РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13

ЛОКАЛЬНАЯ ПРОЕКТИВНО ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРЫ

Марченко Т.А., Матвеев О.А., Птицына И.В.
Московский государственный областной университет
105005, г. Москва, улица Радио, 10А, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматриваются геометрические и алгебраические свойства локально симметрического риманова дифференцируемого многообразия постоянной положительной кривизны на примере сферы. Обсуждаются тождества, выполняющиеся в геодезической лупе сферического пространства, проводится явное описание гомотетий, геодезических симметрий и параллельных переносов в локальной системе координат, общей с локально плоским пространством аффинной связности.

Ключевые слова: римановы пространства, локально симметрические многообразия аффинной связности постоянной положительной кривизны, геодезические линии, теория луп, геодезическая лупа, гомотетии, геодезические симметрии, параллельные переносы.

THE LOCAL PROJECTIVE FLAT MODEL OF THE SPHERE

T. Marchenko, O. Matveyev, I. Ptitsyna
Moscow Region State University
ul. Radio 10A, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. The paper examines geometric and algebraic properties of locally symmetric differential affine-connected manifolds of constant positive curvature by the example of spheres. The identities in a geodesic loop of spherical spaces are discussed, homotheties, geodesic symmetries and parallel translations are described in the local coordinate system which is common with a locally flat space with affine connection.

Key words: spaces with affine connection, locally symmetric manifolds with affine connection of constant positive curvature, geodesic lines, loop theory, geodesic loop, homotheties, geodesic symmetries, parallel translations.

Действительная сфера $S^n(\boldsymbol{R})$ размерности n ($n \geq 2$), где $\boldsymbol{R}$ – поле вещественных чисел, является классическим примером компактного риманова многообразия постоянной положительной кривизны и относится к симметрическим пространствам первого типа: $S^n(\boldsymbol{R}) = SO(n+1, \boldsymbol{R})/SO(n, \boldsymbol{R})$. Напомним, что дифференцируемое (аналитическое) многообразие аффинной связности называется локально симметрическим, если геодезическая симметрия относительно каждой точки многообразия является локальным автоморфизмом. Сфера с естественной метрикой является локально проективно плоским пространством, то есть допускает геодезическое отображение на евклидову плоскость, при котором геодезические линии некоторой нормальной выпуклой окрестности сферы переходят в прямые (или отрезки на плоскости), при этом аффинный (канонический) параметр вдоль геодезической линии изменяется (этот факт является следствием теоремы Бельтрами). Рассмотрим локальную проективно плоскую модель сферы размерности 2.

На сфере S^2 радиуса R, вложенной в трёхмерное евклидово пространство $\boldsymbol{R^3}$, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат ($qxyz$) имеет вид $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$, (центром сферы является точка $O(0; 0; R)$), рассмотрим стандартную метрику, индуцированную объемлющим пространством $\boldsymbol{R^3}$ (точки на плоскости $M(xqy)$ и на сфере S^2 для сокращения объёмов формул обозначаем строчными (незаглавными) буквами латинского алфавита; чтобы отличать точки на плоскости от точек на сфере, точки на сфере пишем со штрихом). Геодезическими линиями на сфере являются окружности большого радиуса. Проведём стереографическую проекцию f из центра сферы о на плоскость $M(xqy)$, касающуюся сферы в точке q, при этом нижняя часть сферы – полусфера без границы взаимно-однозначно отобразится на плоскость. Геодезические линии на сфере (локально) перейдут в прямые на плоскости (рис. 1).

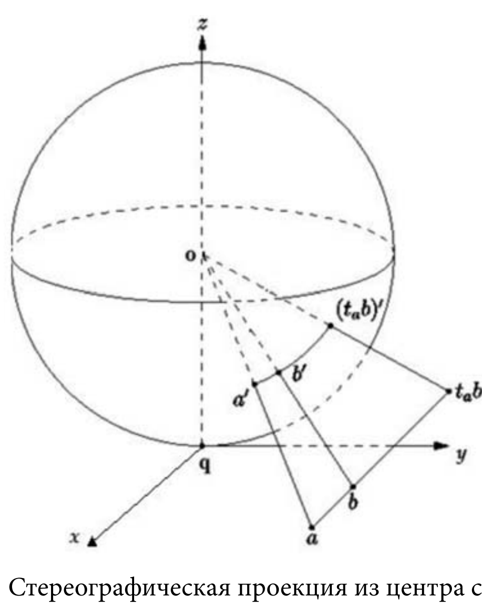

Рис. 1. Стереографическая проекция из центра сферы на касательную плоскость к сфере.

Мы намеренно в данном изложении используем только элементарные математические методы, минуя дифференцирование и сложные конструкции дифференциальной геометрии. Такой подход к описанию пространств аффинной связности предлагается в работах [1–7].

