УДК 533.72

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-68-75

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПОЛНОГО ИСПАРЕНИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ КАПЕЛЬ С УЧЁТОМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСПАРЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Кузьмин М.К.¹, Хасанов А.С.²

¹ *Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10А, Российская Федерация*

² *Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
117997, г. Москва, Стремянный пер., д. 36, Российская Федерация*

Аннотация. Авторами статьи получена приближённая формула для времени полного испарения аэрозольных капель воды в воздушную среду в виде функции от их начальных радиусов. Для мелких и крупных капель формула выведена на основе модели нестационарного процесса испарения, учитывающей коэффициент испарения, коэффициент поверхностного натяжения и теплоту фазового перехода вещества капли. Формула для капель с промежуточными размерами выведена на основе формул для крупных и мелких капель с использованием непрерывности, гладкости и монотонности времени полного испарения капель как функции от их начальных радиусов. Приведены соответствующие графики.

Ключевые слова: аэрозольные капли, время полного испарения, нестационарный процесс испарения.

FORMULA FOR CALCULATING THE COMPLETE EVAPORATION TIME OF AEROSOL DROPS WITH ALLOWANCE FOR THE EVAPORATION AND SURFACE TENSION COEFFICIENTS

M. Kuzmin¹, A. Khasanov²

¹ *Moscow Region State University
ul Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation*

² *Plekhanov Russian University of Economics
Stremyannyi pereulok 36, 117997 Moscow, Russian Federation*

Abstract. An approximate formula for the time of complete evaporation of aerosol water drops into the atmosphere is obtained as a function of their initial radii. For small and large drops the formula is derived on the basis of the model of the unsteady evaporation process, taking into account the evaporation coefficient, the coefficient of surface tension and the specific heat of the phase transition. The formula for drops of intermediate size is obtained on the basis of the formulas for large and small drops with the use of continuity, smoothness and monotonicity

of the complete evaporation time of drops as a function of their initial radii. The corresponding graphs are presented.

Key words: aerosol drops, complete evaporation time, unsteady evaporation process.

Введение

Процесс испарения аэрозольной капли в атмосфере зависит от многих факторов. Этот процесс, в том числе и задача о времени существования (полного испарения) капель, рассматривался в ряде работ. Применялись как математические модели этого процесса [4; 6], так и экспериментальные [5] и численные [3] методы. В работе [7] рассмотрена модель нестационарного процесса испарения аэрозольной капли, взвешенной в однокомпонентном газе, с учётом теплоты фазового перехода вещества капли, коэффициента испарения, коэффициента поверхностного натяжения и получена формула для скорости изменения $\frac{dR}{dt}$

радиуса капли $R = R(t)$, который в нестационарном процессе зависит от времени t . Заметим, что воздух приближенно можно рассматривать как однокомпонентный газ, так как он преимущественно состоит из азота. Целью данной работы является дальнейшее развитие результатов работы [7]. Перед записью формулы для величины $\frac{dR}{dt}$, полученной в этой работе, введём обозначения.

Пусть ρ_i и m_1 – плотность и масса молекул вещества капли, n_1 и n_2 – численная концентрация молекул первого компонента (пара) и второго компонента (газа) внешней парогазовой смеси, $n = n_1 + n_2$, κ и ρ_e – коэффициент теплопроводности и плотность парогазовой смеси. Величина D определяется по формуле $D = nm_1 D_{12} / \rho_e$, где D_{12} – коэффициент взаимной диффузии компонентов парогазовой смеси.

Поле температуры T в парогазовой смеси в сферической системе координат с началом в центре неподвижной капли является функцией двух переменных r и t : $T = T(r, t)$, причём $\lim_{t \rightarrow 0} T(r, t) = \lim_{r \rightarrow +\infty} T(r, t) = T_0$, где T_0 – постоянная. Это верно и

для поля концентрации $c_1 = n_1/n$ первого компонента (пара) парогазовой смеси:

$$c_1 = c_1(r, t), \lim_{t \rightarrow 0} c_1(r, t) = \lim_{r \rightarrow +\infty} c_1(r, t) = c_{10},$$

где c_{10} – постоянная.

Пусть k – постоянная Больцмана, $v = [kT_0 / (2\pi m_1)]^{1/2}$ – одна четвертая средней абсолютной тепловой скорости молекул пара, α – коэффициент испарения, σ – коэффициент поверхностного натяжения, q – удельная теплота фазового перехода вещества капли, $\bar{c}_{1s0}$ – концентрация насыщенных паров вещества капли у поверхности с малой кривизной при температуре T_0 , $k_\sigma = 2m_1\sigma / (kT_0\rho_i)$. Концентрация насыщенных паров вещества капли у её поверхности при

температуре T_0 определяется по формуле $c_{1s0} = \bar{c}_{1s0} (1 + k_\sigma / R)$. Определим ещё четыре величины: $\varepsilon = \alpha v (c_{10} - c_{1s0})$, $k_q = (qm_1 - kT_0) / (kT_0^2)$, $\gamma = Dm_1 n q$, $\kappa_{q\sigma} = c_{1s0} k_q \gamma$.

