УДК 517.9, 519.6
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-23-33

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЧЕТЫРЁХМЕРНОЙ МОДЕЛИ МЕЖВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Масина О.Н., Сидоров А.В., Токарев А.М.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, д. 28, Российская Федерация

Аннотация. В работе проведён анализ устойчивости модели популяционной динамики взаимодействия четырёх конкурентов. Модель представляет собой автономную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. С помощью вычислительного пакета найдены состояния равновесия исследуемой системы. Получены условия устойчивости на основе первого метода Ляпунова. Результаты исследования могут быть использованы при решении задач устойчивости нелинейных моделей динамики популяций.

Ключевые слова: популяционная динамика, устойчивость, нелинейные дифференциальные уравнения, конкуренция, математическое моделирование.

ANALYSIS OF STABILITY OF A FOUR-DIMENSIONAL MODEL OF TRANS-SPECIES COMPETITION BY LYAPUNOV'S FIRST METHOD

O. Masina, A. Sidorov, A. Tokarev
I.A. Bunin Yelets State University
ul. Kommunarov 28, 399770 Yelets, Lipetsk region, Russian Federation

Abstract. We report the analysis of stability for the population dynamics model of four competitors. The model represents an autonomous system of ordinary nonlinear differential equations. The equilibrium states of the system under study are found by means of a computational package. The conditions of stability are obtained on the basis of Lyapunov's first method. The results of the study can be used for solving stability problems of nonlinear models of the population dynamics.

Key words: population dynamics, stability, nonlinear differential equations, competition, mathematical modeling.

Одной из актуальных задач при исследовании моделей популяционной динамики является анализ их устойчивости [1; 2; 4; 6], позволяющий оценить способность экологической системы противостоять неблагоприятным внешним факторам окружающей среды.

В настоящее время динамическая теория биологических популяций представляет собой самостоятельное научное направление. Для популяций характерны разнообразные процессы и взаимодействия, определяющие вид математической модели, такие как рождение и гибель организмов, хищничество, паразитизм, мутуализм, миграция, конкуренция и другие.

Модели, учитывающие конкуренцию видов, рассматривались во многих работах, например, [2; 5; 7–10; 12]. Детально исследованными являются двумерные модели [2; 5]. Показано, что в двумерных системах возможно существование устойчивых положений равновесия, при которых сосуществуют оба вида. Данный режим реализуется, если произведение интенсивностей внутривидовой регуляции превышает произведение интенсивностей межвидовой регуляции. В противном случае возможно существование только одного конкурента.

Возникновение конкуренции более двух видов в природе встречается достаточно редко, однако исследование многомерных математических моделей конкуренции по ряду причин представляет определенный интерес. В частности, анализ двумерных моделей демонстрирует возможность существования устойчивых положений равновесия в указанных системах.

Исследование моделей межвидовой конкуренции трёх и более видов проводилось в [7; 8; 10; 12]. В [12] путём изучения изоклин проанализировано поведение решений системы с тремя конкурентами. В [7; 8; 10] проводилось исследование многомерных систем Лотки–Вольтерра. В [7] показана возможность существования периодических решений в системах трёх конкурентов. В [9] получены условия устойчивости обобщенной модели Колмогорова.

При изучении моделей популяционной динамики представляет интерес исследование многомерных моделей конкуренции, в которых, помимо конкурентов, присутствуют виды, оказывающие положительное или нейтральное влияние на численность конкурирующих видов. В [2] рассмотрена модель, описывающая динамику системы «хищник–жертва–жертва» с учётом межвидовой конкуренции жертв. Для указанной модели установлено, что при некоторых значениях параметров присутствие хищника в сообществе может обеспечить сосуществование конкурирующих популяций жертв, невозможное в отсутствие хищника. Четырёхмерная модель «хищник–хищник–жертва–жертва» с учётом конкуренции жертв рассмотрена в [11]. Получены условия, при которых ни один из видов не находится на грани вымирания, приведена геометрическая интерпретация указанных условий, построены фазовые портреты.

