

УДК 530,1:514.8

DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-55-61

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ¹

Алиев И.Н., Фомин И.В., Самедова З.А.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация. В работе рассматривается задача распространения света вблизи гравитирующих сферически-симметричных тел на основе оптико-механической аналогии и линейной связи между импульсом и энергией кванта в рамках метрического подхода к оптическим явлениям. Рассматриваемый подход подразумевает эффективное описание гравитационного поля посредством некоторой оптически неоднородной изотропной среды. Из уравнения эйконала и решения уравнений геодезических линий, которые приводят к одинаковому результату в случае метрики Шварцшильда, определена связь между характеристиками массивных астрофизических объектов и энергией кванта в их гравитационном поле.

Ключевые слова: гравитационное поле, оптико-механическая аналогия, импульс и энергия кванта, метрика Шварцшильда.

OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY OF THE GRAVITATIONAL FIELD

I. Aliev, I. Fomin, Z. Samedova

*Bauman Moscow State Technical University
5/1, ul. 2nd Baumanskaya, Moscow 105005, Russian Federation*

Abstract. The paper deals with the problem of light propagation near the gravitating spherically symmetric bodies on the basis of the optical-mechanical analogy and the linear connection between the momentum and the energy of quantum within the metric approach to optical phenomena. This approach implies an effective description of the gravitational field by means of some optically inhomogeneous isotropic medium. From the solutions of eikonal equation and the geodesic lines equations, that lead to the same result in the case of the Schwarzschild metric, the relationship between the characteristics of massive astrophysical objects and the energy of quant in their gravitational field is defined.

Key words: gravitational field, optical-mechanical analogy, photon momentum and energy, Schwarzschild metric

Метрический подход к оптическим явлениям

Метрический подход в рамках оптико-механической аналогии часто используется при анализе оптических явлений в различных средах, в частности, в метаматериалах с анизотропным показателем преломления [1; 2].

¹ Исследование выполнено в рамках грантов РФФИ № 16-02-00488 А и № 16-08-00618 А. / The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant Nos. 16-02-00488 A and 16-08-00618 A).

В случае метрического подхода к вопросам распространения света в гравитационном поле само гравитационное поле рассматривается как некоторая оптическая среда с показателем преломления отличным от единицы [2; 3].

Основной целью настоящей работы является нахождение связи между характеристиками массивных астрофизических объектов и энергией кванта в их гравитационном поле на основе метрического подхода к оптическим явлениям и оптико-механической аналогии.

Для иллюстрации данного подхода рассмотрим изотропную сферически-симметричную метрику вида:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где скорость света в вакууме и гравитационную постоянную принимаем за единицу ($c = 1, G = 1$).

Траектория частицы в гравитационном поле определяется уравнением геодезических линий [4]:

$$\frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0, \quad (2)$$

где $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ и λ – произвольный аффинный параметр.

В работе [5] показано, что уравнения геодезических линий кванта (уравнения нулевых геодезических линий $ds = 0$) приводятся к уравнению эйконала:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(A(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right) = \text{grad}(A(\vec{r})) \quad (3)$$

для метрики (1) в случае $A = 1/B$, где показатель преломления $n(\vec{r}) = A(\vec{r})$. Для стандартного вида уравнения эйконала аффинный параметр $\lambda = l$, где l – длина дуги траектории кванта.

Метрика Шварцшильда, соответствующая гравитационному полю звёзд, записывается следующим образом:

$$ds^2 = - \left(1 - 2 \frac{M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - 2 \frac{M}{r} \right)} + r^2 d\Omega^2, \quad (4)$$

с эффективным показателем преломления:

$$n(\vec{r}) = A(\vec{r}) = \left(1 - 2 \frac{M}{r} \right)^{-1}.$$

Угол отклонения света на траектории с прицельным параметром b равен [5; 6]:

$$\alpha = 2(b + 2GM) \int_b^\infty \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2 - (b + 2GM)^2}} - \pi = 4 \frac{M}{b} + O \left(\left(\frac{2M}{b} \right)^2 \right), \quad (5)$$

что соответствует углу отклонения света в общей теории относительности (ОТО).

