РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 517.925
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-6-15

О РОЖДАЮЩИХСЯ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ

Ройтенберг В.Ш.
Ярославский государственный технический университет,
150023, г. Ярославль, Московский проспект, д. 88, Российская федерация

Аннотация. Дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых – полиномы второго порядка относительно первой производной с периодическими коэффициентами, рассматриваются на компактификации цилиндрического фазового пространства. Описаны бифуркации бесконечно удалённого тройного предельного цикла.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка на окружности, предельный цикл, бифуркационное многообразие, бифуркации.

LIMIT CYCLES OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION ON THE CIRCLE THAT ARISE FROM INFINITY

V. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University,
Moscovskii prosp. 88, 150023 Yaroslavl, Russian Federation

Abstract. The paper considers the second-order differential equations, whose right-hand sides are polynomials with periodic coefficients, on the compactification of the cylindrical phase space. We describe bifurcations of an infinitely far triple limit cycle.

Key words: second-order differential equation on the circle, limit cycle, bifurcation variety, bifurcations

Введение. Постановка задачи

Для теории колебаний представляет значительный интерес задача нахождения условий, при которых существуют предельные циклы дифференциальных уравнений второго порядка (см., например, [1–3]).

Будем рассматривать уравнения второго порядка вида

$$\ddot{x} = a_0(x) + a_1(x)\dot{x} + a_2(x)\dot{x}^2$$

с ω-периодическими C^r-функциями ($r \geq 0$) $a_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 0, 1, 2$. Можно считать, что уравнение задано на окружности $S^1 = \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$. Обозначим $\mathrm{A}_\omega^{2,r}$ – множество таких уравнений. Пусть $C^r(S^1)$ – банахово пространство ω-периодических C^r-функций с нормой $\|\varphi\|_r := \max\limits_{k=0,1,\ldots,r} \max\limits_{x \in \mathbf{R}} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$. Отождествив уравнение a со строкой (a_0, a_1, a_2), мы отождествим $\mathrm{A}_\omega^{2,r}$ с банаховым пространством $C^r(S^1) \oplus C^r(S^1) \oplus C^r(S^1)$ с нормой $\|a\| = \max\limits_{i \in \{0,1,2\}} \|a_i\|_r$. Уравнение $a \in \mathrm{A}_\omega^{2,r}$ определяет на фазовом пространстве $TS^1 = S^1 \times \mathbf{R}$ систему уравнений

$$x\text{Ð}= y, \quad y = a_{\tilde{}}(x) + a\ (x)y + a\ (x)y^2 x = y,$$

которую также будем обозначать a.

Обозначим $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – двухточечную компактификацию $\mathbf{R}$. Превратим $\overline{\mathbf{R}}$ в одномерное C^∞-многообразие с краем, взяв в качестве карт $(\mathbf{R}, h_1)$, $h_1(x) := x$, $((0, +\infty], h_2)$, $h_2(x) := 1/x$ при $x \in (0, +\infty)$ и $h_2(+\infty) := 0$, $([-\infty, 0), h_3)$, $h_3(x) := 1/x$ при $x \in (-\infty, 0)$ и $h_3(-\infty) := 0$.

В координатах x, $z = 1/y$ в $S^1 \times (0, +\infty)$ и $S^1 \times (-\infty, 0)$ система a имеет вид

$$\dot{x} = 1/z, \quad \dot{z} = -a_0(x)z^2 - a_1(x)z - a_2(x).$$

В областях $S^1 \times (0, +\infty)$ и $S^1 \times (-\infty, 0)$ она имеет те же (ориентированные) траектории, что и система уравнений, соответственно,

$$\overline{a}_+ : \begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{z} = -a_0(x)z^3 - a_1(x)z^2 - a_2(x)z \end{cases}$$

и

$$\overline{a}_- : \begin{cases} \dot{x} = -1, \\ \dot{z} = a_0(x)z^3 + a_1(x)z^2 + a_2(x)z. \end{cases}$$