«Сферическое» расстояние между точками на плоскости $M(xqy)$ задаётся формулой:

$$d(a,b)=R\arccos\frac{\left|a_1b_1+a_2b_2+R^2\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+R^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+R^2}}\ . \qquad (1)$$

Пусть отображение t_a: $\boldsymbol{R^2}\to\boldsymbol{R^2}$ – гомотетия на «сферической» плоскости M с центром в точке a и коэффициентом растяжения или сжатия t (число t не равно 1 или 0). Вычислим операцию t_ab, исходя из соотношения:

$$d(a,\ t_ab) = |t|d(a,\ b). \qquad (2)$$

Введем обозначения:

$\vec{r}=\overrightarrow{qo};\vec{r}\left(O;O;R\right);\vec{x}=\overrightarrow{oa};\vec{x}\left(a_1;a_2;-R\right);$

$\vec{y}=\overrightarrow{ob};\vec{y}\left(b_1;b_2;-R\right);\vec{a}=\overrightarrow{qa};\vec{a}\left(a_1;a_2;O\right);$

$\vec{b}\quad\overrightarrow{qb};\vec{b}\left(b_1;b_2;O\right).$

Точки a и b принадлежат плоскости qxy. «Сферическое» расстояние между точками a и b вычисляется по формуле: $d\left(a,b\right)=R\arccos\frac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{|\vec{x}||\vec{y}|}$. Пусть $c = t_ab$, тогда $d\left(a,c\right)=|t|d\left(a,b\right)$, или

$$arcCos\frac{\left(\vec{x},\vec{z}\right)}{|\vec{x}||\vec{z}|}=|t|arcCos\frac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{|\vec{x}||\vec{y}|};\ \vec{z}=\overrightarrow{oc}.$$

Точка c лежит на прямой, проходящей через точки a и b, следовательно, найдется такое действительное число u, что $\vec{c}=\overrightarrow{qc}=\vec{a}+u\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$. Положим для краткости $\varphi=\arccos\frac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{|\vec{x}||\vec{y}|}$. Имеем $\frac{\left(\vec{x},\vec{c}-\vec{r}\right)}{|\vec{x}||\vec{c}-\vec{r}|}=\cos\left(t\varphi\right)$,

или

$$\left(\vec{x},\vec{a}+u\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-\vec{r}\right)=|\vec{x}|\left|\vec{a}+u\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-\vec{r}\right|\cos\left(t\varphi\right).$$

Возведём обе части полученного уравнения в квадрат:

$$\left[\left(\vec{x},\vec{a}-\vec{r}\right)+u\left(\vec{x},\vec{b}-\vec{a}\right)\right]^2=|\vec{x}|^2\left|\vec{a}-\vec{r}+u\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\right|^2\cos^2\left(t\varphi\right);$$

$$\left[|\vec{x}|^2+u\left(\vec{x},\vec{y}-\vec{x}\right)\right]^2=|\vec{x}|^2\left|\vec{x}+u\left(\vec{y}-\vec{x}\right)\right|^2\cos^2\left(t\varphi\right).$$

Положим $\vec{y}-\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}=\vec{w}$, $\left[|\vec{x}|^2+u(\vec{x},\vec{w})\right]^2=|\vec{x}|^2|\vec{x}+u\vec{w}|^2\cos^2(t\varphi)$;

$$u^2(\vec{x},\vec{w})^2+2u|\vec{x}|^2(\vec{x},\vec{w})+|\vec{x}|^4=|\vec{x}|^2\left(|\vec{x}|^2+2u(\vec{x},\vec{w})+u^2|\vec{w}|^2\right)\cos^2(t\varphi);$$

$$u^2\left((\vec{x},\vec{w})^2-|\vec{x}|^2|\vec{w}|^2\cos^2(t\varphi)\right)+2u|\vec{x}|^2(\vec{x},\vec{w})\sin^2(|t|\varphi)+$$

$$+|\vec{x}|^4\sin^2(|t|\varphi)=0.$$

Вычислим дискриминант и решим полученное квадратное уравнение:

$$\frac{D}{4}=|\vec{x}|^4(\vec{x},\vec{w})^2\sin^4(|t|\varphi)-|\vec{x}|^4\sin^2(|t|\varphi)\left((\vec{x},\vec{w})^2-|\vec{x}|^2|\vec{w}|^2\cos^2(t\varphi)\right)=$$
$$=-|\vec{x}|^4(\vec{x},\vec{w})^2\sin^2(|t|\varphi)\cos^2(t\varphi)+|\vec{x}|^6|\vec{w}|^2\sin^2(|t|\varphi)\cos^2(t\varphi)=$$
$$=|\vec{x}|^4\cdot\frac{1}{4}\sin^2(2|t|\varphi)\left(|\vec{x}|^2|\vec{w}|^2-(\vec{x},\vec{w})^2\right).$$

