УДК 517.55
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ЯДРАМИ ПУАССОНА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Антоненкова О.Е., Часова Н.А.
Брянский государственный инженерно-технологический университет
241037, г. Брянск, проспект Станке Димитрова, 3, Российская Федерация

Аннотация. Пространства Харди играют огромную роль в комплексном анализе и его многочисленных приложениях. Однако, в отличие от одномерного случая, пространства типа Харди в поликруге исследованы сравнительно мало. В данной работе получены интегральные представления классов n-гармонических в поликруге U^n функций. В частности, даётся характеризация n-гармонических в поликруге функций, допускающих представление в виде кратного интеграла Пуассона от измеримых на остове поликруга функций из класса $L^{\vec{p}}(T^n)$, где $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$. При доказательстве основного результата используются общие методы комплексного и функционального анализа, теории классов Харди.

Ключевые слова: интегральный оператор, ядро Пуассона, n-гармоническая функция, поликруг.

ABOUT INTEGRAL OPERATORS WITH POISSON KERNELS IN HARDY-TYPE SPACES IN POLYDISC WITH MIXED NORM

O. Antonenkova, N. Chasova
Bryansk State Technological University of Engineering
3 prospect Stanke Dimitrova, Bryansk 241037, Russian Federation

Abstract. Hardy spaces play an important role in the complex analysis and its numerous applications. However, unlike a one-dimensional case, the Hardy-type spaces in a polydisc are investigated a little. In this paper, the integral representations of the classes of n-harmonic in a polydisc U^n functions are received, in particular the characterization of n-harmonic functions in a polydisc which can be represented as a multiple Poisson integral from functions, measurable on a skeleton of a polydisc, from a $L^{\vec{p}}(T^n)$, class where $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$. is given. At the proof of the main result the general methods of the complex and functional analysis, theory of Hardy classes is used.

Key words: integral operator, Poisson kernel, n-harmonic function, polydisc.

Как известно, интегральные представления играют важнейшую роль в комплексном анализе и его многочисленных приложениях. Для примера напомним классические формулы Коши, Шварца, Пуассона и интегральные представления с воспроизводящими ядрами [1–3]. Они выражают значения функции, голоморфной в некоторой области, через её значения на границе или на остове этой области, что позволяет упростить исследование различных пространств голоморфных функций.

Исследование структуры этих пространств посредством интегральных представлений служит мощным толчком к развитию целого ряда важных направлений как в теории голоморфных функций (граничные свойства, задачи аппроксимации и интерполяции, вопросы факторизации и т.д.), так и в теории рядов и интегралов Фурье, в теории сингулярных интегральных операторов и в других вопросах комплексного и гармонического анализа. Следует отметить, что в одномерном случае указанные вопросы изучены довольно полно [1; 3]. В тоже время интегральные представления в различных многомерных областях комплексного пространства исследованы сравнительно мало, несмотря на то, что эти представления имеют важные приложения в теории кратных тригонометрических рядов, в теории функций нескольких комплексных переменных и в многомерном гармоническом анализе.

В последнее время ряд учёных занимается изучением широкого круга задач, связанных с интегральными представлениями как в единичном круге [4; 5], так и в различных областях пространств R^n и C^n [6–9]. Это и описание сопряжённых пространств, и построение линейных непрерывных функционалов на этих пространствах, и исследование ограниченности теплицевых операторов и др.; для примера укажем на работы [10; 11].

В данной работе получены интегральные представления классов n-гармонических в поликруге U^n функций с граничными значениями из классов измеримых на остове поликруга функций со смешанной нормой. Аналогичные результаты в различных областях комплексного пространства рассматриваются и в работах других авторов, например, интегральные представления с ядрами Пуассона и Пуассона-Бергмана для гармонических в шаре функций с конечной смешанной нормой рассмотрены в работе [12].

Введём обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $U^n = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) : \left| z_i \right| < 1, i = \overline{1, n} \right\}$ – единичный поликруг в n-мерном комплексном пространстве C^n, $T^n = \left\{ \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) : \left| \zeta_i \right| = 1, i = \overline{1, n} \right\}$ – его остов. Пусть $Q_n = [-\pi, \pi] \times \ldots \times [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi]^n$ – декартово произведение n экземпляров отрезка $[-\pi, \pi]$; $I^n = [0, 1) \times \ldots \times [0, 1) = [0, 1)^n$.