В настоящей работе рассматривается популяционная модель четырёх конкурирующих видов, взаимодействующих согласно приведенной схеме рис. 1.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \longleftrightarrow & x_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ u_1 & & u_2 \end{array}$$

Рис. 1. Схема взаимодействия между популяциями в рассматриваемой модели

Здесь x_1, x_2, u_1, u_2 – плотности численностей видов. Согласно модели, вид x_1 конкурирует с особями x_2, u_1. Вид x_2 конкурирует с особями x_1, u_2, вид u_1 конкурирует только с особями x_1, а вид u_2 только с особями x_2. Популяции u_1 и u_2 нейтральны друг по отношению к другу. Стрелки означают конкуренцию между видами. Модель не учитывает неоднородность распределения популяций в пространстве и внутривидовую конкуренцию. Предполагается, что размножающие свойства каждого вида определяются только их численностями.

При построении математической модели будем исходить из обобщенной системы уравнений Лотки–Вольтерра, которая в двумерном случае выглядит следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\left(\alpha_{11} + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{13}x_2\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2\left(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22} + \alpha_{23}x_2\right). \end{aligned} \tag{1}$$

В системе уравнений (1) x_1, x_2, – численности взаимодействующих видов. В зависимости от соотношения между знаками параметров α_{11}, α_{12}, α_{13}, α_{21}, α_{22}, α_{23} модель (1) может описать:

– конкуренцию, если параметры при различных переменных имеют отрицательные знаки (α_{13}, $\alpha_{21} < 0$);

– взаимодействие типа «хищник–жертва», если параметры при различных переменных имеют противоположные знаки ($\alpha_{13} > 0$, $\alpha_{21} < 0$ или $\alpha_{13} < 0$, $\alpha_{21} > 0$);

– симбиоз, если параметры при различных переменных положительны (α_{13}, $\alpha_{21} > 0$);

– взаимодействие, при котором только один вид оказывает отрицательное влияние на другой, если один из коэффициентов при различных переменных равен нулю, а второй меньше нуля ($\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{21} < 0$ или $\alpha_{13} < 0$, $\alpha_{21} = 0$).

Модель (1) допускает естественное обобщение на случай многомерных систем путём добавления соответствующего количества переменных и параметров. Руководствуясь описанными выше принципами, запишем систему уравнений Лотки–Вольтерра для случая взаимодействия четырёх популяций x_1, x_2, u_1, u_2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\left(\alpha_{11} + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{13}x_2 + \alpha_{14}u_1 + \alpha_{15}u_2\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2\left(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22} + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{24}u_1 + \alpha_{25}u_2\right), \\ \dot{u}_1 &= u_1\left(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33} + \alpha_{34}u_1 + \alpha_{35}u_2\right), \\ \dot{u}_2 &= u_2\left(\alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}u_1 + \alpha_{44} + \alpha_{45}u_2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

В рассматриваемой модели (см. рис. 1) не учитывается внутривидовая конкуренция, поэтому коэффициенты $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = 0$. Виды u_1, u_2 конкурируют только с видами x_1, x_2, соответственно, не оказывая никакого влияния на остальные популяции, поэтому коэффициенты $\alpha_{15} = \alpha_{24} = \alpha_{32} = \alpha_{35} = \alpha_{41} = \alpha_{43} = 0$. Поскольку рассматривается модель конкуренции, коэффициенты α_{13}, α_{14}, α_{21}, α_{25}, α_{31}, $\alpha_{42} = 0$. Рассмотрим случай, когда интенсивность взаимодействия популяций u_2, x_2 одинакова ($\alpha_{25} = \alpha_{42}$) и введём обозначения $\alpha_{11} = -b$, $\alpha_{22} = -a$, $\alpha_{33} = -m$, $\alpha_{44} = -c$, $\alpha_{13} = \alpha_{31} = -1$, $\alpha_{14} = -\beta$, $\alpha_{21} = -\alpha$, $\alpha_{25} = \alpha_{42} = -\gamma$, где параметры b, β, a, α, γ, m, c – положительные постоянные. Тогда систему уравнений (2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_1 \cdot (b - x_2 - \beta u_1),\\
&\dot{x}_2 = x_2 \cdot (a - \alpha x_1 - \gamma u_2),\\
&\dot{u}_1 = u_1 \cdot (m - x_1),\\
&\dot{u}_2 = u_2 \cdot (c - \gamma x_2),
\end{aligned} \tag{3}$$