Пусть угол $\widehat{\vec{x},\vec{w}}$ равен ψ, тогда $D=|\vec{w}|^2|\vec{x}|^6\sin^2(2|t|\varphi)\sin^2\psi$

$$u_{1,2}=\frac{-2|\vec{x}|^2(\vec{x},\vec{w})\sin^2(|t|\varphi)\pm|\vec{w}||\vec{x}|^3\sin(2|t|\varphi)\sin\psi}{2|\vec{x}|^2|\vec{w}|^2\left(\cos^2\psi-\cos^2(t\varphi)\right)}=$$
$$=\frac{-2|\vec{x}|\cos\psi\sin^2(|t|\varphi)\pm|\vec{x}|\sin(2|t|\varphi)\sin\psi}{2|\vec{w}|\left(\cos^2\psi-\cos^2(t\varphi)\right)};$$

$$u_1=-\frac{|\vec{x}|\sin(|t|\varphi)\left(\cos\psi\sin(|t|\varphi)+\cos(t\varphi)\sin\psi\right)}{|\vec{w}|\left(\cos^2\psi-\cos^2(t\varphi)\right)}=-\frac{|\vec{x}|}{|\vec{w}|}\frac{\sin(|t|\varphi)\sin(|t|\varphi+\psi)}{\cos^2\psi-\cos^2(t\varphi)};$$

$$u_2=\frac{|\vec{x}|}{|\vec{w}|}\frac{\sin(|t|\varphi)\sin(\psi-|t|\varphi)}{\cos^2\psi-\cos^2(t\varphi)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\psi-\cos(t\varphi)=2\sin\dfrac{\psi+|t|\varphi}{2}\sin\dfrac{\psi-|t|\varphi}{2}\\ \cos\psi+\cos(t\varphi)=2\cos\dfrac{\psi+|t|\varphi}{2}\cos\dfrac{\psi-|t|\varphi}{2}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\cos^2\psi-\cos^2(t\varphi)=\sin(\psi+|t|\varphi)\sin(\psi-|t|\varphi)$$

$$u_1=\frac{|\vec{x}|}{|\vec{w}|}\frac{\sin(|t|\varphi)}{\sin(\psi-|t|\varphi)},\qquad u_2=\frac{|\vec{x}|}{|\vec{w}|}\frac{\sin(|t|\varphi)}{\sin(\psi+|t|\varphi)}.$$

Анализируя отдельно три случая: t – положительно, отрицательно, равно нулю, приходим к результату: $u = \frac{|\vec{x}|}{|\vec{w}|}\frac{\sin(t\varphi)}{\sin(\psi + t\varphi)}$ для положительных и отрицательных t, неравных нулю; $u = 0$, если $t = 0$.

$$\vec{c} = \vec{a} + u\left(\vec{b} - \vec{a}\right) =$$
$$= \vec{a} + \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + R^2}}{\sqrt{\left(b_1 - a_1\right)^2 + \left(b_2 - a_2\right)^2}} \cdot \frac{\sin(t\varphi)}{\sin(\psi + t\varphi)}\left(\vec{b} - \vec{a}\right); \tag{3}$$

$\vec{c} = \vec{a}$, если $t = 0$.

Рассмотрим геодезическую квазигруппу, соответствующую –1, с бинарными операциями умножения, левого и правого деления. Левые сдвиги этой квазигруппы и есть геодезические симметрии относительно точки. В наших обозначениях

$$x \cdot y = (-1)_x\, y,\;\; x \setminus y = (-1)_x\, y,\;\; y / x = \left(\frac{1}{2}\right)_x y.$$

Главный левый изотоп этой квазигруппы есть геодезическая лупа эллиптического пространства, левые сдвиги (параллельные переносы) задаются формулой Эли Картана: $L_x^y = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_y x} \circ (-1)_y$.

Подставляя в соотношение (3) $t = \frac{1}{2}; t = -1,$ получаем:

$$\overrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)_a b} = \frac{\left|\vec{b} - \vec{r}\right|\vec{a} + \left|\vec{a} - \vec{r}\right|\vec{b}}{\left|\vec{a} - \vec{r}\right| + \left|\vec{b} - \vec{r}\right|} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{(-1)_a b} = \frac{-2\left[\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + R^2\right]\vec{a} + \left[\left|\vec{a}\right|^2 + R^2\right]\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2 - 2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - R^2} =$$
$$= \frac{-2\left|\vec{b} - \vec{r}\right| cos\varphi \vec{a} + \left|\vec{a} - \vec{r}\right|\vec{b}}{\left|\vec{a} - \vec{r}\right| - 2\left|\vec{b} - \vec{r}\right| cos\varphi}. \tag{5}$$