Более общий случай, соответствующий оптическим эффектам в гравитационном поле вращающихся звезд, с учётом атмосферы, был рассмотрен в работах [3; 7; 8].

Оптико-механическая аналогия

Оптико-механическая аналогия, а именно описание оптически неоднородных сред эффективным потенциальным силовым полем, часто используется при анализе траекторий квантов [1–3; 9].

Уравнение эйконала (3) определяет взаимосвязь между оптически неоднородной (но изотропной) средой и гравитационным полем или, в терминологии ОТО, искривлением пространства-времени вблизи гравитирующих объектов, которое соответствует определённому классу метрик (1) с условием $A = 1/B$.

В работе [10] уравнение эйконала (3) было получено в рамках оптико-механической аналогии со специфической линейной связью между импульсом и энергией кванта

$$E = p + U(\vec{r}). \quad (6)$$

Определяя показатель преломления соотношением:

$$n(\vec{r}) = A(\vec{r}) = \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1} = \beta(E - U(\vec{r})), \quad (7)$$

где β – некоторый размерный коэффициент, получим тот же угол отклонения кванта (5).

Таким образом, полученное нами уравнение (7) связывает характеристики звезды с энергией кванта в её гравитационном поле.

Поскольку соотношение (7) имеет нетривиальный характер, для его проверки рассмотрим в качестве примера задачу отклонения траектории кванта от прямолинейного движения для связи (6) с общерелятивистских позиций, обобщая результат на случай параметрического постньютоновского формализма [11].

Параметрический постньютоновский формализм и траектория кванта

Вначале запишем компоненту метрики (1) в приближении слабого поля

$$\frac{M}{r} \ll 1, \text{ то есть } A(\vec{r}) = \left(1 - 2\frac{M}{r}\right)^{-1} \approx \left(1 + 2\frac{M}{r}\right).$$

Далее, рассмотрим следующую метрику в указанном приближении

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{M}{r}\right)dt^2 + \left(1 + 2\gamma\frac{M}{r}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right]. \quad (8)$$

Параметр γ определяет отклонение теории гравитации от ОТО ($\gamma = 1$). Результаты измерений дают следующее ограничение на значение параметра $\gamma = 0,9998 \pm 0,0003$ [12], что позволяет рассматривать модификации ОТО.

На траектории кванта в гравитационном поле в экваториальной плоскости астрофизического объекта получим $x^1 = b$, $x^2 = 0$ и $x^3 = t = W\lambda$, где $W = E - U(\vec{r})$ – энергия кванта и λ – некоторый аффинный параметр.

Четырех-импульс кванта запишем следующим образом $p^\mu = (W, 0, 0, W)$.

Импульс кванта вдоль траектории $x^1 = b$, $x^2 = 0$ в гравитационном поле звезды определяется как [13]:

$$p^1 = p_i^1 - \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^1_{\mu\nu} x^\alpha (\lambda) p^\mu p^\nu d\lambda,$$

где p_i^1 – исходный импульс кванта, который для расчёта угла отклонения мы положим равным нулю. Таким образом, запишем импульс кванта в следующем виде:

$$p^1 = - \int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma^1_{00} + 2\Gamma^1_{03} + \Gamma^1_{33}) W^2 d\lambda.$$

Также, из условия $dx^3/d\lambda = W$, запишем:

$$p^1 = -W \int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma^1_{00} + 2\Gamma^1_{03} + \Gamma^1_{33}) dx^3.$$

Теперь вычислим символы Кристоффеля

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1} + 2g_{01,0}) = -M \partial_1 \left(\frac{1}{r} \right) = M \frac{x^1}{r^3},$$

$$\Gamma^1_{03} = 0,$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{33,1} + 2g_{31,3}) = -\gamma M \partial_1 \left(\frac{1}{r} \right) = \gamma M \frac{x^1}{r^3}.$$

Таким образом, получим:

$$p^1 = -(1 + \gamma) MW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^1}{r^3} dx^3,$$

где интеграл рассматривается вдоль траектории $x^1 = b$, $x^2 = 0$.