Тогда формулу для величины $\frac{dR}{dt}$ из работы [7] можно записать в виде:

$$\frac{dR}{dt} = (\varepsilon n m_1 / \rho_i) F(t, R), \quad (1)$$

где $F(t, R)$ – функция, удовлетворяющая двум условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t, R) = 1, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, R) = D\kappa / [D\kappa + \alpha v (\kappa + \kappa_{q\sigma}) R]. \quad (3)$$

Точное выражение для функции $F(t, R)$ нам не понадобится, так как целью данной работы является получение, основанное на уравнении (1) и условиях (2) и (3), приближенной формулы для зависимости времени полного испарения τ аэрозольной капли воды в воздушную среду от её начального радиуса R_0 , т. е. функции $\tau = \tau(R_0)$.

Формула для времени полного испарения малых капель

Оценки показывают, что при $R_0 \leq R_1$, где $R_1 = 10^{-7}$, для получения приближенной формулы $\tau = \tau(R_0)$ функцию $F(t, R)$ в дифференциальном уравнении (1) можно заменить на её предельное выражение $\lim_{t \rightarrow 0} F(t, R) = 1$ из формулы (2)

(время полного испарения таких капель является достаточно малой величиной).

В результате получим дифференциальное уравнение $\frac{dR}{dt} = \varepsilon n m_1 / \rho_i$ с начальным

условием $R(0) = R_0$. Так как $\varepsilon = \alpha v (c_{10} - c_{1s0})$, а $c_{1s0} = \bar{c}_{1s0} (1 + k_\sigma / R)$, то это дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. После разделения переменных, интегрирования обеих частей уравнения от 0 до τ и учёта условий $R(0) = R_0$, $R(\tau) = 0$, получим формулу:

$$\tau = \varphi_1(x) = U [x - \ln(1 + lx) / l], \quad (4)$$

где $U = \rho_i R_1 / [\alpha v n m_1 (\bar{c}_{1s0} - c_{10})]$, $x = R_0 / R_1$, $l = b R_1 / k_\sigma$, $b = 1 - c_{10} / \bar{c}_{1s0}$. В формуле (4) x принадлежит отрезку $0 \leq x \leq 1$, так как $R_0 \leq R_1$.

Формула для времени полного испарения крупных капель

Время полного испарения крупной капли является величиной на порядок большей по сравнению со временем испарения малых капель. Поэтому для вывода приближенной формулы для капель, радиусы которых на порядок больше радиуса $R_1 = 10^{-7}$ м, т. е. в случае $R_0 \geq R_2$, где $R_2 = 10 R_1 = 10^{-6}$, функ-

цию $F(t, R)$ в дифференциальном уравнении (1) заменим на её предельное выражение $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, R) = D\kappa / [D\kappa + \alpha v (\kappa + \kappa_{q\sigma}) R]$ из формулы (3). Так как $\kappa_{q\sigma} = c_{1s0} k_q \gamma = \bar{c}_{1s0} (1 + k_\sigma / R) k_q \gamma$, то в результате также получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных интегрируем обе части уравнения также от 0 до τ , считая, что вклад той части процесса испарения, когда радиус капли становится малым, в рассматриваемом случае не является существенным. Из условий $R(0) = R_0$, $R(\tau) = 0$ получим формулу:

$$\tau = \frac{U\alpha v}{R_1 D\kappa} \left[\frac{\bar{\kappa}_0 R_0^2}{2} + \left(\frac{D\kappa}{\alpha v} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b} \right) \left(R_0 + \frac{k_\sigma}{b} \ln \left(\frac{k_\sigma}{b R_0 + k_\sigma} \right) \right) \right], \quad (5)$$

где $\bar{\kappa}_0 = \kappa + k_q \gamma \bar{c}_{1s0}$, $\kappa_0 = \kappa + k_q \gamma c_{10}$.

