УДК 539.3

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-12-22

О ПРИМЕНИМОСТИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Боброва И.А.¹, Бугримов А.Л.², Кузнецов В.С.²¹ *Общество с ограниченной ответственностью «Ноледж Лаб»**141700, Московская область, г. Долгопрудный, Лихачевский проезд, д. 4 стр. 1, Российская Федерация*² *Московский государственный областной университет**105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос физического содержания и допустимости дифференцирования дробного порядка. Продемонстрирован обобщающий характер применения аппарата производных и интегралов дробного порядка при описании модели среды, обладающей свойствами: упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость. Авторы приходят к выводу, что, с одной стороны, проявляется общность физических моделей сплошной среды «упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость», с другой стороны, демонстрируется случай обоснованности применения аппарата дробных производных и интегралов дробного порядка к этим задачам.

Ключевые слова: производная дробного порядка, интеграл дробного порядка, упругость, вязкоупругость, вязкая жидкость, канторово множество, фрактал.

APPLICATION OF FRACTIONAL DERIVATIVES IN PHYSICAL MODELS

I. Bobrova¹, A. Bugrimov², V. Kuznetsov²¹ *Limited Liability Company “Noledzh Lab”**Likhachevsky proezd 4/1, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*² *Moscow Region State University**ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. The problem of physical content and admissibility of differentiation of fractional order is considered. The generalizing character of the apparatus of derivatives and integrals of fractional order is demonstrated in describing the model of a medium with the elasticity – viscoelasticity – viscous liquid properties. A conclusion is made that, on the one hand, the generality of the physical models of a continuous ‘elasticity – viscoelasticity – a viscous liquid’ medium is manifested and, on the other hand, the case of the validity of the application of the apparatus of fractional derivatives and integrals of fractional order to these problems is demonstrated.

Key words: fractional derivative, fractional integral, elastic, viscoelasticity, viscous fluid, Cantor set, fractal.

Классические ситуации предусматривают применение производной для определения скорости протекания процесса (в направлении соответствующей оси). Производная второго порядка определяет ускорение, производная третьего порядка применяется для учёта вязкости среды. Вообще же производные более высоких (целочисленных) порядков применяются для разрешения внутренних проблем математических построений.

Аппарат производных и интегралов дробного порядка [11; 12] находит всё более широкое применение в моделировании физических процессов [2; 4; 6; 8; 10]. Поэтому важным является осознание того, в каких задачах и при каких условиях имеет смысл и допустимо применение этого аппарата.

Естественно, к производным и интегралам дробного порядка (далее – производным дробного порядка или дифференцированию дробного порядка) можно предъявить определенные требования. Одно из требований состоит в том, что в случае приближения порядка к целочисленному производная должна совпадать с обычной целочисленной. Это требование, как и другие свойства дифференцирования, выполняется [12].

Представляются обоснованными и другие требования, которые, скорее всего, следует назвать ожиданиями.

Например, производная порядка n функции $f(x) = x^n$, равна:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$$

Дробные производные определяются различным образом. Здесь будет рассмотрено определение Римана – Лиувилля [12]:

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad (1)$$

и определение, основанное на обобщении целочисленной производной степенной функции x^n [2]:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^k) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}. \quad (2)$$

В случае дробной производной, порядок которой совпадает с порядком монома, ожидания оправдываются. Действительно, согласно (2):

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} = n!,$$

и поэтому:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}(x^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1+\alpha), \quad (3)$$

и, согласно (1), с учётом замены $t = ix$:

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{\alpha}(x^{\alpha}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^{\alpha} dt}{(x-t)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{(ux)^{\alpha} x du}{x^{\alpha} (1-u)^{\alpha}} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{u^{\alpha}}{(1-u)^{\alpha}} du = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \Gamma(1-\alpha) \cdot \Gamma(1+\alpha) = \Gamma(1+\alpha). \quad (4)
 \end{aligned}$$

На рис. 1 приведён график, построенный для (3) при $0 \leq \alpha \leq 3$.

При целочисленном дифференцировании, например, функции $y = \sin(x)$, получается точно такая же функция, но смещенная на величину $\frac{\pi}{2}n$:

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Рис. 1. Значения производной по (3) при совпадении порядка дифференцирования с порядком монома $0 \leq \alpha \leq 3$

Для дробного порядка α :

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right). \quad (5)$$

Но вычисление дробной производной Римана – Лиувилля функции $y = \sin(x)$ представляет определённые трудности (следует также заметить, что при $x \rightarrow 0$ $D_{0+}^{\alpha}(\sin x) \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{\alpha}(\sin x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sin t dt}{(x-t)^{\alpha}} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{1-\alpha} (x-t)^{1-\alpha} \sin t \Big|_0^x + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} \cos t dt \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} \cos t dt \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{\cos t dt}{(x-t)^\alpha}, \quad (6)$$

в отличие от (5). Графики для (5) и построенный численным методом для (6) при $\alpha = 0,5$ приведены на рис. 2. Переходный процесс длится не менее периода.

