

УДК 531.534

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-73-81

Н-ТЕОРЕМА И УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Бишаев А.М.¹, Рыков В.А.², Абгарян М.В.³

¹ *Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Российская Федерация;*

² *Вычислительный центр Российской академии наук имени А.А. Дородницына
119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40, Российская Федерация;*

³ *Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики МАИ
125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4, Российская Федерация.*

Аннотация. В предлагаемой статье, используя ранее построенную кинетическую модель для неидеального газа, выведено уравнение состояния для такого газа, которое имеет место в состоянии термодинамического равновесия, а также получено выражение для критической температуры как функции от потенциала взаимодействия между молекулами.

Ключевые слова: неидеальный газ, связанные состояния, Н-теорема, уравнение состояния, критическая температура, потенциал взаимодействия молекул.

THE H-THEOREM AND EQUATION OF STATE FOR KINETIC MODEL OF IMPERFECT GAS

A. Bishaev¹, V. Rikov², M. Abgaryan³

¹ *Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*

² *Dorodnicyn Computing Centre (Russian Academy of Science),
ul. Vavilova 40, 119333 Moscow, Russian Federation*

³ *Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics of MAI
Volokolamskoe sh. 4, 125993 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Using a previously derived kinetic model for an imperfect gas, we have derived an equation of state for a gas in a thermodynamic equilibrium and an expression for the critical temperature as a function of an interaction potential between molecules.

Key words: imperfect gas, bound states, H-theorem, equation of state, critical temperature, interaction potential of molecules.

Введение

Известно, что Н.Н. Боголюбов, применяя асимптотические методы, получил из системы ВВГКУ уравнение Больцмана. В этом методе уравнение Больцмана получается как уравнение для определения одночастичной функции распределения в λ -масштабе, являющейся членом нулевого порядка при разложении системы ВВГКУ по малому параметру $\varepsilon = n_0 d^3$. Выше принято, что n_0 – характерная плотность молекул газа, $d \approx 10^{-8}$ см есть размер молекулы (или атома). Обычно за эту величину принимают размер, на котором отличен от нуля потенциал межмолекулярного взаимодействия, $\lambda = \frac{1}{n_0 d^2}$ есть длина пробега молекул в газе.

Когда рассматривается вывод уравнения Больцмана, всегда считается заданным потенциал, с которым молекулы взаимодействуют между собой. Причём предполагается, что молекулы газа взаимодействуют как точечные центры отталкивания. В реальности, как известно, потенциал взаимодействия молекул имеет как отталкивающие, так и притягивающие составляющие, поэтому уравнение Больцмана справедливо для идеального разреженного газа, то есть для газа, в котором можно пренебречь осреднённой потенциальной энергией притяжения молекул по сравнению с их средней кинетической энергией.

Имеется много работ, в которых пытаются учесть в уравнении Больцмана поправки порядка ε . Получающиеся в такой процедуре уравнения трактуются как кинетические уравнения для плотного газа. Последовательная асимптотическая процедура учёта членов порядка ε связана с рассмотрением столкновений трёх и более числа молекул одновременно, что приводит к появлению в упомянутой процедуре расходящихся интегралов. Эта проблема решается при помощи использования принципа ослабления корреляций при выражении для многочастичных функций распределения.

Следует отметить, что введённый выше параметр ε меньше единицы практически для всех сред [1]. Например, для железа (Fe), чья плотность равна $\rho = 7,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, $\varepsilon \approx 0,08$, то есть более чем в десять раз меньше единицы (для воды $\varepsilon \approx 0,02$). Из этого можно сделать вывод, что направление, связанное с учётом только эффектов уплотнения газа, вряд ли приведёт к созданию кинетических уравнений, описывающих поведение реальных сред.

Имеется достаточно большое количество работ, где пытаются учесть неидеальность газа в уравнении Больцмана (притягивающую составляющую в потенциале взаимодействия молекул).