Анализ на выживаемость представленной модели сводится к исследованию устойчивости системы в положениях равновесия (особых точках). Положения равновесия, найденные с помощью математического пакета MathCAD, представлены ниже:

$$P_1(0,0,0,0),\ P_2\left(m, \frac{c}{\gamma}, \frac{b - c/\gamma}{\beta}, \frac{a - \gamma m}{\gamma}\right),\ P_3\left(m, 0, \frac{b}{\beta}, 0\right),$$

$$P_4\left(0, \frac{c}{\gamma}, 0, \frac{a}{\gamma}\right),\ P_5\left(\frac{a}{\gamma}, b, 0, 0\right). \tag{4}$$

Согласно [3], проведём линеаризацию нелинейной системы (3) в окрестности состояний равновесия. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} b - x_2 - \beta u_1 - \lambda & -x_1 & -\beta x_1 & 0 \\ -\alpha x_2 & a - \alpha x_1 - \gamma u_2 - \lambda & 0 & -\gamma x_2 \\ -u_1 & 0 & m - x_1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\gamma u_2 & 0 & c - \gamma x_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Исследуем устойчивость состояния равновесия P_1. Характеристическое уравнение в этом случае представляет собой алгебраическое уравнение четвёртой степени:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \tag{6}$$

где полиномиальные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1,\\
&a_1 = -a - b - c - m,\\
&a_2 = ab + fc + bc + am + bm + cm,\\
&a_3 = abc + abm + acm + bcm,\\
&a_4 = abcm.
\end{aligned} \tag{7}$$

Согласно критерию Гурвица [3], $\Delta_1 = a_1 < 0$ для любых a, b, c, $m > 0$, поэтому обязательно найдётся хотя бы один корень уравнения (6), который будет иметь положительную действительную часть, и в соответствии с методом первого приближения состояние равновесия P_1 является неустойчивым.

Рассмотрим поведение фазовых траекторий системы в окрестности критической точки P_1. Для значений параметров $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ все корни характеристического уравнения (3) будут действительными и положительными.

На (рис. 2) представлена трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) для состояния равновесия P_1.

Траектории построены на основе численного решения системы (1) методом Рунге–Кутта в пакете Mathcad. По виду траекторий можно заключить, что состояние равновесия является неустойчивым узлом. Аналогичный тип имеют фазовые траектории и в других трёхмерных проекциях.

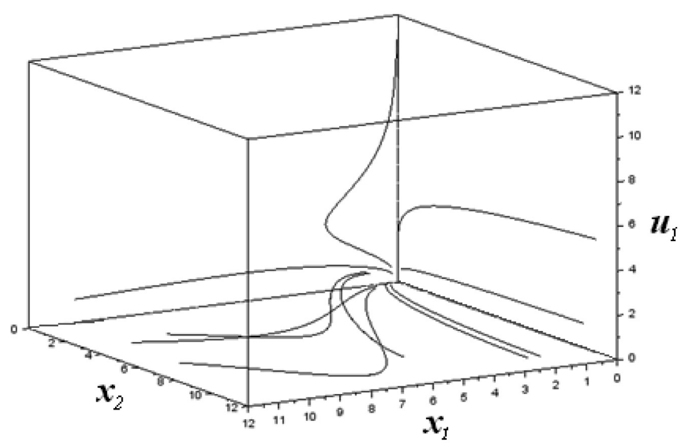

Рис. 2. Трёхмерная проекция фазового портрета системы (1), соответствующая состоянию равновесия P_1

Исследуем устойчивость положения равновесия $P_2\left(m, \frac{c}{\gamma}, \frac{b - c/\gamma}{\beta}, \frac{a - \gamma m}{\gamma}\right)$.

Коэффициенты характеристического уравнения (4), которое в данном случае является биквадратным уравнением, равны

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 0,$$
$$a_2 = \alpha cm - bm - ac + \frac{cm}{\gamma} - \frac{\alpha cm}{\gamma},$$
$$a_3 = 0,$$
$$a_4 = \frac{\alpha c^2 m^2}{\gamma} - \frac{ac^2 m}{\gamma} - \alpha bcm^2 + abcm. \tag{7}$$

По критерию Гурвица $\Delta_1 = a_1 = 0$, поэтому положение равновесия P_2 является неустойчивым.

Проанализируем характер решения в данной точке, построив проекции фазового портрета системы. Для значений параметров

$b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ все корни уравнения (6) действительны, $\lambda_{1,3} > 0$, $\lambda_{2,4} < 0$.