Но системы $\overline{a}_+$ и $\overline{a}_-$ определены и при $z = 0$, то есть, соответственно, на $S^1 \times (0, +\infty]$ и $S^1 \times [-\infty, 0)$. Кривые $\Gamma_+ := S^1 \times \{+\infty\}$ и $\Gamma_- := S^1 \times \{-\infty\}$, задаваемые в координатах x, z уравнением $z = 0$, являются замкнутыми траекториями, соответственно, систем $\overline{a}_+$ и $\overline{a}_-$. Будем их называть *бесконечно удаленными траекториями* уравнения $a \in \mathrm{A}_\omega^{2,r}$. Обозначим

$$m(a) := -\int_0^\omega a_2(x)dx, \; \ell(a) := -\int_0^\omega a_1(s) \exp \int_s^0 a_2(\sigma) d\sigma ds.$$

В работе [4] было доказано, что если $m(a) = 0$, $\ell(a) \neq 0$, то уравнение $\tilde{a} \in \mathrm{A}_{\omega}^{2,r}$ близкое к a при $m(\tilde{a})\ell(a) > 0$ $(m(\tilde{a})\ell(a) < 0)$ имеет в $S^1 \times (0, +\infty)$ $(S^1 \times (-\infty, 0))$ единственный предельный цикл, рождающийся из Γ_+ (Γ_-).

В настоящей работе мы покажем, что условия $m(a) = 0$, $\ell(a) = 0$, $L(a) \neq 0$, где $L : \mathrm{A}_{\omega}^{2,r} \to \mathbf{R}$ – некоторая непрерывная функция, задают в $\mathrm{A}_{\omega}^{2,r}$ гладкое бифуркационное подмногообразие коразмерности два, и опишем разбиение некоторой окрестности уравнения a в $\mathrm{A}_{\omega}^{2,r}$ на классы топологической эквивалентности в окрестности Γ_+. Бифуркации в окрестности Γ_- сводится к бифуркациямв окрестности Γ_+ заменами $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$.

Функция последования бесконечно удаленного предельного цикла

Обозначим $\overline{a}_i : S^1 \times \mathrm{A}_{\omega}^{2,r} \to \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, 2)$ функции, ставящие в соответствие точке $x \in S^1$ и уравнению $a \in \mathrm{A}_{\omega}^{2,r}$ коэффициент $a_i(x)$ в этом уравнении. Они принадлежат классу C^r по переменным (x, a) и линейны по a.

Пусть уравнение $a \in \mathrm{A}_{\omega}^{2,r}$. Обозначим $U_{\nu}(a) = \{\tilde{a} \in \mathrm{A}_{\omega}^{2,r} : \|\tilde{a} - a\| < \nu\}$. Траектории уравнения $\tilde{a} \in U_{\nu}(a)$, лежащие в $S^1 \times (0, +\infty)$, являются интегральными кривыми уравнения $dz/dx = -\overline{a}_0(x,\tilde{a})z^3 - \overline{a}_1(x,\tilde{a})z^2 - \overline{a}_2(x,\tilde{a})z$. Пусть $z(x,u,\tilde{a})$ – решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $z(0,u,\tilde{a}) = u$. При достаточно малых $\nu > 0$, $\rho > 0$ оно определено для $(x,u,\tilde{a}) \in (-2\omega, 2\omega) \times (-\rho, \rho) \times U_{\nu}(a)$, принадлежит классу C^r по переменным $(x,u,\tilde{a})$ и имеет производные любого порядка по переменным $(u,\tilde{a})$, непрерывно зависящие от $(\tilde{\ }, \ ,\tilde{\ })$. Так как $z(x,0,\tilde{a}) \equiv 0$, то

$$z(x,u,\tilde{a}) = z_1(x,\tilde{a})u + z_2(x,\tilde{a})u^2 + z_3(x,\tilde{a})u^3 + \zeta(x,u,\tilde{a}), \tag{1}$$

где $\partial^s \zeta(x,0,\tilde{a}) / \partial u^s = 0$ при s = 0, 1, 2, 3. Для функций $\tilde{\ }_k(\ ,\tilde{\ })$, $k = 1, 2, 3$, получаем дифференциальные уравнения и начальные условия:

$$\frac{dz_1}{dx} = -\overline{a}_2(x,\tilde{a})z_1,\ z_1(0,\mu) = 1;$$

$$\frac{dz_2}{dx} = -\overline{a}_2(x,\tilde{a})z_2 - \overline{a}_1(x,\tilde{a})z_1^2(x,\tilde{a}),\ z_2(0,\tilde{a}) = 0;$$

$$\frac{dz_3}{dx} = -\overline{a}_2(x,\tilde{a})z_3 - 2\overline{a}_1(x,\tilde{a})z_1(x,\tilde{a})z_2(x,\tilde{a}) - \overline{a}_0(x,\tilde{a})z_1^3(x,\tilde{a}),\ z_3(0,\tilde{a}) = 0,$$