Угол отклонения кванта в гравитационном поле звезды:

$$\alpha = -\frac{p^1}{W} = (1 + \gamma) M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^1}{r^3} dx^3 = (1 + \gamma) Mb \int_{-\infty}^{\infty} (b^2 + (x^3)^2)^{-3/2} dx^3;$$

знак минус выбран для случая отклонения траектории кванта к гравитирующему объекту.

Для вычисления интеграла запишем преобразование $x^3 = btg\theta$, в результате получим:

$$\alpha = (1 + \gamma) M b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^{-2} \cos \theta d\theta = 2(1 + \gamma) \frac{M}{b}.$$

Траектория кванта в гравитационном поле астрофизического объекта изображена на рис. 1.

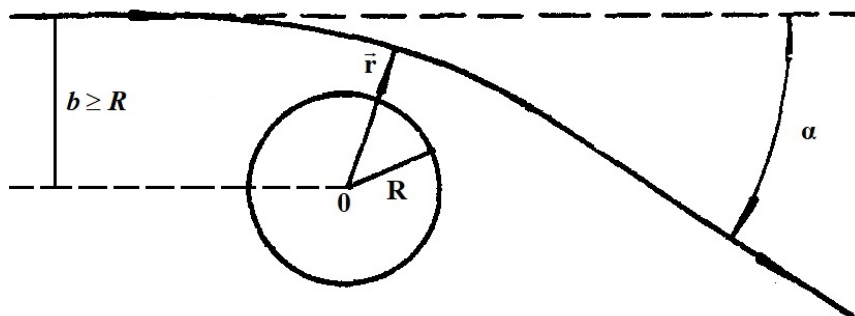


Рис. 1. Траектория кванта в гравитационном поле статической звезды (без вращения) или с окрестностью, геометрия которой определяется метрикой Шварцшильда (4) или метрикой (8), где R – радиус звезды, b – прицельный параметр, \vec{r} – радиус-вектор, α – угол отклонения.

Таким образом, для случая ОТО получим предыдущий результат $\alpha = 4M/b$, что подтверждает справедливость соотношения (7), которое является основным результатом данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leonhardt U., Philbin T.G. Transformation optics and the geometry of light // Progress in Optics. 2009. vol. 53. pp. 69–152.
2. Fernandez-Nunez I., Bulashenko O. Anisotropic metamaterial as an analogue of a black hole // Physics Letters. 2015. Vol. A 380. pp. 1–8.
3. Фомин И.В. Оптические эффекты в атмосфере астрофизических объектов. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2016. № 5. С. 84–95.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит. 2006. 534 с.
5. Wu Xue-jun, XU Chong-ming. Null Geodesic Equation Equivalent to the Geometric Optics Equation // Communications in Theoretical Physics. 1988. vol. 9. no. 1, pp. 119–125.
6. Ye Xing-Hao, Lin Qiang. A Simple Optical Analysis of Gravitational Lensing // Journal of Modern Optics. 2008. vol. 55. iss. 7. pp. 1119–1126.
7. Gladyshev V.O., Tereshin A.A., Fomin I.V., Chelnokov M.B., Kauts V.L., Gladysheva T.M. and Bazleva D.D. Electromagnetic waves propagation nearby rotating gravitating astrophysical object with atmosphere // Gravitation, Astrophysics and Cosmology. 2016. pp. 371–372. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-5-216
8. Гладышев В.О., Кауц В.Л., Тиунов П.С., Челноков М.Б. О влиянии вращения атмосфер Земли и Солнца на распространение электромагнитного излучения // Инженерный журнал: наука и инновации. Электронное научно-техническое издание. 2012. Вып. 5(5). URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/216.html>. (дата обращения: 28.11.2017)

9. Evans J., Nandi K.K. and Islam A. The optical-mechanical analogy in general relativity: exact Newtonian forms for the equations of motion of particles and photons // *General Relativity and Gravitation*. 1996. Vol. 28. iss. 4. pp. 413–439.
10. Алиев И.Н., Самедова З.А. Оптико-механическая аналогия и траектория кванта // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2015. № 1. С. 32–36.
11. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоатомиздат. 1985. 296 с.
12. Fomalont E., Kopeikin S., Lanyi G. and Benson J. Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA // *The Astrophysical Journal*. 2009. vol. 699. no. 2. pp. 1395–1402.
13. Синг Дж.Л. Общая теория относительности. М.: Иностранная Литература, 1963. 432 с.