Рис. 2. Производные по (5) и (6) при порядке дифференцирования $\alpha = 0,5$

Аналогичная ситуация наблюдается при дифференцировании функции $y = e^x$, в результате которого хотелось бы ожидать инвариантности.

Желаемая инвариантность наблюдается асимптотически при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha(e^x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^\alpha} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{1-\alpha} (x-t)^{1-\alpha} e^t \Big|_0^x + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} e^t dt \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} e^t dt \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1}{x^\alpha} + \int_0^x \frac{e^t}{(x-t)^\alpha} dt \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1}{x^\alpha} + \int_0^x \frac{e^{x-u}}{u^\alpha} du \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1}{x^\alpha} + e^x \int_0^x u^{1-\alpha-1} e^{-u} du \right] \rightarrow e^x, \end{aligned} \quad (7)$$

при $x \rightarrow \infty$.

Сравнение результатов для случая $\alpha = 0,5$ представлено на рис. 3.

Рис. 3. График функции $y = ex$ и график её производной порядка $\alpha = 0,5$

Интересным является вопрос о применимости дифференцирования дробного порядка к фрактальным структурам.

Если рассмотреть процесс формирования фрактала по схеме Канторова множества из элементов единичной массы (рис. 4) и попытаться оценить его общую массу, то можно получить:

$$M = 2^k = e^{k \ln 2} = e^{\frac{\ln L}{\ln 3} \ln 2} = L^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} = L^{d_H},$$

где d_H – размерность Хаусдорфа – Безиковича [14].

Рис. 4. Канторово множество (предфрактал четвертого поколения)

Возможны два варианта дифференцирования. Формальное дифференцирование по линейному размеру L , посредством которого определяется плотность (линейная):

$$\rho = \frac{dM}{dL} = \frac{\ln 2}{\ln 3} L^{\frac{\ln 2}{\ln 3} - 1} \sim L^{d_H - d_T},$$

где d_T – топологическая размерность.

Такое же формальное дифференцирование применительно к представлению энтропии в пространстве дробной размерности [1] привело к результату, имеющему ясное физическое содержание.

Напротив, дифференцирование массы по фрактальной размерности d_H требует осмысления результата:

$$D_{0+}^{d_H}(M) = \Gamma(1 + d_H).$$

Аналогичное характерно, например, для ковра Серпинского и др.

Наконец, представляет интерес результат применения дифференцирования дробного порядка в теории вязкоупругости. Классический подход к решению задач подобного типа основан на том, что в пространстве образов Лапласа – Карсона постановка задачи вязкоупругости выглядит так же, как задача в упругой постановке (только с другими механическими характеристиками). Поэтому, взяв решение соответствующей упругой задачи, записав его в образах Лапласа – Карсона (при соответствующей замене констант механических характеристик) и применив обратное преобразование, получают решение вязкоупругой задачи [3; 9].

Применение аппарата дифференцирования дробного порядка позволяет расширить понимание постановки такого класса задач.

В механике сплошной среды имеется два (в известном смысле крайних) примера сплошной среды: это упругий материал со связью между деформацией ε и напряжением σ , определяемой законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ или } \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$

и – в случае вязкой жидкости – законом Ньютона:

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \text{ или } \varepsilon = \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\xi) d\xi,$$

где E – модуль упругости, η – коэффициент вязкости.

Обобщение записи этих задач состоит в применении операций дифференцирования D^β и интегрирования I^α дробного порядка:

$$\sigma = BD^\beta \varepsilon, \text{ или } \varepsilon = AI^\alpha \sigma, \quad (8)$$

где $B = E$, $\beta = 0$, $A = 1/E$, $\alpha = 0$ дают закон Гука, а $B = \eta$, $\beta = 1$, $A = 1/\eta$, $\alpha = 1$ – закон Ньютона.