из которых последовательно находим

$$z_1(x,\tilde{a}) = \exp\left(-\int_0^x \overline{a}_2(s,\tilde{a})ds\right), \tag{2}$$

$$z_2(x,\tilde{a}) = z_1(x,\tilde{a})I_1(x,\tilde{a}), \text{ где } I_1(x,\tilde{a}) = -\int_0^x \overline{a}_1(s,\tilde{a})z_1(s,\tilde{a})ds, \tag{3}$$

$$z_3(x,\tilde{a}) = z_1(x,\tilde{a})I_2(x,\tilde{a}), \tag{4}$$

где

$$I_2(x,\tilde{a}) = -\int_0^x [2\overline{a}_1(s,\tilde{a})z_2(s,\tilde{a}) + \overline{a}_0(s,\tilde{a})z_1^2(s,\tilde{a})]ds. \tag{5}$$

Функция $u \mapsto z(\omega, u, \tilde{a})$ $u \in [0, \rho)$ – функция последования по траекториям $\tilde{a}$.

Бифуркационное многообразие коразмерности два

Обозначим для уравнения $\tilde{a} \in \mathrm{A}_\omega^{2,r}$

$$m(\tilde{a}) := -\int_0^\omega \overline{a}_2(x,\tilde{a})dx, \ \ell(\tilde{a}) := I_1(\omega,\tilde{a}), \ L(\tilde{a}) := I_2(\omega,\tilde{a}). \tag{6}$$

Функции $m, \ell, L : \mathrm{A}_\omega^{2,r} \to \mathbf{R}$, очевидно, бесконечно дифференцируемы.

Ввиду (1) – (6) Γ_+ при $m(\tilde{a}) < 0$ $(m(\tilde{a}) > 0)$ является устойчивым (неустойчивым) грубым циклом, при $m(\tilde{a}) = 0$, $\ell(\tilde{a}) < 0$ $(\ell(\tilde{a}) > 0)$ – устойчивым (неустойчивым) двойным циклом, а при $m(\tilde{a}) = 0$, $\ell(\tilde{a}) = 0$, $L(\tilde{a}) < 0$ $(L(\tilde{a}) > 0)$ – устойчивым (неустойчивым) тройным циклом.

Теорема 1. *Множество* $\mathrm{B}_\Gamma^{2,r} := \{\tilde{a} \in \mathrm{A}_\omega^{2,r} : m(\tilde{a}) = 0, \ \ell(\tilde{a}) = 0, \ L(\tilde{a}) \neq 0\}$ *является вложенным* C^∞*-подмногообразием в* $\mathrm{A}_\omega^{2,r}$ *коразмерности два.*

Доказательство. Пусть $f : \mathrm{A}_\omega^{2,r} \to \mathbf{R}^2$, $f(\tilde{a}) := (m(\tilde{a}), \ \ell(\tilde{a}))$. Возьмем $a \in \mathrm{B}_\Gamma^{2,r}$. Найдем производную $\ell_* = \ell'(a) : \mathrm{A}_\omega^{2,r} \to \mathbf{R}$. Если $a_i(x) = \overline{a}_i(x,a)$, $h \in \mathrm{A}_\omega^{2,r}$: $\ddot{x} = h_0(x) + h_1(x)\dot{x} + h_2(x)\dot{x}^2$, то

$$\ell_*(h) = \tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \ell(a+\tau h) = -\tfrac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \int_0^\omega (a_1(s) + \tau h_1(x)) \exp\int_s^0 (a_2(\sigma) + \tau h_2(\sigma))d\sigma ds =$$

$$= -\int_0^\omega \left[h_1(s) + a_1(s)\int_s^0 h_2(\sigma)d\sigma \right] \exp\int_s^0 a_2(\sigma)d\sigma ds.$$

