УДК 517.956.35

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-43-52

О ПРИБЛИЖЁННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Бозиев О.Л.*Кабардино-Балкарский государственный университет**360016, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173, Российская Федерация*

Аннотация. В статье предлагается метод решения смешанной задачи с однородными начальными условиями для нагруженного гиперболического уравнения, содержащего интеграл натуральной степени модуля неизвестной функции. Приближённое решение ищется с помощью априорных оценок решения поставленной задачи. Получена формула, выражающая это решение через решение обыкновенного дифференциального уравнения, ассоциированного с исходным нагруженным уравнением.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, нагруженные уравнения в частных производных, априорные оценки, приближенные решения.

ON THE APPROXIMATE-ANALYTIC METHOD OF SOLVING A NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATION WITH HOMOGENEOUS INITIAL CONDITIONS

O. Boziev*Kabardino-Balkarian State University**ul. Chernyshevskogo 173, 360016 Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russian Federation*

Abstract. The paper presents a method for solving a mixed problem with homogeneous initial conditions for a loaded hyperbolic equation with an integral natural degree modulus of unknown function. An approximate solution is sought for by means of a priori estimates of the solution to the problem. A formula expressing the solution through the solution to the ordinary differential equation associated with the initial loaded equation is obtained.

Key words: nonlinear partial differential equations, loaded partial differential equations, a priori estimates, approximate solutions.

Введение

Нелинейное уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b|u|^p u_t = 0, \quad (1)$$

с положительными параметрами a и b , натуральным p и начально-краевыми условиями различного вида в прямоугольной области является математической

моделью различных нестационарных процессов. В частности, при $p \geq 0$ неоднородное уравнение вида (1) возникает в релятивистской квантовой механике [6, с. 16]. При $p = 1$ уравнение (1) моделирует неустановившееся течение жидкости в трубе со скоростью $u(x, t)$ [4, с. 42]. Для нахождения приближенного решения (1) с соответствующими условиями, как правило, используются трудоёмкие численные методы. В данной статье предлагается приближенно-аналитический метод решения уравнения (1). Для его применения необходимо сначала от (1) перейти к нагруженному [7, с. 17] уравнению:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu_t \int_{\Omega} |u|^p dx = 0, \quad (2)$$

которое рассматривается в качестве аппроксимирующего относительно (1) при исходных начальных и граничных условиях. Уравнения вида (2) и его обобщения представляют самостоятельный интерес и исследованы, например, в [8; 9], где доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений соответствующих краевых задач. Переход от (1) к (2) позволяет «ослабить» нелинейность исходного уравнения и при этом избежать чрезмерного искажения сути моделируемого процесса. Найденное впоследствии точное или приближенное решение нагруженного уравнения (2) в дальнейшем можно принять за приближенное решение исходного нелинейного уравнения (1). Такой подход применён в [2; 3], где получены формулы общих членов последовательностей приближенных решений начально-краевых задач для некоторых нагруженных уравнений, аппроксимирующих исходные нелинейные уравнения. В [1] для нахождения приближенного решения первой смешанной задачи с однородными граничными условиями для уравнения (2) используются априорные оценки решения поставленной задачи. Ниже используется комбинация этих подходов, в которой для запуска итерационного процесса приближения к регулярному решению задачи (1), (3), (4) предварительно ищется решение задачи (2) – (4) с использованием его же априорных оценок.

Априорные оценки

В области $Q = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение (2) с натуральной степенью $p \geq 3$. Требуется найти интегрируемую функцию $u(x, t) \in C^{2,2}(\bar{Q})$, удовлетворяющую уравнению (2) в области Q , а также условиям

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), u(l, t) = \psi_2(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

с функциями $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1(0, T)$.

Установим некоторые априорные оценки решения задачи (2) – (4), необходимые для нахождения её приближенного решения.