Через $L^{\vec{p}}(T^n)$, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \le p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$ будем обозначать пространство измеримых на T^n функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}(T^n)} = \|f\|_{\vec{p}} = \left\| \cdots \left\| \|f\|_{p_1} \right\|_{p_2} \cdots \right\|_{p_n} =$$

$$= \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left(\int_T |f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)|^{p_1} dm_1(\zeta_1) \right)^{p_2/p_1} dm_1(\zeta_2) \right)^{p_3/p_2} \cdots dm_1(\zeta_n) \right)^{1/p_n},$$

где $T = T^1$, dm_1 – линейная мера Лебега на T.

Пусть $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, где $0 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1,n}$, тогда обобщённые пространства Харди $H^{\vec{p}}(U^n)$ со смешанными нормами определим как пространства голоморфных в U^n функций, для которых

$$\sup_{0<r<1} \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left(\int_T |f(r\zeta)|^{p_1} dm_1(\zeta_1) \right)^{p_2/p_1} dm_1(\zeta_2) \right)^{p_3/p_2} \cdots dm_1(\zeta_n) \right)^{1/p_n} < \infty,$$

где $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n$. Соответствующие пространства n-гармонических в U^n функций обозначим через $h^{\vec{p}}(U^n)$. Изучение основных свойств обобщённых пространств Харди в поликруге со смешанной нормой впервые начато в работах [13–16].

Функция $u(z_1, ..., z_n)$, определённая на открытом множестве в C^n, называется n-гармонической, если u – гармоническая по каждому переменному в отдельности, то есть если $z_k = x_k + iy_k$, $k = \overline{1,n}$, то $u(z_1, ..., z_n)$ удовлетворяет n уравнениям $\Delta_k u = 0$, $k = \overline{1,n}$, где $\Delta_k = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_k^2}$.

Ядром Пуассона $P(z, \zeta)$ в поликруге, где $z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$, $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in T^n$, $\zeta_k = e^{i\varphi_k}$, $k = \overline{1,n}$, назовём произведение:

$$P(z,\zeta) = P_{r_1}(\theta_1 - \varphi_1) \cdots P_{r_n}(\theta_n - \varphi_n),$$

здесь $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$ – обычное ядро Пуассона для единичного круга.

Каждую функцию $f \in L^{\vec{p}}(T^n)$ можно n-гармонически продолжить в единичный поликруг следующим образом:

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P(z,\zeta) f(\zeta) dm_n(\zeta),\ z = (z_1,\ldots,z_n) \in U^n. \tag{1}$$

Возникает вопрос, как охарактеризовать те n-гармонические в U^n функции, которые допускают представление вида (1). В частном случае, когда

$p_1 = ... = p_n = p$, $1 < p < +\infty$, такая задача была решена У. Рудиным (см. [2; 17]). Обобщим эти результаты на случай $L^{\vec{p}}(T^n)$ -пространств.

При доказательстве основной теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

Теорема А (см. [3]). *Если V – окрестность нуля в сепарабельном топологическом векторном пространстве X, а $\{\Lambda_n\}$ – такая последовательность в сопряжённом пространстве X^*, что $|\Lambda_n x| \le 1$, ($x \in V$, $n = 1, 2, 3, ...$), то найдутся такая подпоследовательность $\{\Lambda_{n_i}\} \subset \{\Lambda_n\}$ и такой функционал $\Lambda \subset X^*$, что $\Lambda x = \lim_{i\to\infty} \Lambda_{n_i} x$ для всех $x \in X$.*

Теорема Б (см. [18]). *Пусть $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \le p_i < +\infty$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$. $J(f)$ является непрерывным линейным функционалом на нормированном пространстве $L^{\vec{p}}$ тогда и только тогда, когда существует единственная функция $g(x) \in L^{\vec{q}}$, такая что $J(f) = g(x)f(x)d\mu(x)$ и $\|J\| = \|g\|_{L^{\vec{q}}}$.*

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Теорема. *Пусть $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 < p_i < +\infty$, $i = \overline{1, n}$, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) n-гармоническая в U^n функция и допускает представление:

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} P(z, \zeta) f(\zeta) dm_n(\zeta), \text{ где } f \in L^{\vec{p}}(T^n),\ z = (z_1, ..., z_n) \in U^n;$$

2) $u \in h^{\vec{p}}(U^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in L^{\vec{p}}(T^n)$. Для данного r в силу свойства $P_r(\varphi + 2\pi) = P_r(\varphi)$ и 2π-периодичности функции f по каждой переменной можно записать:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\theta - s) P_r(s) ds, \tag{2}$$

где $re^{i\theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, ..., r_n e^{i\theta_n})$, $ds = ds_1 \dots ds_n$.