Заметный вклад в понимание проблем, связанных с созданием кинетической теории неидеального газа, внёс Ю.Л. Климонтович [2]. Им был введён ещё один параметр длины, характеризующий среду. Это $l = n_0^{-1/3}$. Его трактуют как расстояние между молекулами. Тогда, из вышесказанного следует, что $\frac{d}{l} = \varepsilon^{1/3}$, а величина, обратная числу Кнудсена, которая стоит перед интегралом столкновений в уравнении Больцмана, равна $l/\lambda = \varepsilon^{2/3}$. Отсюда следует, что интеграл столкно-

вений является неаналитической функцией многочастичных функций распределения, поэтому его разложение по целым степеням ε не позволяет правильно учесть эффекты, связанные с увеличением плотности среды. Ю.Л. Климонтович также указал, что для кинетического описания неидеального газа необходимо использовать двухчастичную функцию распределения, что, вообще говоря, понятно, ибо средняя потенциальная энергия молекул будет выражаться через двухчастичную функцию распределения. Им было построено уравнение для двухчастичной функции распределения, описывающей неидеальный газ [3]. Заметного резонанса это не имело. Видимо из-за того, что из этого уравнения нельзя было перейти к идеальному газу.

Совсем другой подход к проблеме был предложен А.А. Власовым [4]. Он ввёл понятие потенциала самосогласованного поля и построил кинетическое уравнение для эволюции функции распределения, находящейся в этом поле. В настоящее время используются представления интеграла столкновений как суммы больцмановского интеграла, власовского и ещё каких-либо членов.

Наиболее рельефным эффектом действия сил притяжения между молекулами является образование связанных состояний теми молекулами, кинетическая энергия которых не позволяет преодолеть действие сил притяжения. Проблема учёта связанных состояний пока далека от своего решения, а имеющиеся кинетические уравнения, учитывающие указанный эффект, слишком сложны для своего аналитического и численного исследования.

Ранее авторами была построена кинетическая модель, учитывающая именно эффект образования связанных состояний [5]. В данной работе исследуется полученное на основании этой модели равновесное уравнение состояния.

Кинетическое уравнение для неидеального газа

В [5] была построена кинетическая модель для неидеального газа. Неидеальным газом авторы называли газ, в котором нельзя пренебречь потенциальной энергией взаимодействия молекул по сравнению с их кинетической энергией. В этом случае в фазовом пространстве $\Gamma = \Omega \times D$, где Ω – пространство относительных скоростей молекул $\vec{g} = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}$, а D – пространство относительных положений $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}$, образуются области связанных состояний, которые описываются

соотношением $\frac{m}{4} \vec{g}^2 + U(r) \leq 0$, где $U(r)$ есть потенциал межмолекулярного взаимодействия.

В предположении, что двухчастичная функция распределения молекул, находящихся в связанном состоянии, имеет каноническое распределение –

$$\bar{F}_d = f_0(t, \vec{q}, \vec{w}) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{k\varphi(t, \vec{q}, \vec{w})} \left(\frac{m}{4} \vec{g}^2 - U_0 \left(\frac{d}{r} \right)^4 \right) \right\}.$$

Для такого газа была получена следующая система кинетических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = J_B - J_{del}, \quad \frac{Ds}{Dt} = J_{del}, \quad \frac{Dh}{Dt} = \\
& = \chi_1 \int_{g \leq 2\chi_1} \frac{m}{4} g^2 d\bar{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f_0) \sin \omega d\omega d\theta, \\
J_B & = \int d\bar{\xi}_1 \left(\int_0^b \int_0^{2\pi} g (f f_1' - f f_1) b d b d\theta \right), \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^j \frac{\partial}{\partial w^j}, \\
\bar{a} & = -\frac{4\pi U_0 d^3 \text{grad}(n)}{3m}, \quad \chi_1 = \sqrt{\frac{U_0}{m}}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{\xi} + \bar{\xi}_1}{2}. \tag{1}
\end{aligned}$$

В (1) $J_{del} = \chi_1 d^2 \int_{g \leq 2\chi_1} d\bar{g} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f) \sin \omega d\omega d\theta \right)$, $f = f(t, \bar{x}, \bar{\xi})$ – функция рас-

пределения молекул в свободном состоянии,

$$\begin{aligned}
\bar{f} & = f^2(t, \bar{\xi}, \bar{x}) = f^2(t, \bar{w}, \bar{\xi}, \bar{x}); \quad s = s(t, \bar{q}, \bar{w}) = \\
& = \iint_{\Omega_{del}} \bar{F}_d d\bar{r} d\bar{g}, \quad h = h(t, \bar{q}, \bar{w}) = \iint_{\Omega_{del}} \left(\frac{mg^2}{4} + U(r) \right) \bar{F}_d d\bar{r} d\bar{g} \leq 0.
\end{aligned}$$

Ω_{del} есть область фазового пространства молекул, которые находятся в связанном состоянии; $s\Delta\bar{q}\Delta\bar{w}$ есть число молекул, находящихся в связанном состоянии, чьи координаты и скорости находятся в соответствующем элементе фазового пространства, а $h\Delta\bar{q}\Delta\bar{w}$ – их энергия.