Для $h : \ddot{x} = \dot{x}$ $m(h) = 0$, $\ell_*(h) = -\int_0^\omega \exp\int_s^0 a_2(\sigma)d\sigma ds \neq 0$, а для $h : \ddot{x} = \dot{x}^2$ $m(h) = -\omega \neq 0$. Поэтому линейные функции $m : \mathrm{A}_\omega^{2,r} \to \mathbf{R}$ и $\ell_* = \ell'(a) : \mathrm{A}_\omega^{2,r} \to \mathbf{R}$

линейно независимы. Следовательно, $A_{\omega}^{2,r} = E^2 \oplus \Lambda$, где E^2 – двумерное подпространство, $\Lambda = \{\tilde{a} \in A_{\omega}^{2,r} : m(\tilde{a}) = 0,\ \ell_*(\tilde{a}) = 0\}$, а отображение

$f_{\varepsilon}'(a) : E^2 \ni \varepsilon \mapsto (m(\varepsilon), \ell'(a)(\varepsilon)) = (m(\varepsilon), \ell_*(\varepsilon)) \in \mathbf{R}^2$ – сюръективно и потому изоморфизм. Пусть $\Lambda_{\delta} := \{\lambda \in \Lambda : \|\lambda\| < \delta\}$. По теореме о неявной функции существует C^{∞}-отображение $\eta : (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta})^2 \times \Lambda_{\tilde{\delta}} \to E^2$, $\tilde{\delta} > 0$, такое, что $\eta(0,0,0) = 0$, $f(\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) + \lambda \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Равенство $\tilde{g}((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda) = \eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) + \lambda$ задает такой C^{∞}-диффеоморфизм $\tilde{g}$ множества $(-\tilde{\delta}, \tilde{\delta})^2 \times \Lambda_{\tilde{\delta}}$ на окрестность U уравнения a в $A_{\omega}^{2,r}$, что

$$m(\tilde{a}) = \varepsilon_1, \ell(\tilde{a}) = \varepsilon_2 \text{ для уравнения } \tilde{a} = \tilde{g}((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda). \qquad (7)$$

Так как L – непрерывная функция, то $\tilde{\delta}$ можно считать выбранным так, что $L(\tilde{a}) \neq 0$ для $\tilde{a} \in U$. Поэтому $\tilde{g}(\{(0,0)\} \times \Lambda_{\tilde{\delta}}) = B_{\Gamma}^{2,r} \cap U$, то есть $B_{\Gamma}^{2,r}$ – вложенное C^{∞}-подмногообразие $A_{\omega}^{2,r}$ коразмерности два.

Бифуркации бесконечно удаленного тройного цикла

Вследствие (1) – (7) для $\tilde{a} = \tilde{g}((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda)$ функция последования имеет вид $z(\omega, u, \tilde{a}) = e^{\varepsilon_1} u + e^{\varepsilon_1} \varepsilon_2 u^2 + \overline{q}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) u$, где

$$\overline{q} \in C^{\infty}, \overline{q}(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \overline{q}_u'(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, \overline{q}_{uu}''(0,0,0,0) = 2L(a).$$

При достаточно малом $\overline{\delta} \in (0, \tilde{\delta})$ равенство

$$g((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda) := \tilde{g}((\ln(1+\varepsilon_1), \varepsilon_2(1+\varepsilon_1)^{-1}), \lambda)$$

задает C^{∞}-диффеоморфизм g множества $(-\overline{\delta}, \overline{\delta})^2 \times \Lambda_{\overline{\delta}}$ на окрестность уравнения a в $A_{\omega}^{2,r}$, причем $g((0,0), \lambda) = \tilde{g}((0,0), \lambda)$. Диффеоморфизм g дает более удобную параметризацию окрестности уравнения a, поскольку

$$\forall \tilde{a} = g((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda) \quad z(\omega, u, \tilde{a}) = (1+\varepsilon_1) u + \varepsilon_2 u^2 + q(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) u, \qquad (8)$$

где

$$q \in C^{\infty}, q(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = q_u'(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, q_{uu}''(0,0,0,0) = 2L(a). \qquad (9)$$