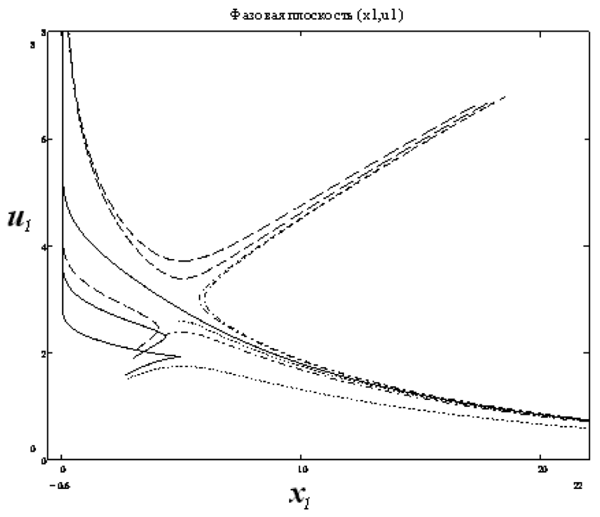

Рис. 3. Проекция фазового портрета, соответствующего состоянию равновесия P_2, на плоскость (x_1, u_1)

На рис. 3 представлена проекция фазового портрета системы в точке P_2 на плоскость (x_1, u_1). В соответствии с [1] такое состояние равновесия является седлом.

На рис. 4 приведена трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) в состоянии равновесия P_2. Можно выделить траектории, соответствующие как седлу, так и неустойчивому узлу.

Таким образом, построенные проекции фазового портрета в точке P_2 подтверждают выводы, полученные на основе качественного анализа поведения системы вблизи состояния равновесия P_2.

Рассмотрим положение равновесия $P_3\left(m, 0, \dfrac{b}{\beta}, 0\right)$. Коэффициенты характеристического уравнения (4) в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1,\\
&a_1 = \alpha m - c - a,\\
&a_2 = ac - bm - \alpha cm,\\
&a_3 = abm + bcm - \alpha bm^2,\\
&a_4 = \alpha bcm^2 - abcm.
\end{aligned} \tag{9}$$

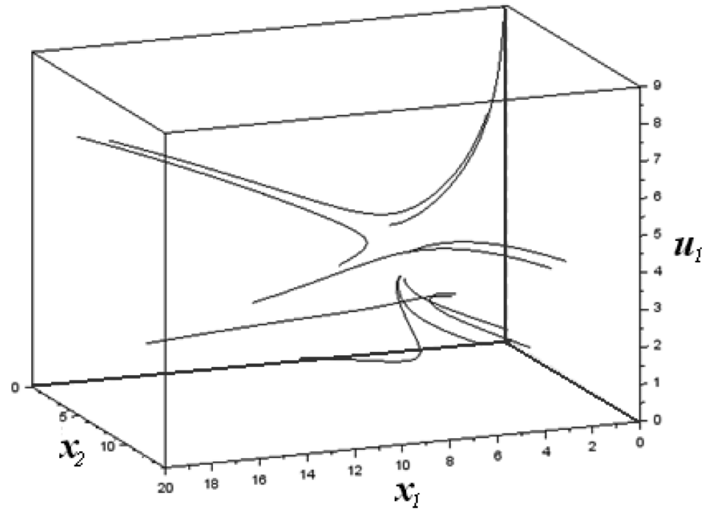

Рис. 4. Трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) системы (1), соответствующего состоянию равновесия P_2

Применение теоремы Гурвица в общем виде приводит к значительным трудностям, т. к. приходится решать систему 4-х нелинейных неравенств с шестью переменными. Поэтому ограничимся исследованием устойчивости системы (1) для значений коэффициентов $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$. Характеристическое уравнение в этом случае имеет три положительных и один отрицательный корень, что соответствует неустойчивому положению равновесия. На рис. 5 изображена трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) для этого случая. Фазовые траектории соответствуют неустойчивому седлу с узлом.