При $R_0 \geq R_2$ оценки показывают, что в правой части формулы (5) от множителя $\frac{D\kappa}{\alpha v} - \frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}$ можно оставить только величину $\frac{D\kappa}{\alpha v}$, так как вклад величины $\frac{\kappa_0 k_\sigma}{b}$ мал, а от множителя $R_0 + \frac{k_\sigma}{b} \ln \left(\frac{k_\sigma}{b R_0 + k_\sigma} \right)$ для приближенных вычислений можно оставить только первое слагаемое R_0 . В результате вместо формулы (5) получим более простую формулу:

$$\tau = \frac{U\alpha v}{R_1 D\kappa} \left(\frac{\bar{\kappa}_0 R_0^2}{2} + \frac{D\kappa}{\alpha v} R_0 \right). \quad (6)$$

Перейдя в формуле (6) к переменной $x = R_0 / R_1$, получим формулу:

$$\tau = \varphi_2(x) = U(x + 0,5ux^2), \quad (7)$$

где $u = \bar{\kappa}_0 \alpha v R_1 / (D\kappa)$. В формуле (7) безразмерный радиус x принадлежит промежутку $10 \leq x < +\infty$, так как $R_0 \geq R_2$.

Формула для времени полного испарения капель с промежуточными радиусами

Перейдём к выводу формулы для времени полного испарения τ в случае, когда радиус капли принадлежит промежутку $R_1 \leq R_0 \leq R_2$, т. е. $1 \leq x \leq 10$. Формулу для зависимости времени полного испарения аэрозольной капли τ от её начального радиуса R_0 будем искать в классе гладких возрастающих функций. Если перейти к безразмерному радиусу $x = R_0 / R_1$, то функция $\tau = \varphi_1(x)$ на промежутке $0 \leq x \leq 1$ и функция $\tau = \varphi_2(x)$ на промежутке $10 \leq x < +\infty$ являются гладкими возрастающими функциями. Построим гладкую возрастающую функцию $\tau = \varphi_3(x)$, определённую на промежутке $1 \leq x \leq 10$. Эту функцию построим на основе найденных формул (4) и (7). Зависимость $\tau = \varphi_3(x)$ на отрезке $1 \leq x \leq 10$ будем искать в виде:

$$\tau = \varphi_3(x) = U \left[d_0 (x-1)^3 + d_1 (x-1)^2 + d_2 (x-1) + d_3 \right], \quad (8)$$

где d_0, d_1, d_2, d_3 – неизвестные коэффициенты, которые определяются из двух условий непрерывности $\varphi_3(1) = \varphi_1(1)$, $\varphi_3(10) = \varphi_2(10)$ и двух условий гладкости $\dot{\varphi}_3(1) = \dot{\varphi}_1(1)$, $\dot{\varphi}_3(10) = \dot{\varphi}_2(10)$ искомой зависимости τ от x на всем промежутке $0 \leq x < +\infty$. Легко получить следующие формулы для неизвестных коэффициентов:

$$d_0 = \frac{1}{729} \left[-10u - \frac{9}{1+l} - \frac{2}{l} \ln(1+l) \right], \quad (9)$$

$$d_1 = \frac{1}{27} \left[20u + \frac{6}{1+l} + \frac{1}{l} \ln(1+l) \right], \quad (10)$$

$$d_2 = \frac{l}{1+l}, \quad (11)$$

$$d_3 = 1 - \frac{1}{l} \ln(1+l). \quad (12)$$

Функция $\tau = \tau(x)$, определенная на промежутке $0 \leq x \leq +\infty$, должна быть не только непрерывной и гладкой, но и возрастающей. Функция $\tau = \varphi_3(x)$ возрастает на промежутке $1 \leq x \leq 10$. Действительно, найдём производную функции $\tau = \varphi_3(x)$:

$$\tau' = \dot{\varphi}_3(x) = U[3d_0(x-1)^2 + 2d_1(x-1) + d_2]. \quad (13)$$

Правая часть формулы (13) является квадратным трехчленом. Легко доказать его положительность на промежутке $1 \leq x \leq 10$. Следовательно, функция $\tau = \varphi_3(x)$ возрастает на этом промежутке.

Заключение

Построенная нами приближенная зависимость времени полного испарения τ аэрозольной капли в воздушную среду от безразмерного начального радиуса капли $x = R_0/R_1$ имеет вид:

$$\tau = \begin{cases} U[x - \ln(1+lx)/l], & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ U[d_0(x-1)^3 + d_1(x-1)^2 + d_2(x-1) + d_3], & \text{если } 1 < x < 10, \\ U(x + 0,5ux^2), & \text{если } 10 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (14)$$

Так как коэффициенты d_0, d_1, d_2, d_3 зависят только от величин l и u , то для вычислений по формуле (14) достаточно знать три параметра: $U = \rho_i R_1 / [\alpha v n m_1 (\bar{c}_{1s0} - c_{10})]$, $l = b R_1 / k_{\sigma}$, $u = \bar{\kappa}_0 \alpha v R_1 / (D \kappa)$. Рассмотрим про-