Теорема 2. *Пусть* $a \in B_{\Gamma}^{2,r}$ *и* $L(a) < 0$. *Тогда существуют числа* $\rho_0 > 0$, $\delta_0 \in (0, \overline{\delta})$ *и разбиение* $(-\delta_0, \delta_0)^2 \times \Lambda_{\delta_0}$ *на множества* $\Sigma_1^0, \Sigma_2^0, \Sigma_3^0, \Sigma_1^1, \Sigma_2^1, \Sigma_3^1$ *и* Σ^2 (рис. 1), *где*

$$\Sigma_1^0 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) : 0 < \varepsilon_2 < \delta_0,\ \lambda \in \Lambda_{\delta_0},\ \gamma(\varepsilon_2, \lambda) < \varepsilon_1 < 0\},$$

$$\gamma:(-\delta_0,\delta_0)\times\Lambda_{\delta_0}\to\mathbf{R},\gamma\in C^\infty,$$

$$-\delta_0<\gamma(\varepsilon_2,\lambda)<0 \text{ при } 0<\varepsilon_2<\delta_0, \gamma(0,\lambda)=\partial\gamma(0,\lambda)/\partial\varepsilon_2=0,$$

$$\Sigma_2^0=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda):\lambda\in\Lambda_{\delta_0}, 0<\varepsilon_2<\delta_0,\ -\delta_0<\varepsilon_1<\gamma(\varepsilon_2,\lambda) \text{ или } -\delta_0<\varepsilon_2\le 0,-\delta_0<\varepsilon_1<0\},$$

$$\Sigma_3^0=(0,\delta_0)\times(-\delta_0,\delta_0)\times\Lambda_{\delta_0},\ \Sigma_1^1=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda):\varepsilon_1=\gamma(\varepsilon_2,\lambda),\ 0<\varepsilon_2<\delta_0,\lambda\in\Lambda_{\delta_0}\},$$

$$\Sigma_2^1=\{0\}\times(-\delta_0,0)\times\Lambda_{\delta_0}, \Sigma_3^1=\{0\}\times(0,\delta_0)\times\Lambda_{\delta_0}, \Sigma^2=\{(0,0)\}\times\Lambda_{\delta_0},$$

со следующими свойствами: *1) Уравнения из* $g(\Sigma^2)\subset \mathrm{B}_\Gamma^2$ *имеют в* $V(\Gamma_+):=S^1\times(\rho_0,+\infty]$ *единственный (устойчивый тройной) цикл* Γ_+. *2) Уравнения из* $g(\Sigma_k^0)$, *k = 1, 2, 3, имеют в* $V(\Gamma_+)$ *только грубые циклы, при k = 1 два устойчивых, включая* Γ_+, *и один неустойчивый, при k = 2 один устойчивый –* Γ_+, *при k = 3 один неустойчивый –* Γ_+ *и один устойчивый. 3) Уравнения из* $g(\Sigma_1^1)$ *имеют в* $V(\Gamma_+)$ *грубый устойчивый цикл* Γ_+ *и двойной цикл.*

4) Уравнения из $g(\Sigma_2^1)$ *имеют в* $V(\Gamma_+)$ *единственный (устойчивый двойной) цикл* Γ_+. *5) Уравнения из* $g(\Sigma_3^1)$ *имеют в* $V(\Gamma_+)$ *двойной цикл* Γ_+ *и грубый устойчивый цикл.*

Замечание. При $L(a)>0$ утверждение теоремы остается справедливым, если устойчивые циклы заменить на неустойчивые и наоборот.

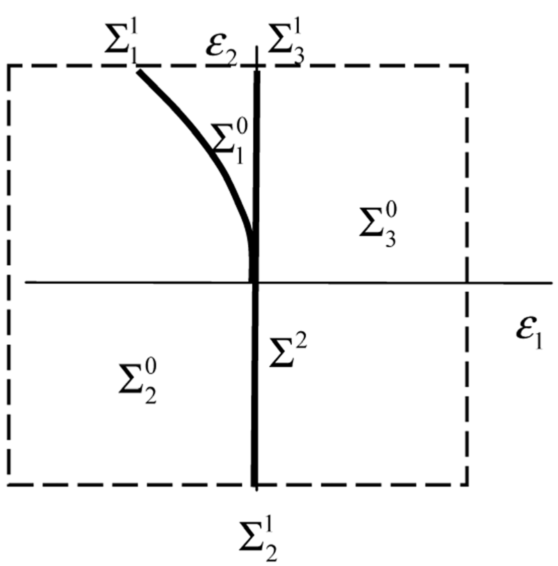

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

Доказательство. Для уравнения $\tilde{a} = g((\varepsilon_1, \varepsilon_2), \lambda)$ функцию расхождения $\tilde{d}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) := z(\omega, u, \tilde{a}) - u$ представим в виде $\tilde{d}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = ud(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$, где ввиду (8) и (9)