Рис. 5. Смещение материала цилиндра под действием собственного веса

Вертикальное перемещение слоёв цилиндра из закреплённого по внешней поверхности упругого материала с модулем сдвига G и плотностью ρ определяется соотношением [2; 4]:

$$w(r) = \frac{\rho}{4G} (r_0^2 - r^2). \quad (9)$$

Решение соответствующей задачи в вязкоупругой постановке, в рамках которой связь между напряжением и деформацией даётся в форме [3; 9]:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \xi) d\sigma(\xi), \quad (10)$$

в которой ядро ползучести, например, $\Pi(t) = \Pi_0 e^{-qt}$, (где Π_0 и q экспериментально определяемые параметры), имеет вид (кривая 2 на рис. 5, 6) [2]:

$$w(r, t) = \frac{\rho}{4G} (r_0^2 - r^2) \left[1 - \frac{\Pi_0}{q} (1 - e^{-qt}) \right]. \quad (11)$$

После замены соответствующих констант и обратного преобразования получается решение задачи в вязкоупругой постановке [2].

Следует заметить, что если в соотношении (10) взять ядро Дурффинга [12]: $\Pi(t) = \Pi_0 t^\alpha$, то решение примет вид:

$$w(r, t) = \frac{\rho}{4G} (r_0^2 - r^2) t^\alpha. \quad (12)$$

Указанные подходы дают мощный метод решения задач теории вязкоупругости [3; 9]. Тем не менее они не дают представлений о возможности существования общей связи в цепочке задач «упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость».

Такую связь даёт применение аппарата дробных производных (1) и интегралов дробного порядка [12]:

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (13)$$

В рамках такого подхода соотношение (12) следует переписать в виде [2]:

$$w(r, t) = \frac{1}{C} \left\{ I^\alpha \left[\rho \frac{r_0^2 - r^2}{2} (t) \right] \right\} = \frac{\rho}{C \Gamma(1+\alpha)} \frac{r_0^2 - r^2}{2} \cdot t^\alpha. \quad (14)$$

Действительно, дифференцирование порядка $\alpha = 0$ даёт решение задачи упругости, дифференцирование порядка $\alpha \in (0, 1)$ даёт решение задачи теории вязкоупругости, но дифференцирование порядка $\alpha = 1$ приводит к выражению:

$$w(r, t) = \frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)} \frac{r_0^2 - r^2}{2} \cdot t, \quad (15)$$

первая производная по времени которого:

$$v(r) = \frac{dw(r, t)}{dt} = \frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)} \frac{r_0^2 - r^2}{2}, \quad (16)$$

при соответствующей замене констант даёт распределение скоростей при течении вязкой (коэффициент вязкости μ) жидкости по трубе при перепаде давления Δp на длине L [7; 13]:

$$v(r) = \frac{\rho p}{L} \frac{1}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \quad (17)$$

Для конкретного вязкоупругого материала параметры C и α соотношения (8) являются экспериментально определяемыми. Их можно определить по данным различных механических испытаний, например, из экспериментов на ползучесть, релаксацию [5]. Применительно к определению параметра α имеется ещё один подход. Он основан на анализе петли механического гистерезиса, имеющей место при циклическом нагружении с круговой частотой ω по закону:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t,$$

и поиске решения в виде (5) (в итоге и для (6) – пунктирная кривая на рис. 6):

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi) = \sigma_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \alpha\right), \quad (18)$$

в котором сдвиг фазы записан в виде $\varphi = \frac{\pi}{2} \alpha$, удобном для выделения дробного порядка дифференцирования α .

В этом случае петля механического гистерезиса имеет форму эллипса, главная ось которого наклонена под углом β (рис. 6), который связан со сдвигом фазы φ (с порядком дифференцирования α) соотношением [4]:

Рис. 6. Механический гистерезис вязкоупругого материала

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_0^2 - \sigma_0^2} \cos \varphi, \quad (19)$$

в размерных осях или определяется радиусом окружности $R = \sin \varphi$ – в безразмерных осях.

Таким образом, на основании изложенного, можно сделать вывод, что, с одной стороны, проявляется общность физических моделей сплошной среды «упругость – вязкоупругость – вязкая жидкость», с другой стороны, демонстрируется случай обоснованности применения аппарата дробных производных и интегралов дробного порядка к этим задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баланкин А.С., Бугримов А.Л. Фрактальная теория пластичности полимеров // Высокомолекулярные соединения. Серия А: Физика полимеров. Т. 34. 1992. № 5. С. 129–132.
2. Бугримов А.Л. Об одном подходе к построению физических соотношений обобщенного вида в механике деформируемого твёрдого тела // Каучук и резина. 1994. № 4. С. 28–32.
3. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
4. Колотилов А.В., Бугримов А.Л. Прочность и механическая надёжность зарядов твердого топлива и средств пиротехники. М.: Министерство обороны СССР, 1990. 135 с.
5. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
6. Корчагина А.Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред // Известия Алтайского государственного университета. Т. 1. 2014. № 1 (81). С. 65–67.
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика / учеб. под ред. И.А. Кибеля; 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
8. Мерзиевский Л.А., Корчагина А.Н. Моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Труды международной конференции «ХI Харитоновские тематические научные чтения», Саров, 16–20 марта 2009 г. Саров, 2009. С. 250–254.
9. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 328 с.
10. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. Т. 90. 1992. № 3. С. 354–368.
11. Риман Б. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Риман Б. Сочинения / пер с нем. под ред. В.Л. Гончарова, М.; Л.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1948. С. 262–275.
12. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. Т. 2. М.: Наука. 1976. 568 с.
14. Федер Е. Фракталы / пер. с англ. М.: Мир. 1991. 254 с.