Для любого u справедливо равенство $\|u\|_{\vec{p}} = \sup_{\|g\|_{\vec{q}}=1} \left|\int_{T^n} u(\zeta) g(\zeta) |d\zeta|\right|$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, $|d\zeta| = |d\zeta_1| \dots |d\zeta_n|$, $\vec{q} = (q_1, \ldots q_n)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = \overline{1, n}$ (см. [5]). Подберём функцию $g \in L^{\vec{q}}(T^n)$ такую, что $\|g\|_{\vec{q}} = 1$ и

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\dots\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(r_1e^{i\theta_1},\dots,r_2e^{i\theta_n})\right|^{p_1}d\theta_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}d\theta_2\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots d\theta_n\right)^{\frac{1}{p_n}}=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi}u(r_1e^{i\theta_1},\dots,r_ne^{i\theta_n})g(e^{i\theta_1},\dots e^{i\theta_n})d\theta_1\dots d\theta_n.$$

Используя (2) и применяя теорему Фубини, будем иметь:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\dots\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(r_1e^{i\theta_1},\dots,r_2e^{i\theta_n})\right|^{p_1}d\theta_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}d\theta_2\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots d\theta_n\right)^{\frac{1}{p_n}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{Q^n}\left(\int_{Q^n}f(\theta-s)P_r(s)ds\right)g(\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{Q^n}\int_{Q^n}P_r(s)f(\theta-s)g(\theta)d\theta ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{Q^n}P_r(s)\left(\int_{Q^n}f(\theta-s)g(\theta)d\theta\right)ds.$$

Применяя к внутреннему интегралу обобщённое неравенство Гельдера и используя то, что $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P_r(s)ds=1,\ \|g\|_{\vec{q}}=1,$ получим:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\dots\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(r_1e^{i\theta_1},\dots,r_2e^{i\theta_n})\right|^{p_1}d\theta_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}d\theta_2\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\dots d\theta_n\right)^{\frac{1}{p_n}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P_r(s)\|f\|_{\vec{p}}\|g\|_{\vec{q}}\,ds=\|f\|_{\vec{p}}$$

Докажем обратное утверждение. Пусть u – n-гармоническая в U^n и такая, что

$$\sup_{r\in I^n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n})\right|^{p_1}d\theta_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}d\theta_2\right)^{\frac{p_3}{p_2}}\ldots d\theta_n\right)^{\frac{1}{p_n}}<+\infty.$$

Докажем, что существует функция $f\in L^p(T^n)$ такая, что

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P_r(\theta-t)f(t)dt.$$

Поскольку $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_n)$, $1<p_i<+\infty$, $i=\overline{1,n}$, то из результатов работы [18] следует, что $\left(L^{\vec{p}}\right)^*=L^{\vec{q}}$, $\vec{q}=(q_1,\ldots,q_n)$, $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1$, $i=\overline{1,n}$. Положим

$$u_m(\theta)=u\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)e^{i\theta}\right),\ \theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n). \tag{3}$$

По условию теоремы имеем: $\|u_m\|_{L^{\vec{p}}}\le c.$ Рассмотрим на пространствах $L^{\vec{q}}(T^n)$ последовательность линейных непрерывных функционалов $\Phi_m(g)=\int_{T^n}g(\zeta)u_m(\zeta)|d\zeta|$, где $\zeta_j=e^{i\theta_j}, j=\overline{1,n}$ и $g\in L^{\vec{q}}(T^n)$ в шаре радиуса 1, т.е. $\|g\|_{L^{\vec{q}}}\le 1.$ Тогда $|\Phi_m(G)|\le\|g\|_{L^{\vec{q}}}\|u_m\|_{L^{\vec{p}}}\le c\|g\|_{L^{\vec{q}}}\le c$, т.е. последовательность функционалов $\{\Phi_m\}$ ограничена по совокупности на шаре радиуса 1. По теореме А найдётся такая подпоследовательность $\{\Phi_{m_k}\}\subset\{\Phi_m\}$ и такой функционал $\Phi\in\left(L^{\vec{p}}\right)^*$, что для всех $g\in L^{\vec{q}}(T^n)$ $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_{m_k}(g)=\Phi(g)$, где Φ – линейный непрерывный функционал на $L^{\vec{q}}(T^n)$. Следовательно, так как $\left(L^{\vec{p}}\right)^*=L^{\vec{q}}$, то по теореме Б существует $f\in L^{\vec{p}}(T^n)$ такая, что $\Phi(g)=\int_{T^n}f(\zeta)g(\zeta)|d\zeta|$, где $\zeta_j=e^{i\theta_j}, j=\overline{1,n}.$ Для любого m функция $u_m(\theta)=u\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)e^{i\theta}\right)$ – n-гармоническая в $\left\{|z|<\frac{1}{1-\frac{1}{m}}\right\}$. Так что, если $r_i<1, i=\overline{1,n}$, то, используя (3), имеем:

$$u_{m_k}(re^{i\theta})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P_r(\theta-t)u_{m_k}(e^{it})dt=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P_r(\theta-t)u_{m_k}(t)dt.$$

Так как $g(t)=P_r(\theta)\in L^{\vec{q}}$, тогда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P_r(\theta-t)u_{m_k}(t)dt=\Phi(g)=\int_{T^n}g(t)f(t)dt=\int_{T^n}P_r(\theta)P_r(\theta)f(t)dt.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}2\pi\, u_{m_k}(re^{i\theta})=2\pi\, u(re^{i\theta})$, то получаем:

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}P_r(\theta-t)f(t)dt.$$

Теорема доказана.

Отметим, что аналогичные результаты можно установить и в других областях n-мерного комплексного пространства C^n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О.И., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974. 160 с.
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 475 с.
4. Андрейчик М.Н., Коптенок Е.В., Орлова А.А. Интегральные операторы в весовых пространствах измеримых функций // Молодой учёный. 2013. № 11. С. 1–5.
5. Смирнова И.Ю., Карапетянц А.Н. О связи весовых пространств Бергмана со смешанной нормой на верхней полуплоскости и единичном диске с пространствами Харди // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 4. С. 19–21.
6. Аветисян К., Гапоян Н. Операторы типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой в шаре из C^n // Известия Национальной Академии наук Республики Армения. Математика. 2016. Т 51. № 5. С. 3–12.
7. Махина Н.М. О сопряжённых пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 2. С. 420–423.
8. Petrosyan A.I., Avetisyan K.L. Weighted spaces of functions harmonic in the unit ball // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences 2017. no. 51(1). pp. 3–7.
9. Petrosyan A.I., Mkrtchyan E.S. Duality in Spaces of Functions Harmonic in the Unit Ball // Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2013. no. 3. pp. 29–36.
10. Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Теплицевы операторы и вопросы деления в некоторых классах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой // Вестник Брянского государственного университета. 2015. № 3. С. 341–345.
11. Шамоян Ф.А. Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. Брянск: РИО БГУ, 2014. 250 с.
12. Аветисян К, Тоноян Е. Об операторе дробного интегродифференцирования в R^n // Известия Национальной академии наук Армении. Математика. 2015. Т 50. № 5. С. 3–16.

13. Часова Н.А., Шамоян Ф.А. Диагональное отображение в обобщённых пространствах Харди в поликруге // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2003. Т. 303. № 31. С. 218–222.
14. Часова Н.А., Шамоян Ф.А. Диагональные отображения в пространствах Харди со смешанной нормой // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань. 2003. Т. 19. С. 226–227.
15. Шамоян Ф.А., Часова Н.А. Описание линейных непрерывных функционалов в пространствах Харди со смешанными нормами в поликруге // Современные методы теории функций и смежные проблемы: тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж. 2001. С. 285–286.
16. Chasova N.A., Shamoyan F.A. The diagonal mapping in generalized hardy spaces in the polydisk // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2005. Vol. 129. Iss. 4. P. 4049–4052.
17. Rudin W., Stout E.L. Boundary properties of functions of several complex variable // Journal of Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 14. P. 991–1006.
18. Benedek A., Panzone R., The spaces L^p with mixed norm // Duke Mathematical Journal. 1961. Vol. 28. № 3. P. 301–324.