$$d(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 u + q(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda), \tag{10}$$

$$d(0,0,0,0) = d'_u(0,0,0,0) = 0,\ d''_{uu}(0,0,0,0) = 2L(a). \tag{11}$$

Уменьшив при необходимости ρ и $\overline{\delta}$ можно считать, что для всех $u \in [-\rho, \rho]$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in (-\overline{\delta}, \overline{\delta})^2 \times \Lambda_{\overline{\delta}}$

$$d'_{\varepsilon_1}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \geq 1/2, \tag{12}$$

$$d''_{uu}(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \leq L(a) < 0. \tag{13}$$

Зафиксируем ρ. Так как $z(x, 0, a) = 0$ при $x \in [0, \omega]$, мы можем выбрать числа $\rho_0 \in [0, \rho]$ и $\delta_0 \in (0, \overline{\delta})$ так, чтобы

$$0 < z(x, u, \tilde{a}) < \rho \text{ при } x \in [0, \omega],\ u \in (0, \rho_0),\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in (-\delta_0, \delta_0)^2 \times \Lambda_{\delta_0}. \tag{14}$$

Фиксируем ρ_0. Ввиду (11) $d(u, 0, 0, 0) < 0$ для $u \in (0, \rho]$. Поэтому δ_0 можно выбрать так, что

$$d(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) < 0 \text{ для всех } u \in [\rho_0, \rho],\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in (-\delta_0, \delta_0)^2 \times \Lambda_{\delta_0}. \tag{15}$$

Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных ε_1, u

$$\begin{cases} d(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 u + q(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0, \\ d'_u(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_2 + q'_u(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Так как при $(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = (0, 0, 0, 0)$ d и d'_u обращаются в нуль, а

$$\begin{vmatrix} d'_{\varepsilon_1} & d'_u \\ d''_{\varepsilon_1 u} & d''_{uu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2L(a) \end{vmatrix} = 2L(a) \neq 0,$$

то по теореме о неявной функции найдутся такие числа $\delta_1, \delta_2 \in (0, \overline{\delta})$, $\rho_1 \in (0, \rho)$, что для любых $(\varepsilon_2, \lambda) \in (-\delta_1, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1}$ система (16) имеет в $(-\delta_2, \delta_2) \times (-\rho_2, \rho_2)$ единственное решение $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$, $u = \psi(\varepsilon_2, \lambda)$,
где $\gamma : (-\delta_1, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1} \to (-\delta_2, \delta_2)$ и $\psi : (-\delta_1, \delta_1) \times \Lambda_{\delta_1} \to (-\rho_1, \rho_1)$ – C^∞-функции. Ввиду (9) и (10) при $(\varepsilon_2, \lambda) \in \{0\} \times \Lambda_{\delta_1}$ $\varepsilon_1 = 0$, $u = 0$ – решение системы (16). Поэтому

$$\gamma(0, \lambda) = \psi(0, \lambda) = 0 \text{ для любых } \lambda \in \Lambda_{\delta_1} \tag{17}$$

Подставив $u = \psi(\varepsilon_2, \lambda)$, $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$ в (16) и продифференцировав по ε_2, получим

$$\gamma'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)+\varepsilon_2\psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)+\psi(\varepsilon_2,\lambda)+$$
$$+\,q'_u(u,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)\psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)+q'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)\gamma'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)+q'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)=0,$$
$$1+q''_{uu}(u,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)\psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)+q''_{u\varepsilon_1}(u,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)\gamma'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)+q''_{u\varepsilon_2}(u,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)=0, \quad (18)$$

где $u = \psi(\varepsilon_2, \lambda)$, $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$. Из этих равенств, используя (9) и (17), находим

$$\gamma'_{\varepsilon_2}(0,\lambda)=0, \quad (19)$$

$$\psi'_{\varepsilon_2}(0,0)=-1/2L(a). \quad (20)$$

Ввиду (20) мы можем считать δ_1 столь малым, что $\psi'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)\geq -1/3L(a)$ при всех $(\varepsilon_2,\lambda)\in(0,\delta_1)\times\Lambda_{\delta_1}$. Отсюда и из (17) получаем

$$\psi(\varepsilon_2,\lambda)>0 \text{ при всех } (\varepsilon_2,\lambda)\in(0,\delta_1)\times\Lambda_{\delta_1}. \quad (21)$$