REFERENCES

1. Balankin A.S., Bugrimov A.L. [The fractal theory of plasticity of polymers]. In: *Vysokomolekulyarnye soedineniya. Seriya A: Fizika polimerov* [High-molecular compounds. Series A: Physics of Polymers], vol. 34, 1992, no. 5, pp. 129–132.

2. Bugrimov A.L. [About one approach to the construction of the physical proportions of generalized form of the mechanics of deformable solids]. In: *Kauchuk i rezina* [Rubber and rubber], 1994, no. 4, pp. 28–32.
3. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termovязko-uprugosti* [Foundations of the mathematical theory of thermovisco-elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 280p.
4. Kolotilov A.V., Bugrimov A.L. *Prochnost' i mekhanicheskaya nadezhnost' zaryadov tverdogo topliva i sredstv piroavtomatiki* [Durability and mechanical reliability of the charge of solid fuel and means of pyroautomatics]. Moscow, Ministry of Defense of the USSR Publ., 1990. 135 p.
5. Koltunov M.A. *Polzuchest' i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow, Higher school Publ., 1976. 277 p.
6. Korchagina A.N. [The use of fractional order derivatives for solving problems of continuum mechanics]. In: *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of the Altai State University], vol. 1, 2014, no. 1 (81), pp. 65–67.
7. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical fluid mechanics] Moscow, Physico-mathematical state publishing house Publ., 1963. 728 p.
8. Merzhievskii L.A., Korchagina A.N. [Modeling of the propagation of a heat pulse in fractal environment]. In: *Ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udarnye volny. Trudy mezhdunarodnoi konferentsii «XI Kharitonovskie tematicheskie nauchnye chteniya», Sarov, 16–20 marta 2009 g* [Extreme States of Matter. Detonation. Shock Waves. Proceedings of the International Conference “XI Kharitonov thematic scientific readings”. Sarov, March 16–20, 2009]. Sarov, 2009. pp. 250–254.
9. Moskvitin V.V. *Soprotivleniye vязko-uprugikh materialov primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive* [Resistance of viscoelastic materials as applied to charges of solid-propellant rocket engines]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 328 p.
10. Nigmatullin R.R. [Fractional integral and its physical interpretation]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], vol. 90, 1992, no. 3, pp. 354–368.
11. Riemann B. [The experience of generalization of the action of integration and differentiation]. In: *Riemann B. Sochineniya* [Works]. Moscow, Leningrad, State Publishing House of Teoretiko-technical Literature Publ., 1948. pp. 262–275.
12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Science and Publ., 1987. 688 p.
13. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy: v 2 t. T. 2* [Mechanics of the continuous medium: in 2 vols.]. Vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1976. 568 p.
14. Feder J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бугримов Анатолий Львович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

Кузнецов Вячеслав Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: vskusn@mail.ru

Боброва Ирина Александровна – разработчик алгоритмов по математике Общества с ограниченной ответственностью «Ноледж Лаб»;
e-mail: ia.bobrova94@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly L. Bugrimov – Doctor in Technical Sciences, professor, head of the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow State Regional University;
e-mail: al.bugrimov@mgou.ru

Vyacheslav S. Kuznetsov – PhD in Physics and Mathematics, associate professor of the Department of Computational Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: vskusn@mail.ru

Irina A. Bobrova – Developer of algorithms for mathematics of the Limited Liability Company “Noledzh Lab”;
e-mail: ia.bobrova94@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Боброва И.А., Бугримов А.Л., Кузнецов В.С. О применимости дробных производных в физических моделях // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 3. С. 12–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-12-22

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Bobrova I.A., Bugrimov A.L., Kuznetsov V.S. Application of Fractional Derivatives in Physical Models. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 12–22.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-12-22