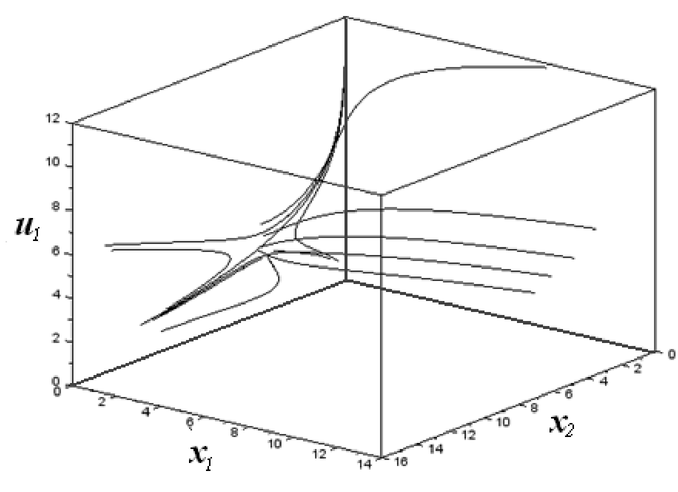

Рис. 5 Трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_1) системы (1), соответствующего состоянию равновесия P_3

В точке $P_4\left(0, \frac{c}{\gamma}, 0, \frac{a}{\gamma}\right)$ характеристическое уравнение для тех же значений коэффициентов системы (1) также имеет три положительных и один отрицательный корень. Поэтому характер решения соответствует положению равновесия P_2.

Исследуем состояние равновесия $P_5\left(\frac{a}{\gamma}, b, 0, 0\right)$. Для значений параметров $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ характеристическое уравнение имеет три отрицательных и один положительный корень, поэтому положение равновесия является неустойчивым.

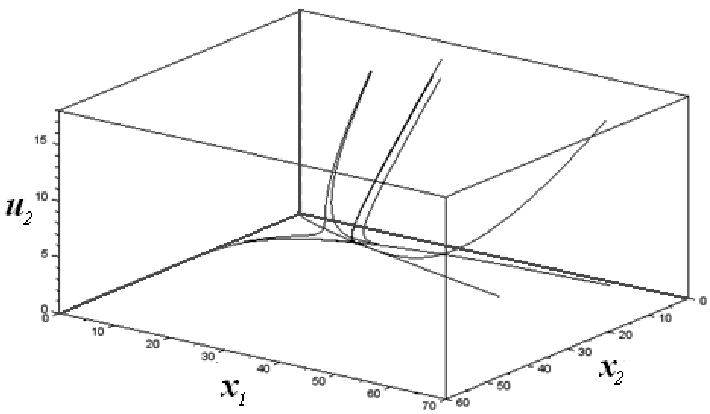

Рис. 6. Трёхмерная проекция фазового портрета (x_1, x_2, u_2) системы (1), соответствующего состоянию равновесия P_5

На рис. 6 приведена трёхмерная проекция (x_1, x_2, u_2) фазового портрета в окрестности точки P_5. В этом случае траектории, приближаясь к критической точке, далее удаляются от неё, что соответствует неустойчивому положению равновесия типа седло.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно заключить:

– в системе, описываемой дифференциальными уравнениями (3), нулевое положение равновесия всегда неустойчиво. Для случая $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$, все корни характеристического уравнения положительны, а сама критическая точка является неустойчивым узлом, численности выживших популяций неограниченно возрастают;

– положение равновесия, в котором начальные численности всех особей не равны нулю, также является всегда неустойчивым. Для значений коэффициентов $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$ системы (1) два корня характеристического уравнения положительны и два корня отрицательны. На двумерных и трёхмерных проекциях фазового портрета в окрестности положения равновесия можно выделить траектории типа седло и неустойчивый узел, соответствующие случаю выживания двух или одной популяций при неограниченном возрастании численностей выживших видов;

– показано, что критические точки $P_3\left(m, 0, \frac{b}{\beta}, 0\right)$; $P_4\left(0, \frac{c}{\gamma}, 0, \frac{a}{\gamma}\right)$; $P_5\left(\frac{a}{\gamma}, b, 0, 0\right)$ для значений коэффициентов $b = 15$, $\beta = \alpha = \gamma = m = c = 5$, $a = 35$, также являются неустойчивыми. Для более детальных выводов об устойчивости этих точек при произвольных значениях параметров системы (1) требуются дополнительные аналитические исследования.