Продифференцировав (18) по ε_2, положив $\varepsilon_2 = 0$, $\lambda = 0$ и использовав равенства (9) и (17), получим $\gamma''_{\varepsilon_2\varepsilon_2}(0,0)+2\psi'_{\varepsilon_2}(0,0)+L(a)(\psi'_{\varepsilon_2}(0,0))^2=0.$ С учетом (20) и (9) отсюда следует, что $\gamma''_{\varepsilon_2\varepsilon_2}(0,0)=3/4L(a).$ Считая δ_1 достаточно малым, будем иметь

$$1/L(a)<\gamma''_{\varepsilon_2\varepsilon_2}(\varepsilon_2,\lambda)<1/2L(a)<0 \text{ для всех } (\varepsilon_2,\lambda)\in(0,\delta_1)\times\Lambda_{\delta_1}. \quad (22)$$

Из (17), (19) и (22) следует, что $\delta \in (0, \delta)$ можно выбрать так, что

$$-\varepsilon_2<\gamma(\varepsilon_2,\lambda)<0 \text{ для всех } (\varepsilon_2,\lambda)\in(0,\delta_*)\times\Lambda_{\delta_*}. \quad (23)$$

Число δ_0, выбранное выше, можно считать меньшим δ_*. Ввиду (23) $-\delta_0 < \gamma(\varepsilon_2, \lambda) < 0$ при $(\varepsilon_2, \lambda) \in (0, \delta_0) \times \Lambda_{\delta_0}$. Определим теперь множества Σ_i^j, Σ^2 и окрестность $V(\Gamma_+)$ согласно формулировке теоремы и докажем соответствующие утверждения для уравнений из $g(\Sigma_i^j)$ и $g(\Sigma^2)$.

Пусть $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)\in\Sigma_1^1$, то есть $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon_2, \lambda)$. В этом случае $\tilde{d}'_u(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)=\varepsilon_1<0$, и Γ_+ – устойчивый грубый цикл. Из (13) и определения функций γ и ψ следует, что $\psi(\varepsilon_2, \lambda)$ – единственный нуль функции $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)$ на $(0, \rho)$ и он двукратный. Тем самым, с дугой $x = 0$, $0 < z < \rho$ пересекается единственная замкнутая траектория – двойной цикл. Ввиду (14) и (15) он целиком лежит в $V(\Gamma_+)$.

Пусть $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)\in\Sigma_1^0$. Из (12) следует, что $d(\psi(\varepsilon_2, \lambda),\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda > 0$. Отсюда и из (13) вытекает, что $d(\cdot,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)$ имеет два нуля: $u_1 \in (0,\psi(\varepsilon_2, \lambda))$, причем $\tilde{d}'_u(u_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)>0$, и $u_2 \in (\psi(\varepsilon_2, \lambda), \rho_0)$, причем $\tilde{d}'_u(u_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)<0.$ Им соответствуют неустойчивый и устойчивый грубые предельные циклы. Ввиду (14) и (15) они лежат в $V(\Gamma_+)$. Так как $\varepsilon_1 < 0$, то Γ_+ – устойчивый грубый цикл.

Пусть $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda)\in\Sigma_2^0$ и $\varepsilon_2 > 0$. Ввиду (12)

$$d(u,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda) < 0 \text{ при всех } u \in (0, \rho). \quad (24)$$

Если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in \Sigma_2^0$ и $\varepsilon_2 \le 0$, то, $\;'(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \varepsilon_2 \le 0$. Отсюда и из (13) следует, что $d_u'(u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) < 0$ при всех $u \in (0, \rho)$. Поскольку $d(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\lambda) = \varepsilon_1 < 0$, то также имеем (24). Тем самым, при $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \in \Sigma_2^0$ в $V(\Gamma_+)$ имеется единственный (грубый устойчивый) предельный цикл Γ_+.

Случаи Σ^2 и $\Sigma_i^1 (i = 2,3)$ рассматриваются аналогично.