Умножая (2) скалярно на u_t с помощью стандартных для подобных случаев преобразований, получаем следующие неравенства, выполняющиеся для всех значений $t \in [0, T]$:

$$\int_{\Omega} (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx \leq C_1, \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq C_1, \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{C_1}{a^2}. \quad (5)$$

Здесь и далее равенством

$$\|v\|_{p,\Omega}^p = \int_{\Omega} |v|^p dx$$

выражается норма функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $\Omega = [0, l]$.

Теорема. Пусть функция $u \in L_{p-2}(\Omega)$ является решением задачи (2) – (4), а убывающие функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t) \in L_{p-1}[0, T]$. Тогда функция $\|u\|_{p,\Omega}^p$ ограничена

константой, зависящей только от t .

Доказательство. Умножим уравнение (2) скалярно на функцию u^{p-1}

$$(u_{tt}, u^{p-1}) - a^2 (u_{xx}, u^{p-1}) + b \int_{\Omega} |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = 0. \quad (6)$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$(u_{tt}, u^{p-1}) = \frac{1}{p} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u^p dx - (p-1) \int_{\Omega} u_t^2 u^{p-2} dx,$$

$$(u_{xx}, u^{p-1}) = u_x(l, t) \psi_2^{p-1}(t) - u_x(0, t) \psi_1^{p-1}(t) - (p-1) \int_{\Omega} u_x^2 u^{p-2} dx,$$

$$\int_{\Omega} |u|^p dx (u_t, u^{p-1}) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx \cdot \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p dx.$$

Вернёмся к (6) и умножим его на $\operatorname{sgn}^p u$, чтобы перейти к уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 = p(p-1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx + F_1(t),$$

$$F_1(t) = pa^2 (u_x(l, t) \psi_2^{p-1}(t) - u_x(0, t) \psi_1^{p-1}(t)) \operatorname{sgn}^p u,$$

после интегрирования которого по t с учётом однородности начальных условий получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 = p(p-1) \int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt + \int_0^t F_1(t) dt. \quad (7)$$

К первому слагаемому в правой части (7) применим неравенство Гёльдера:

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_t^2 - a^2 u_x^2| dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сомножители правой части полученного неравенства ограничены: первый в силу $u \in L_{p-2}(\Omega)$:

$$\left(\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t |C_2|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{t} C_2,$$

а второй – в силу первой из оценок (5):

$$\left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_t^2 - a^2 u_x^2| dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_t^2 + a^2 u_x^2| dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t |C_1|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{t} C_1.$$

Следовательно,

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u|^{p-2} (u_t^2 - a^2 u_x^2) dx dt \leq C_1 C_2 t,$$

что позволяет перейти от уравнения (7) к неравенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 \leq p(p-1) C_1 C_2 t + \int_0^t |F_1(t)| dt. \quad (8)$$

Используя свойства функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, можно убедиться в том, что:

$$\begin{aligned} \int_0^t |F_1(t)| dt &\leq p a^2 \left(\int_0^t |u_x(l, t)| |\psi_2^{p-1}(t)| dt + \int_0^t |u_x(0, t)| |\psi_1^{p-1}(t)| dt \right) \leq \\ &\leq p a^2 \left(\int_0^T |\psi_2(t)|^{p-1} dt + \int_0^T |\psi_1(t)|^{p-1} dt \right) C_3, \end{aligned}$$

$$C_3 = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |u_x(l, t)|, \max_{t \in [0, T]} |u_x(0, t)| \right\}.$$

С учётом этого проинтегрируем (8) и получим соотношение:

$$\int_{\Omega} |u|^p dx + \frac{b}{2} \int_0^t \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^2 dt \leq \int_{\Omega} |u(x, 0)|^p dx + F(t), \quad (9)$$

в котором первое слагаемое правой части равно нулю в силу первого условия (3), а

$$F(t) = \frac{1}{2} p(p-1) C_1 C_2 t^2 + p a^2 \left(\int_0^T |\psi_2(t)|^{p-1} dt + \int_0^T |\psi_1(t)|^{p-1} dt \right) C_3 t. \quad (10)$$