Через введенные выше функции f , s , h макропараметры выражаются следующим образом: $n(t, \bar{x}) = \int f d\bar{\xi} + \int s d\bar{w}$ – числовая плотность газа; $n\bar{u} = \int \bar{\xi} f d\bar{\xi} + \int \bar{w} s d\bar{w}$. Здесь \bar{u} есть макроскопическая скорость газа, $P^{ij} = m \int c_f^i c_f^j f d\bar{\xi} + m \int c_d^i c_d^j s d\bar{w}$, $\bar{c}_f = \bar{\xi} - \bar{u}$, $\bar{c}_d = \bar{w} - \bar{u}$, $i, j = 1, 2, 3$ – тензор напряжений в неидеальном газе. Кинетическая температура определяется следующим образом: $\frac{3}{2}nkT = \int m \frac{\bar{c}_f^2}{2} f d\bar{\xi} + \int (m \frac{\bar{c}_d^2}{2} s - \frac{1}{2}h) d\bar{w}$. Здесь k – постоянная Больцмана.

В [5] показано, что из (1) следуют все законы сохранения.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu_i)}{\partial x_i} & = 0, \quad mn \frac{\partial u^j}{\partial t} + mn u^i \frac{\partial u^j}{\partial x_i} + \frac{\partial P^{ij}}{\partial x_i} - n a_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad n_d u_d^i = \int w^i s d\bar{w}, \\
\frac{3}{2}kn \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u^i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + P^{ki} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} - n(u_d^i - u^i) a_i & = 0, \\
\bar{Q} & = \int m \bar{c}_f \frac{\bar{c}_f^2}{2} f d\bar{\xi} + \int \bar{c}_d \left(m \frac{\bar{c}_d^2}{2} s - \frac{1}{2}h \right) d\bar{w}.
\end{aligned}$$

Равновесное уравнение состояния

Понятие давления для неидеального газа вводится так же, как и для идеально-го – $3P = P^{11} + P^{22} + P^{33} = m \left(\int \bar{c}_v^2 f d\xi + \int \bar{c}_d^2 s d\bar{w} \right)$. Тогда из определения макроскопических величин можно получить следующее соотношение:

$$\left(P - \frac{1}{3} \int h d\bar{w} \right) = nkT. \quad (2)$$

Соотношение (2) есть кинетическое уравнение состояния. В правых частях уравнений для s и h можно проинтегрировать по скоростному пространству, и в случае, когда в качестве междумолекулярного потенциала был взят частный

случай потенциала Сазерленда – $U(r) = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq r < d \\ -U_0 \left(\frac{d}{r} \right)^4, & r \geq d \end{cases}$, привести эти

уравнения к виду $\frac{Ds}{Dt} = J/3, \frac{Dh}{Dt} = -U_0 J/5$, где $J = 64\pi^2 \chi_1 d^2 \left(\frac{U_0}{m} \right)^{3/2} (\bar{f} - f_0)$.

Откуда $\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{5} U_0 s + h \right) = 0 \rightarrow \frac{3}{5} U_0 s + h = c = \text{const}$. Ясно, что если число частиц s в

связанном состоянии в элементе объёма фазового пространства равно нулю, то их энергия в связанном состоянии тоже равна нулю, поэтому s и h всегда связаны соотношением $\frac{3}{5} U_0 s(t, x, \bar{w}) + h(t, x, \bar{w}) = 0$, откуда имеем соотноше-

ние для определения $\varphi(t, \bar{x}, \bar{w}) = \varphi = \text{const}$: $\frac{h(t, \bar{x}, \bar{w})}{s(t, \bar{x}, \bar{w})} = -\frac{3}{5} U_0 = -\frac{3}{5} U_0 \frac{Z_h(\bar{\chi})}{Z_s(\bar{\chi})}$,

где $Z_s(\bar{\chi}), Z_h(\bar{\chi}), \bar{\chi} = \frac{U_0}{k\varphi}$ определены в [5]. В случае однородной релаксации

