, R_1) = 0$.

Критерий оптимальности опорного решения основан на z-строке. Если в задаче на максимум (минимум) все коэффициенты при небазисных переменных в z-строке являются неотрицательными (неположительными), то опорное решение является оптимальным [2]. Максимальное (минимальное) значение z находится на пересечении z-строки и столбца B. Если при этом хотя бы один коэффициент при небазисной переменной равен нулю, то оптимальное решение не является единственным [3]. По этим нулевым коэффициентам можно найти новые базисы оптимальных опорных решений (если соответствующий вектор можно ввести в базис) и направляющие векторы неограниченных рёбер для формулы (5) (если нельзя ввести соответствующий вектор в базис). Опорное решение X_1 является оптимальным решением и $Z_{\max} = 6$. Решение задачи не является единственным, но новых оптимальных опорных решений нет. Так как $(C, R_1) = 0$, то множество оптимальных решений находим по формуле (5): $X^* = X_1 + \beta R_1$, где $\beta \geq 0$.

Если в условии (18) *max* заменить на *min*, то X_1 не является оптимальным решением. Если опорное решение не является оптимальным, то при поиске оптимального решения в задаче на максимум (минимум) рассматриваются векторы, соответствующие небазисным переменным с отрицательными (положительными) коэффициентами в z-строке [2]. Если среди них есть вектор, который нельзя ввести в базис, то задача неразрешима. В противном случае один из рассматриваемых векторов вводится в базис. В случае невырожденного опорного решения получим базис нового опорного решения, при котором значение целевой функции больше (меньше). В случае вырожденного опорного решения возможен переход к другому базису этого же опорного решения (в этом случае значение целевой функции не изменится). Продолжим симплексную таблицу 4 для решения задачи на минимум в примере 3. Ясно, что разрешающий элемент следует выбрать в столбце A_4.

Таблица 5

Б	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	B	θ
z	1	0	0	0	6	6	
A_1	0	1	0	–1/3	0	8/3	
A_2	0	0	1	–7/3	(1)	2/3	
z	1	0	–6	14	0	2	
A_1	0	1	0	–1/3	0	8/3	
A_4	0	0	1	–7/3	1	2/3	

Из разрешённой системы находим опорное решение $X_2 = (8/3,0,0,2/3)$ с базисом $Б_2 = (A_1, A_4)$ и $Z(X_2) = 2 < Z(X_1) = 6$. Это решение не является оптимальным. Так как вектор A_3 нельзя ввести в базис, то задача неразрешима (из этой таблицы можно найти ещё один направляющий вектор неограниченного ребра $R_2 = (1/3,0,1,7/3)$, для которого $(C, R_2) = -14 < 0$, что доказывает неразрешимость задачи на минимум).

Заключение

Задача ЛП с неограниченной ОДР может возникнуть при составлении математической модели реального процесса, если, например, не учтены некоторые ограничения [2]. Некоторые авторы игнорируют такие задачи ЛП или решают их без учёта неограниченности ОДР. Между тем, таких задач много и разобранные примеры показывают важность учёта тех особенностей, которые связаны с неограниченностью ОДР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука, 1969. 424 с.
2. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 912 с.
3. Киселев А.В. Линейное программирование: учебное пособие. Ч. 1. М.: Издательство РЭА имени Г.В. Плеханова, 2005. 83 с.

REFERENCES

1. Yudin D.B., Gol'shtein E.G. Lineinoe programmirovanie (teoriya, metody i prilozheniya) [Linear programming (theory, methods and applications)]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.

2. Taha H.A. Operations research. An Introduction. New Jersey, Upper Saddle River, Pearson Prentice Hall. 2007. 813 p.
3. Kiselev A.V. Lineinoe programmirovanie: uchebnoe posobie. Ch. 1 [Linear programming: A tutorial. Part 1]. Moscow, PRUE n.a. G.V.Plekhanov Publ., 2005. 83 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Хасанов Анис Саляхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anis Khasanov – doctor of physico-mathematical sciences, professor of the Higher Mathematics Department at the Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Хасанов А.С. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 1. С. 113–123.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.

THE CORRECT REFERENCE TO ARTICLE

A. Khasanov. Peculiarities of algorithms for solving linear programming problems with unbounded feasible regions. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics and Mathematics. 2017, no. 1, pp. 113–123.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-1-113-123.