Заметим, что $F(t) \leq F(T)$, в силу чего перейдем от (9) к неравенству:

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leq \frac{b}{2} \int_0^t \left(\|u\|_{p,\Omega}^p \right)^2 dt + F(T).$$

Применяя к нему следствие из леммы Бихари [5, с. 112], получаем оценку:

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leq K(t), \quad (11)$$

с правой частью:

$$K(t) = \frac{2F(T)}{2 - F(T)bt}, \quad (12)$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$, $T < 2/(bF(T))$.

Таким образом, теорема доказана.

Начальное приближённое решение

Для нахождения начального приближённого решения задачи (2) – (4) перейдём от (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого проинтегрируем (2) в границах от 0 до x :

$$u_x(x, t) = \frac{1}{a^2} \int_0^x \left(u_{tt} + bu_t \|u\|_{p,\Omega}^p \right) dx + A(t).$$

Применяя к интегралу теорему о среднем значении, запишем последнее равенство в виде:

$$u_x(x, t) = \frac{x}{la^2} \int_0^l \left(u_{tt} + bu_t \|u\|_{p,\Omega}^p \right) dx + A(t).$$

После повторного интегрирования по x и удовлетворения условий (3) приходим к соотношению:

$$u(x, t) = \frac{x}{2a^2} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \left(\bar{u}'' + b\bar{u}' \|u\|_{p,\Omega}^p \right) + x \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{l} + \Psi_1, \quad (13)$$

в котором

$$\bar{u}(t) = \int_{\Omega} u dx. \quad (14)$$

Применим преобразование (14) к функции (13) для того, чтобы перейти к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\bar{u}'' + b \|u\|_{p,\Omega}^p \bar{u}' + \frac{12a^2}{l^2} \bar{u} = \frac{6a^2}{l} (\Psi_1 + \Psi_2). \quad (15)$$

Начальные условия, необходимые для его интегрирования, получаются из условий (3):

$$\bar{u}(0) = \int_{\Omega} u(x, 0) dx = 0, \bar{u}'(0) = \int_{\Omega} u_t(x, 0) dx = 0. \quad (16)$$

Для решения полученной задачи выберем в (11) верхнюю границу неравенства, что позволяет сделать замену:

$$\|u\|_{p, \Omega}^p = K(t), \quad (17)$$

приводящую от (15) к линейному уравнению:

$$\bar{u}'' + bK(t)\bar{u}' + \frac{12a^2}{l^2}\bar{u} = F_2(t), \quad (18)$$

$$F_2(t) = \frac{6a^2}{l}(\psi_1 + \psi_2).$$

Как известно, единственное решение задачи (18), (16) существует для непрерывных функций $K(t)$ и $F_2(t)$ при $t \in (0, T)$. После его подстановки вместе с (17) в формулу (13) будет найдена функция:

$$u(x, t) = \frac{3x}{l} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \left(\psi_1 + \psi_2 - \frac{2}{l} \bar{u} \right) + x \frac{\psi_2 - \psi_1}{l} + \psi_1, \quad (19)$$

которую примем за приближенное решение как задачи (2) – (4) и начальное приближение аппроксимируемой ею задачи (1), (3), (4).

Итерационный процесс

Функцию (19) примем за нулевое приближение $u^{(0)}$ в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (3), (4), состоящем в нахождении «улучшенных» приближенных решений путём последовательного решения задач вида:

$$u_{tt}^{(k)} - a^2 u_{xx}^{(k)} + b |u^{(k-1)}|^p u_t^{(k)} = 0, \quad (1')$$

$$u^{(k)}(x, 0) = 0, u_t^{(k)}(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, \quad (3')$$

$$u^{(k)}(0, t) = \psi_1(t), u^{(k)}(l, t) = \psi_2(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4')$$

где $k = 1, 2, \dots$ – итерационный индекс. Процесс завершится при выполнении условия:

$$|u^{(k)}(x, t) - u^{(k-1)}(x, t)| \leq \varepsilon$$

с достаточно малым наперёд заданным числом ε или по достижении заданного количества итераций.