$f = f(t, \bar{\xi})$ и $s = s(t, \bar{w})$. Соответственно, система (1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{d^2}{2} \int_0^b d\xi_1 \left(\int_0^{2\pi} g(f f_1' - f f_1) b db d\theta \right) - d^2 \chi_1 \int_{g \leq 2\chi_1} d\xi_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f_0) \sin \omega d\omega d\theta \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= d^2 \chi_1 \int_{g \leq 2\chi_1} d\mathbf{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \omega| (\bar{f} - f_0) \sin \omega d\omega d\theta, \quad \frac{3}{5} U_0 s + h = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $S(t, \bar{w}) = \int_{\Omega_{del}} \bar{F}_d \ln \bar{F}_d d\bar{r} d\bar{g}$. Тогда $H_d = \frac{k}{2} \int S(t, \bar{w}) d\bar{w}$ есть H – функция еди-

ницы объёма для молекул в связанном состоянии. Учитывая представление для функции распределения молекул в связанном состоянии, получим, что про-

изводство Н-функции в единицу времени в единице объёма для этих молекул определяется как:

$$\dot{H}_d = \frac{k}{2} \int \frac{\partial S}{\partial t} d\mathbf{w} = \frac{kd^2}{2} \int_{g \leq 2\chi_1} \left(\int_0^{\frac{2\pi}{\phi}} \int_0^{\pi} (\ln f_0 + 1 + \frac{3U_0}{5k\phi}) (\bar{f} - f_0) R(\omega, \theta) d\omega d\theta d\bar{g} \right) d\bar{w}. \quad (4)$$

Н-функцию молекул, находящихся в несвязанном состоянии, запишем как обычно: $H_f = k \int \int f \ln f e^{1/2 + \frac{3U_0}{10k\phi}} d\bar{\xi} d\xi_1$, тогда:

$$\begin{aligned} \dot{H}_d + \frac{\partial H_f}{\partial t} &= kd^2 / 2 \int \int \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \ln \frac{ff_1}{f_1'f'} (f_1'f' - ff_1) bdbd\epsilon d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi} + \\ &+ \frac{k}{2} d^2 \int_{g \leq 2\chi_1} \int_0^{\pi} \int_0^{2\lambda} \ln \frac{f_0}{f} (\bar{f} - f_0) R(\omega, \theta) d\omega d\theta d\bar{g} d\bar{w} \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, для построенной выше кинетической модели имеет место Н-теорема. Тогда решение задачи об однородной релаксации при $t \rightarrow +\infty$ будет выходить на равновесное состояние, при котором $\dot{H} = \dot{H}_d + \frac{\partial H_f}{\partial t} = 0$, откуда следует, что $f_1'f' = ff_1$, $\bar{f} = f_0$.

Тогда $f = n_f \left(\frac{m}{2\pi k T_f} \right)^{3/2} \exp\left\{ -\frac{m}{2k T_f} \bar{\xi}^2 \right\}$, где n_f есть плотность молекул, находящихся в свободном состоянии, а T_f можно трактовать как их температуру. Так как $\bar{f} = f_0$, то $f_0 = f^2(\bar{w}) = n_f^2 \left(\frac{m}{2\pi k T_f} \right)^3 \exp\left\{ -\frac{m}{k T_f} \bar{w}^2 \right\}$. В случае задачи о релаксации уравнения сохранения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial n_f}{\partial t} + \frac{\partial n_d}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow n = \text{const}, T = \text{const}.$$

Используя равновесные значения искомых функций, получим, что $n_f + m_f^2 = n$.

$$T_f \frac{1 + \frac{m_f \chi_f^{3/2}}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \chi_f \right)}{1 + m_f \chi_f^{3/2}} = T, \quad r = 2\sqrt{\pi} d^3 Z_s(\bar{\chi}), \quad \chi_f = \frac{U_0}{k T_f}.$$

Кинетическое уравнение состояния (2), если его записать через равновесные значения функций распределения, примет следующий вид:

$$\left(P + \frac{U_0}{5} m_f^2 \chi_f^{3/2} \right) = knT.$$

Введём величину $V = \frac{1}{n_f}$. Она имеет смысл объёма, который занимает газ.