Полученные результаты свидетельствуют, что в зависимости от соотношения между значениями начальных численностей, возможно существование одной или двух популяций. Причём способны выживать одновременно только нейтральные друг по отношению к другу виды, численности которых при этом неограниченно возрастают, что является следствием неустойчивости исследуемой модели (3). Данные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития методов построения и анализа устойчивости нелинейных моделей популяционной динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: Соло, 2006. 272 с.
2. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций: монография. Сер. Математическая биология, физика. Москва, Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 368 с.
3. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
4. Пых Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983. 182 с.
5. Разжевайкин В.Н. Модели динамики популяций. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2006. 88 с.
6. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
7. Arnedo A., Coullet P., Peyraud J., Tresser C. Strange attractors in Volterra equations for species in competition // J. Math. Biol. Vol. 14. 1982. No. 2. P. 153–157.
8. Coste J., Peyraud J, Coullet P. Asyptotic bahaviors in the dynamics of competing species // SIAM J. Vol. 36. Appl. Math. 1979. P. 516–543.
9. Fredman H.I., Waltman P. Persistence in a Model of Three Competitive Populations // Mathematical Biosciences. Vol. 73. 1985. P. 89–101.
10. Gilpin M.E. Limit cycles in competitive communities // Amer. Natur. Vol. 109. 1975. P. 51–60.
11. Kirlinger G. Permanence in Lotka–Volterra Equations: Linked Prey–Predator Systems // Mathematical Biosciences. Vol. 82. 1986. No. 2. P. 165–191.
12. Resigno A. The struggle for life: II. Three competitors // Bull. Math. Biophys. 1968. Vol. 30. P. 291–298.

REFERENCES

1. Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V., Starkov V.N., Stepenko N.A. *Matematicheskoe modelirovaniye i issledovanie ustoichivosti biologicheskikh soobshchestv* [Mathematical modeling and study of stability of biological communities]. St. Petersburg, Solo Publ., 2006. 272 p.
2. Bazykin A.D. *Nelineynaya dinamika vzaimodeistvuyushchikh populyatsii* [Nonlinear dynamics of interacting populations]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Research Publ., 2003. 368 p.
3. La Salle J., Lefschetz S. Stability by Lyapunov's direct method with Applications (New York: Academic Press, 1961).
4. Pykh Yu.A. *Ravnovesie i ustoichivost' v modelyakh populyatsionnoi dinamiki* [Equilibrium and stability in models of population dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 182 p.
5. Razzhevaikin V.N. *Modeli dinamiki populyatsii* [Model for the dynamics of populations]. Moscow, Computing center after named A.A. Dorodnicyn RAS, 2006. 88 p.
6. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv* [Stability of biological communities]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.
7. Arnedo A., Coullet P., Peyraud J., Tresser C. Strange attractors in Volterra equations for species in competition. In: *J. Math. Biol.*, vol. 14, 1982, no. 2, pp. 153–157.
8. Coste J. Peyraud J, and Coullet P. Asyptotic bahaviors in the dynamics of competing species. In: *SIAM J*, vol. 36, Appl. Math. 1979, pp. 516–543.
9. Fredman H.I., Waltman P. Persistence in a Model of Three Competitive Populations. In: *Mathematical Biosciences*, vol. 73, 1985, pp. 89–101.
10. Gilpin M.E. Limit cycles in competitive communities. In: *Amer. Natur.*, vol. 109, 1975, pp. 51–60
11. Kirlinger G. Permanence in Lotka–Volterra Equations: Linked Prey–Predator Systems. In: *Mathematical Biosciences*, vol. 82, 1986, no. 2, pp. 165–191.
12. Resigno A. The struggle for life: II. Three competitors. In: *Bull. Math. Biophys*, 1968, vol. 30, pp. 291–298.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: olga121@inbox.ru

Сидоров Александр Валентинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и её преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: dirnusir@mail.ru

Токарев Андрей Михайлович – аспирант кафедры математического моделирования и компьютерных технологий Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;
e-mail: dirnusir@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga N. Masina – Doctor in Physics and Mathematics, professor, head of the Department of Mathematical Modeling and Computer Technologies, I.A. Bunin Yelets State University;
e-mail: olga121@inbox.ru

Alexander V. Sidorov – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Physics and its Teaching, I.A. Bunin Yelets State University;
e-mail: dirnusir@mail.ru

Andrei M. Tokarev – postgraduate student at the Department of Mathematical Modeling and Computer Technologies, I.A. Bunin Yelets State University;
e-mail: dirnusir@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Масина О.Н., Сидоров А.В., Токарев А.М. Анализ устойчивости четырёхмерной модели межвидовой конкуренции с помощью первого метода Ляпунова // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 23–33.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-23-33

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Masina O.N, Sidorov A.V., Tokarev A.M. Analysis of Stability of a Four-Dimensional Model of the Trans-Species Competition by Lyapunov's First Method. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics,* 2017, no. 3, pp. 23–33.
DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-23-33