Таким образом, задача решения нелинейного уравнения (1) сводится к последовательному решению линейных уравнений (1') при соответствующих условиях.

Пример

Абстрагируясь от смысла уравнения (1), примем в нём для упрощения выкладок $a = b = 1$. Будем искать решение задачи (2) – (4), рассматривая уравнение (2) в качестве аппроксимирующего для (1).

Пусть $p = 3$. Положим $l = 1$ и выберем граничные условия (4) в виде $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 1$, тогда в (18) правая часть $F_2(t) = 12$, а величина $F(T)$, задаваемая формулой (10), определяется как:

$$F(T) = CT^2, C = 3(C_1C_2 + 2C_3).$$

При этом функция (19) запишется как:

$$u(x, t) = 6x(x-1)(1-\bar{u}) + 1. \quad (21)$$

Перейдем к определению постоянных, входящих в эти выражения. Из (12) следует условие положительности функции $K(t)$, а именно $F(T)t < 2$, т. е. $t < 2/CT^2$. Так как $t \leq T$, то должно быть $T < 2/CT^2$, откуда следует, что $C < 2/T^3$. Положим $T = 1$ и выберем, например, $C = 1,8$. Затем последовательно найдем $F(T) = 1,8$, $K(t) = 1,8/(1 - 0,9t)$. Непрерывность $K(t)$ нарушается лишь при $t = 10/9 < T = 1$. Теперь задача (18), (16) принимает вид:

$$\bar{u}'' + \frac{1,8}{1-0,9t} \bar{u}' + 12\bar{u} = 12,$$

$$\bar{u}(0) = 0, \bar{u}'(0) = 0.$$

Её решением является функция:

$$\bar{u}(t) = \left(\frac{9}{10}t - 1 \right) \cos(2\sqrt{3}t) - \frac{3\sqrt{3}}{20} \sin(2\sqrt{3}t) + 1,$$

подстановка которой в (21) даёт приближенное решение задачи (2) – (4):

$$u(x, t) = 6x(x-1) \left(\frac{3\sqrt{3}}{20} \sin(2\sqrt{3}t) - \left(\frac{9}{10}t - 1 \right) \cos(2\sqrt{3}t) \right) + 1. \quad (21)$$

Так как уравнение (2) является аппроксимирующим по отношению к уравнению (1) и его интегрирование проводится при тех же условиях (3), (4), что и для уравнения (1), то функцию (21) будем считать начальным приближением решения задачи (1), (3), (4). Чтобы найти «улучшенные» решения, функцию (21), принимаемую за $u^{(0)}$, необходимо подставить в (1') для запуска соответствующего итерационного процесса.

На рис. 1–3 приведены графики функций $u(x, t)$ и $u^{(1)}(x, t)$ при $t = 0,5, 1,0$ и $1,8$ соответственно, полученные путём численного решения задачи (1), (3), (4) и задачи (1'), (3'), (4') с функцией $u^{(0)}$, определяемой по формуле (21). Сплошная линия соответствует функции $u(x, t)$, а пунктирная – $u^{(1)}(x, t)$.

Рис. 1. $t = 0,5$ Рис. 2. $t = 1,0$ Рис. 3. $t = 1,8$

Результаты вычислений показывают, что при $t \leq 0,3$ значения этих функций практически совпадают, а их графики не различимы. Увеличение t приводит к росту относительной погрешности вычислений, не превышающей 13,25%. Ожидается, что к её уменьшению приведёт продолжение итерационного процесса.