Пример

Приведем пример уравнения маятникового типа, зависящего от двух существенных параметров $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, для которого реализуются описанные в теореме 2 бифуркации. Пусть

$$a_\mu^\pm: \quad \ddot{x} = \pm 1 + v_0 \sin x + (\mu_1 + v_1 \cos x)\dot{x} + (\mu_2 + v_2 \cos x)\dot{x}^2.$$

Параметры v_0, v_1, v_2 будем считать достаточно малыми по модулю. Имеем

$$m(a_\mu^\pm) = -\int_0^{2\pi} (\mu_2 + v_2 \cos x)\, dx = -2\pi\mu_2,$$

$$\ell(a_\mu^\pm) = -\int_0^{2\pi} (\mu_1 + v_1 \cos x) \exp \int_x^0 (\mu_2 + v_2 \cos s)\, ds\, dx = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + o(|\mu|),$$

где

$$k_1 = -\int_0^{2\pi} \exp(-v_2 \sin x)\, dx \ne 0, \; k_2 = \int_0^{2\pi} v_1 x \cos x \exp(-v_2 \sin x)\, dx,$$

$$L(a_0^\pm) = \int_0^{2\pi} [(\mp 1 - v_0 \sin x) e^{-2v_2 \sin x} - 2v_1 z_2(x, v_1, v_2) \cos x]\, dx,$$

где $z_2(x, v_1, v_2) = -e^{-v_2 \sin x} \int_0^x v_1 \cos s\, e^{-v_2 \sin s} ds$ – непрерывная функция. Так как $m(a_0^\pm) = \ell(a_0^\pm) = 0$, а при достаточно малых $|v_j|$ $(j = 0,1,2)$ $\operatorname{sgn} L(a_0^\pm) = \mp 1$, то уравнение $a_0^+ (a_0^-)$ имеет устойчивый (неустойчивый) бесконечно удаленный тройной предельный цикл. Сделав замену параметров $\varepsilon_1 = -2\pi\mu_2$, $\varepsilon_2 = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + o(|\mu|)$, получим $m(a_\mu^\pm) = \varepsilon_1$, $\ell(a_{\mu(\varepsilon)}^\pm) = \varepsilon_2$. Тем самым, для уравнения $a_\mu^\pm$ на плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ имеем бифуркационную диаграмму, изображенную на рис.1 и описанную в теореме 2 и в замечании к ней.

Заключение

В работе рассмотрены дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых полиномы второго порядка относительно первой производной с периодическими коэффициентами. Описаны бифуркации бесконечно удаленного тройного предельного цикла. В частности, даны условия рождения устойчивых предельных циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 243 с.
2. Гладков С.О., Богданова С.Б. К нелинейной теории теплопроводности // Журнал технической физики. 2016. Т. 86, вып. 2. С. 1–7.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Simulation on nonlinear physical processes with the generalized phenomenological equation // International J. of Mechanics. 2015, vol. 9, pp. 1536–1542.
4. Ройтенберг В.Ш. О предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Научно-технический вестник Поволжья. 2017. № 1. С. 25–28.

REFERENCES

1. Arrowsmith D.K., Place C.M. Ordinary differential equations: a qualitative approach with applications. London, Chapman and Hall, 1990. 250 p.
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. To the nonlinear theory of heat conduction. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Journal of Technical Physics]. 2016, vol. 86, no. 2, pp. 1–7.
3 Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Simulation on nonlinear physical processes with the generalized phenomenological equation // International J. of Mechanics. 2015, vol. 9, pp. 1536–1542.
4. Roitenberg V.Sh. On the limit cycles of one second-order differential equation on the circle. In: *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya* [Scientific and Technical Bulletin of the Volga region]. 2017, no. 1, pp. 25–28.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Ярославского государственного технического университета;
e-mail: vroitenberg@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Sh. Roitenberg – PhD in Physico-mathematical Sciences, associate professor of the Department of Higher Mathematics at the Yaroslavl State Technical University;
e-mail: vroitenberg@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Ройтенберг В.Ш. О рождающихся из бесконечности предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2017. № 2. С. 6–15.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-6-15.

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

V. Roitenberg. Limit cycles of a second-order differential equation on the circle that arise from infinity. In: *Bulletin of Moscow Region State University.* Series: Physics & Mathematics. 2017, no. 2, pp. 6–15.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-2-6-15.