Уравнение состояния тогда переписывается как:

$$\left(P + \frac{U_0}{5} \frac{r\chi_f^{3/2}}{V^2}\right) \frac{V}{\left(1 + \frac{r\chi_f^{3/2}}{V}\right)} = kT.$$

Уравнение Больцмана является членом нулевого порядка при разложении ВВГКУ-цепочки по малому параметру $\varepsilon = nd^3$. В [5] показано, что неидеальность газа должна учитываться, когда $1 \approx \varepsilon\chi_f^{3/2}$. Если записать уравнение состояния,

предполагая, что $\varepsilon\chi_f^{3/2} < 1$, то оно примет вид $\left(P + \frac{U_0}{5} \frac{r\chi_f^{3/2}}{V^2}\right)(V - r\chi_f^{3/2}) = kT$.

Нетрудно видеть, что это уравнение Ван-дер-Ваальса, в котором феноменологические параметры a и b имеют конкретные выражения через макропараметры газа и константы межмолекулярного взаимодействия. Применяя процедуру получения выражения для критической температуры, получим, что $kT_{\text{крит}} = \frac{8}{135}U_0$.

Заключение

Предположение, что $\varepsilon\chi_f^{3/2} < 1$, соответствует тому, что подход к критическому состоянию происходит со стороны газа, при этом критическая температура выражается через характерное значение межмолекулярного потенциала взаимодействия молекул. В данной кинетической модели могут быть использованы и другие потенциалы взаимодействия между молекулами, тогда в выражении для критической температуры будет другая константа перед U_0 . Чтобы получить изотерму для неидеального газа при любых значениях температуры, нужно получить (2), исходя из решения (3) (задачи о релаксации), что в настоящей момент и делается.

БЛАГОДАРНОСТИ / ACKNOWLEDGMENTS

Данная работа выполнена в Московском авиационном институте (МАИ) при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках соглашения о предоставлении субсидии № 14.577.21.0231 от 29.09.2016 г. между МАИ и министерством (уникальный идентификатор ПНИЭР–RFMEF157716X0231).

This work was carried out at the Moscow Aviation Institute (MAI) with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the agreement on granting the subsidy No. 14.577.21.0231 dated September 29, 2016 between the MAI and the Ministry (unique identifier PNIER-RFMEF157716X0231).

Статья поступила в редакцию 21.02.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов М.: Иностранная литература, 1960. 510 с.
2. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория. М.: Наука, 1982. 608 с.
3. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеальных газов и плазмы. М.: Наука, 1975. 352 с.
4. Власов А.А. Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1976. 264 с.
5. Бишаев А.М., Рыков В.А. Построение системы кинетических уравнений для неидеального газа // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 1. С. 31–43.

REFERENCES

1. Chepmen S., Kauling T. *Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov* [The mathematical theory of nonuniform gases]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1960. 510 p.
2. Klimontovich Yu.L. *Statisticheskaya teoriya* [Statistical theory]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 608 p.
3. Klimontovich Yu.L. *Kineticheskaya teoriya neideal'nykh gazov i plazmy* [Kinetic theory of nonideal gases and plasmas]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 352 p.
4. Vlasov A.A. *Nelokal'naya statisticheskaya mekhanika* [Nonlocal statistical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 264 p.
5. Bishaev A.M., Rykov V.A. [The construction of a system of kinetic equations for a nonideal gas]. In: *Teplofizika vysokikh temperatur* [High Temperature], 2017, vol. 55, no. 1, pp. 31–43.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бишаев Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета);
e-mail: bishaev@bk.ru;

Рыков Владимир Алексеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра Российской академии наук им. А.А. Дородницына;
e-mail: bishaev@bk.ru;

Абгарян Микаэл Варданович – инженер Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики МАИ;
e-mail: chatebrian@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Aleksandr M. Bishaev – Doctor in Physical and Mathematical sciences, professor at the Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University);
e-mail: bishaev@bk.ru;

Vladimir A. Rikov – PhD in Physical and Mathematical sciences, leading researcher, Dorodnicyn Computing Centre (Russian Academy of Science);
e-mail: bishaev@bk.ru;

Michael V. Abgaryan – engineer, Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics of MAI;
e-mail: chatebrian@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бишаев А.М., Рыков В.А., Абгарян М.В. H-теорема и уравнение состояния для кинетической модели неидеального газа // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 73–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-73-81.

FOR CITATION

Bishaev A.M., Rikov V.A., Abgaryan M.V. The H-theorem and equation of state for kinetic model of imperfect gas. In: *Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2018. no. 1. pp. 73–81.
DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-73-81.