REFERENCES

1. Besov O.I., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. *Integral'nye predstavleniya funktsii i teoremy vlozheniya* [Integral representations of functions and embedding theorems]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 480 p.
2. Rudin U. *Teoriya funktsii v polikruge* [The theory of functions in policrome]. Moscow, Mir Publ., 1974. 160 p.
3. Rudin U. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow, Mir Publ., 1975. 475 p.
4. Andreichik M.N., Koptenok E.V., Orlova A.A. [Integral operators in weighted spaces of measurable functions]. In: *Molodoi uchenyi* [Young Scientist], 2013, no. 11, pp. 1–5.
5. Smirnov I.Yu, Karapetyants A.N. [About the relationship weight Bergman spaces with mixed norm in the upper half plane and unit disk hardy spaces]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki* [Scientific-educational and applied journal. University News North-Caucasian Region. Natural Sciences Series], 2012, no. 4, pp. 19–21.
6. Avetisyan K., Gapoyan N. [Operators of Bergman type on spaces with mixed norm in a ball from C^n]. In: *Izvestiya Natsional'noi Akademii nauk Respubliki Armeniya. Matematika* [Proceedings of NAS RA. Mathematics], 2016, vol. 51, no. 5, pp. 3–12.
7. Makhina N.M. [Connected spaces to some weighted spaces of analytic functions]. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Herald], 2015, no. 2. pp. 420–423.
8. Petrosyan A.I., Avetisyan K.L. [Weighted spaces of functions harmonic in the unit ball]. In: *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, no. 51(1), pp. 3–7.
9. Petrosyan A.I., Mkrtchyan E.S. [Duality in Spaces of Functions Harmonic in the Unit Ball]. In: *Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences*, 2013, no. 3, pp. 29–36.

10. Antonenkova O.E., Chasova N.A. [Teplitzky operators and division questions in some classes in policrome holomorphic functions with mixed norm]. In: *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Herald], 2015, no. 3, pp. 341–345.
11. Shamoyan F.A. *Vesovye prostranstva analiticheskikh funktsii so smeshannoi normoi* [The weight space of analytic functions with mixed norm], Bryansk, RIO BGU Publ., 2014. 250 p.
12. Avetisyan K., Tonoyan E. [Operator of fractional integro-differentiation in R^n]/ In: *Izvestiya Natsional'noi Akademii nauk Respubliki Armeniya. Matematika* [Proceedings of NAS RA. Mathematics], 2015, vol. 50, no. 5, pp. 3–16.
13. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [Diagonal mapping in generalized hardy spaces in policrome]. In: *Zapiski nauchnykh seminarov Sankt-Peterburgskogo otdeleniya matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova RAN* [Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI], 2003, vol. 303, no. 31, pp. 218–222.
14. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [Diagonal display in Hardy's spaces with a mixed norm]. In: *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N.I. Lobachevskogo*. [Works of mathematical center named after N.I. Lobachevsky], Kazan, 2003, vol. 19, pp. 226–227.
15. Shamoyan F.A., Chasova N.A. [Description of continuous linear functionals in Hardy's spaces with mixed norms in policrome]. In: *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy: tezisy dokladov Voronezhskoi zimnei matematicheskoi shkoly* [Modern methods of the theory of functions and related problems: abstracts of the Voronezh Winter Mathematical School]. Voronezh, 2001. pp. 285–286.
16. Chasova N.A., Shamoyan F.A. [The diagonal mapping in generalized hardy spaces in the polydisk].In: *Journal of Mathematical Sciences*, New York, 2005, vol. 129, iss. 4, pp. 4049–4052.
17. Rudin W., Stout E.L. [Boundary properties of functions of several complex variable]. In: *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 14, pp. 991–1006.
18. Benedek A., Panzone R. [The spaces with mixed norm]. In: *Duke Mathematical Journal*, 1961, vol. 28, no. 3, pp. 301–324.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Антоненкова Ольга Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета;
e-mail: anto-olga@yandex.ru;

Часова Наталья Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета;
e-mail: chasnat@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga E. Antonenkova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Mathematics, Bryansk State Technological University of Engineering;
e-mail: anto-olga@yandex.ru;

Nataliya A. Chasova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Mathematics, Bryansk State Technological University of Engineering;
e-mail: chasnat@bk.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Антоненкова О.Е., Часова Н.А. Об интегральных операторах с ядрами Пуассона в пространствах типа Харди в поликруге со смешанной нормой // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 14–23.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23

FOR CITATION

Antonenkova O.E., Chasova N.A. About integral operators with Poisson kernels in Hardy-type spaces in polydisc with mixed norm. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 14–23.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-14-23