Если положить $a = q$, то $\overrightarrow{(-1)_q c} = -\vec{c}; \overrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)_q c} = \frac{|\vec{r}|\vec{c}}{|\vec{r}| + |\vec{c} - \vec{r}|}.$

Вычислим общий вид выражений для гомотетий с центром в точке q. Из формулы (3) имеем:

$$\overrightarrow{t_q a} = \frac{R}{|\vec{a}|} tg\left(t \operatorname{arctg} \frac{|\vec{a}|}{R} \right) \cdot \vec{a}. \tag{6}$$

Вычислим параллельные переносы вдоль геодезических линий, проходящих через q - точку касания сферы и касательной плоскости:

$$\overrightarrow{L_b^q c} = R \frac{\left[\left(\vec{b}, \vec{c} \right) - R\left|\vec{b} - \vec{r}\right| - R^2 \right] \vec{b} - \left[|b|^2 + R\left|\vec{b} - \vec{r}\right| + R^2 \right] \vec{c}}{\left(R + \left|\vec{b} - \vec{r}\right| \right) \left[\left(\vec{b}, \vec{c} \right) - R^2 \right]}. \tag{7}$$

$$\overrightarrow{(L_b^q)^{-1} c} = L^q_{(-1)_q b} c = R \frac{-\left[\left(\vec{b}, \vec{c} \right) + R\left|\vec{b} + \vec{r}\right| + R^2 \right] \vec{b} + \left[|b|^2 + R\left|\vec{b} + \vec{r}\right| + R^2 \right] \vec{c}}{\left(R + \left|\vec{b} + \vec{r}\right| \right) \left[\left(\vec{b}, \vec{c} \right) + R^2 \right]}. \tag{8}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то найдётся такое действительное число t, что $b = t_q a$; следовательно, параллельный перенос $L^a_{t_q a}$ может быть вычислен по формуле:

$$L^a_{t_q a} = L^e_{t_q a} \circ \left(L^e_a \right)^{-1}.$$

Если векторы и $\vec{b}$ линейно независимы, то $\overrightarrow{L_b^a c}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Полученные результаты естественным образом могут быть обобщены на многомерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности / Андроникова Е.О., Дмитриева М.Н., Матвеев О.А., Матвеева Н.В. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2016. № 3. С. 8–17.
2. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. О локально инвариантных пространствах аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2010. № 2. С. 19–27.
3. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим. Монография. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012. 125 с.
4. Матвеев О.А., Нестеренко Е.Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим. Монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.
5. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature // Webs and quasigroups. Tver, 2002. pp. 78–84.
6. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. The real prosymmetric spaces // Non-Associative Algebra and Its Applications. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2006, Chapter 19, pp. 253–260.
7. Sabinin L.V., Matveyev O.A. Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds // Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series «Mathematics». 1995. 2(1). pp. 135–243.

REFERENCES

1. Andronikova E.O., Dmitrieva M.N., Matveev O.A., Matveeva N.V. [Homotheties and parallel shifts in the projective symmetric spaces with affine connection] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 8–17.
2. Matveev O.A., Nesterenko E.L. [On locally invariant spaces with affine connection] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika*, [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2010, no. 2, pp. 19–27.
3. Matveev O.A., Nesterenko E.L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim*. [Algebraic theory of close-to-symmetric spaces]. Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2012, 125 p.
4. Matveev O.A., Nesterenko E.L. Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim [Universal algebras in the theory of close-to-symmetric spaces with affine connection]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2012. 132 p.
5. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. [On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature]. In: *Webs and quasigroups*. Tver. 2002. pp. 78–84.
6. Matveyev O.A., Nesterenko E.L. [The real prosymmetric spaces]. In: *Non-Associative Algebra and Its Applications*. Boca Raton, London, New York, Chapman and Hall/CRC, 2006, Chapter 19, pp. 253–260.
7. Sabinin L.V., Matveyev O.A. [Geodesic loops and some classes of affine connected manifolds]. In: *Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series 'Mathematics'*, 1995, 2(1), pp. 135–243.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Марченко Татьяна Андреевна – студентка физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математический анализ и геометрия» Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Птицына Инга Вячеславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математический анализ и геометрия» Московского государственного областного университета;
e-mail: inpt@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Tatyana A. Marchenko – the student of physical-mathematical department, Moscow Region State University;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Oleg A. Matveyev – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Inga V. Ptitsyna – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: inpt@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Марченко Т.А., Матвеев О.А., Птицына И.В. Локальная проективно плоская модель сферы // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 6–13.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13

FOR CITATION

Marchenko T.A., Matveyev O.A., Ptitsyna I.V. The local projective flat model of the sphere. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2017. no. 4. pp. 6–13.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-6-13