цесс нестационарного испарения одиночных капель воды в воздушную среду 50% влажности при двух значениях температуры $T = 293$ К и $T = 323$ К, когда давление среды $P = 0,1$ МПа. При этом, основываясь на данных, приведённых в работе [1] для коэффициента испарения воды, полагаем, что $\alpha = 0,034$ при $T = 293$ К и $\alpha = 0,026$ при $T = 323$ К. Для других величин используем значения, приведённые в работе [2]. При $T = 293$ К легко найти значения перечисленных выше трёх параметров: $U = 2,3212 \cdot 10^{-3}$, $l = 4,6266 \cdot 10^1$, $u = 6,8112 \cdot 10^{-2}$. При $T = 323$ К получим следующие значения: $U = 5,9500 \cdot 10^{-4}$, $l = 5,0499 \cdot 10^1$, $u = 1,4223 \cdot 10^{-1}$. На основе формулы (14) можно построить графики зависимости τ от x при $T = 293$ К и $T = 323$ К (рис. 1).

Рис. 1. График зависимости времени полного испарения τ капли воды в воздушную среду от безразмерного начального радиуса капли $x = R_0 / (10^{-7} \text{ м})$, где R_0 – начальный радиус капли

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара. Изд. 3-е, доп. и перераб. М.: Химия. 1972. 304 с.
2. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Наука. 1972. 720 с.
3. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Испарение капель воды в высокотемпературной газовой среде // Инженерно-физический журнал. Т. 89 2016. № 1. С. 133–142.
4. Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Прогностическое определение интегральных характеристик испарения капель воды в газовых средах с различной температурой // Инженерно-физический журнал. Т. 90. 2017. № 3. С. 648–657.
5. Захаревич А.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Экспериментальное исследование изменения температуры в центре капли воды в процессе её испарения в разогретом воздухе // Инженерно-физический журнал. Т. 89. 2016. № 3. С. 537–541.
6. Кочурова Н.Н., Коротких О.П., Абдуллин Н.Г., Айрапетова Е.Р., Караев Р.Р., Petzold G. Влияние поверхностных явлений на испарение и конденсацию водных систем // Инженерно-физический журнал. Т. 89, 2016, № 1. С. 104–108.

7. Кузьмин М.К. Теория нестационарного процесса испарения сферической аэрозольной капли с учётом зависимости давления насыщенного пара от кривизны её поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2012. № 3. С. 39–49.

REFERENCES

1. Amelin A.G. *Teoreticheskiye osnovy obrazovaniya tumana pri kondensatsii para* [The theoretical basis for the formation of fog in the condensation of vapor]. Moscow, Chemistry Publ., 1972. 304 p.
2. Vargaftik N.B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoistvam gazov i zhidkostei* [Handbook on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 720 p.
3. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Evaporation of water droplets in high temperature gas environment]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], vol. 89, 2016, no. 1, pp. 133–142.
4. Vysokomornaya O.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Prognostic determination of the integral characteristics of evaporation of water droplets in gaseous media at different temperatures]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Engineering and Physics Journal], vol. 90, 2017, no. 3, pp. 648–657.
5. Zakharevich A.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. [Experimental study of temperature change in the center of a water drop in the process of evaporation in a heated air]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], vol. 89, 2016, no. 3, pp. 537–541.
6. Kochurova N.N., Korotkikh O.P., Abdullin N.G., Airapetova E.R., Karaev R.R., Petzold G. [The influence of surface phenomena on the evaporation and condensation of water systems]. In: *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], vol. 89, 2016, no. 1, pp. 104–108.
7. Kuz'min M.K. [Theory of a nonstationary process of evaporation of a spherical aerosol droplet with allowance for the dependence of the vapor pressure on the curvature of its surface]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2012, no. 3, pp. 39–49.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кузьмин Михаил Кузьмич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: lesir179@infoline.su

Хасанов Анис Салыхович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Mikheyil K. Kuzmin – Doctor in Physics and Mathematics, professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: lesir179@infoline.su

Anis S. Khasanov – Doctor in Physics and Mathematics, professor at the Department of Higher Mathematics, Plekhanov Russian University of Economics;
e-mail: ankhasanov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Кузьмин М.К., Хасанов А.С. Формула для вычисления времени полного испарения аэрозольных капель с учётом коэффициентов испарения и поверхностного натяжения // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 68–75.

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-68-75

CORRECT REFERENCE TO THE ARTICLE

Kuzmin M.K., Khasanov A.S. Formula for Calculating the Complete Evaporation Time of Aerosol Drops with Allowance for the Evaporation and Surface Tension Coefficients. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 68–75.

DOI: 10.18384-2310-7251-2017-3-68-75