Заключение

В работе предложен приближенно-аналитический метод нахождения решения задачи (1), (3), (4), состоящий, во-первых, в переходе от исходного нагруженного уравнения (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению (15), а во-вторых, в линеаризации (15) с помощью априорной оценки решения исходной задачи вида (11). Полученное начальное приближенное решение выражается аналитически функцией (21). Данная функция используется для запуска итерационного процесса (1'), (3'), (4'), предназначенного для последовательного приближения к решению задачи (1), (3), (4).

Данный метод применим к нагруженным дифференциальным уравнениям в частных производных, содержащим интеграл по пространственной переменной от p -й степени неизвестной функции при некоторых допущениях относительно p . Основную сложность в реализации метода представляют процедуры установления априорной оценки (11) и подбора констант, входящих в это и другие необходимые неравенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // Вестник Южноуральского государственного университета. Серия: Математика, механика, физика. Т. 8. 2016. № 2. С. 14–18.
2. Бозиев О.Л. Применение нагруженных уравнений к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 127–136.
3. Бозиев О.Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2014. № 4(60). С. 7–12.

4. Вишневский К.П. Переходные процессы в напорных системах водоподачи. М: Агропромиздат, 1986. 132 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / пер. с фр.; 3-е изд. М: Едиториал УРСС, 2010. 586 с.
7. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М: Наука, 2012. 232 с.
8. Lourkdo A.T., Siracusa G., Silva Filho C.A. On a Nonlinear Degenerate Evolution Equation with Nonlinear Boundary Damping [Electronic Source] // Journal of Applied Mathematics 2015. URL: <https://projecteuclid.org/euclid.jam/1429105047> (request date: 08.10.2017).
9. Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential equations // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1981. Vol. 53. No. 1. P. 13–15.

REFERENCES

1. Boziev O.L. [An approximate solution of the loaded hyperbolic equations with homogeneous boundary conditions]. In: *Vestnik Yuzhnoural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, fizika* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics], vol. 8, 2016, no. 2, pp. 14–18.
2. Boziev O.L. [The use of loaded equations to approximate the solution of differential equations with power nonlinearity]. In: *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Prikladnaya matematika* [Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 127–136.
3. Boziev O.L. [The solution to the initial-boundary value problem for nonlinear hyperbolic equation with double reduction to the loaded equations]. In: *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of the Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences], 2014, no. 4(60), pp. 7–12.
4. Vishnevskii K.P. *Perekhodnye protsessy v napornykh sistemakh vodopodachi* [Transient processes in pressure systems of water supply]. Moscow, Agrarian and industrial publishing house Publ., 1986. 132 p.
5. Demidovich B.P. *Leksii po matematicheskoi teorii ustoychivosti* [Lectures on mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 472 p.
6. Lions J.-L. *Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles* (Montreal: Presses de l'Université de Montreal, 1962).
7. Nakhushhev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded equations and their applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012. 232 p.
8. Lourkdo A.T., Siracusa G., Silva Filho C.A. On a Nonlinear Degenerate Evolution Equation with Nonlinear Boundary Damping. In: *Journal of Applied Mathematics*. 2015. Available at: <https://projecteuclid.org/euclid.jam/1429105047> (accessed: 08.10.2017).
9. Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential. In: *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, 1981, vol. 53, no. 1, pp. 13–15.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и технологий программирования Института информатики, электроники и компьютерных технологий Кабардино-Балкарского государственного университета;
e-mail: boziev@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg L. Boziev – PhD in Physics and Mathematics, associate professor at the Department of Informatics and Programming Technology, Institute of Informatics, Electronics and Computer Technologies, Kabardino-Balkarian State University;
e-mail: boziev@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бозиев О.Л. О приближённо-аналитическом методе решения нелинейного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 43–52.

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-43-52

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Boziev O.L. On the Approximate-Analytic Method of Solving a Nonlinear Hyperbolic Equation with Homogeneous Initial Conditions. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 43–52.

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-43-52