REFERENCES

1. Leonhardt U., Philbin T.G. [Transformation optics and the geometry of light]. In: *Progress in Optics*, 2009, vol. 53, pp. 69–152.
2. Fernandez-Nunez I., Bulashenko O. [Anisotropic metamaterial as an analogue of a black hole]. In: *Physics Letters*, 2015, vol. A 380, pp. 1–8.
3. Fomin I.V. [Optical effects in the atmosphere of astrophysical objects]. In: *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences], 2016, no. 5, pp. 84–95.
4. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya polya* [Field theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 534 p.
5. WU Xue-jun, XU Chong-ming. [Null Geodesic Equation Equivalent to the Geometric Optics Equation]. In: *Communications in Theoretical Physics*, 1988, vol. 9, no. 1, pp. 119–125.
6. Ye Xing-Hao, Lin Qiang. [A Simple Optical Analysis of Gravitational Lensing]. In: *Journal of Modern Optics*, 2008, vol. 55, iss. 7, pp. 1119–1126.
7. Gladyshev V.O., Tereshin A.A., Fomin I.V., Chelnokov M.B., Kauts V.L., Gladysheva T.M. and Bazleva D.D. [Electromagnetic waves propagation nearby rotating gravitating astrophysical object with atmosphere]. In: *Gravitation, Astrophysics and Cosmology*, 2016, pp. 371–372. DOI: 10.18698/2308-6033-2012.
8. Gladyshev V.O., Kauts V.L., Tiunov P.S., Chelnokov M.B. [On the influence of rotation of the atmospheres of the Earth and Sun on the propagation of electromagnetic radiation]. In: *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie*. [Engineering Journal: Science and Innovations. Electronic science and engineering publication], 2012, vol. 5(5). Available at: URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/216.html>. (accessed: 28.11.2017)
9. Evans J., Nandi K.K. and Islam A. [The optical-mechanical analogy in general relativity: exact Newtonian forms for the equations of motion of particles and photons]. In: *General Relativity and Gravitation*, 1996, vol. 28, iss. 4, pp. 413–439.
10. Aliev I.N., Samedova Z.A. [Optical-mechanical analogy and quantum trajectory]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no.1, pp. 32–36.
11. Уилл К. *Teoriya i eksperiment v gravitatsionnoi fizike* [Theory and experiment in gravitational physics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985. 296 p.
12. Fomalont E., Kopeikin S., Lanyi G. and Benson J. [Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA]. In: *The Astrophysical Journal*, 2009, vol. 699, no. 2, pp. 1395–1402.

13. Sing John.L. *Obshchaya teoriya otноситel'nosti* [The General theory of relativity]. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1963. 432 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, профессор академии военных наук, академик Российской Академии естественных наук; e-mail: alievprof@yandex.ru;

Фомин Игорь Владимирович – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана; e-mail: ingvor@inbox.ru;

Самедова Зарифа Алышан кызы – аспирант кафедры физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана; e-mail: samezara@bk.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ismail N. Aliev – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University, professor at the Academy of Military Sciences, Academician of the Russian Academy of Natural Sciences; e-mail: alievprof@yandex.ru;

Igor V. Fomin – PhD in Physical and Mathematical Sciences; associate professor at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University; e-mail: ingvor@inbox.ru;

Zarifa A. Samedova – postgraduate student at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University; e-mail: samezara@bk.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алиев И.Н., Фомин И.В., Самедова З.А. Оптико-механическая аналогия гравитационного поля // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 4. С. 55–61.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-55-61

FOR CITATION

Aliev I.N., Fomin I.V., Samedova Z.A. Optical-mechanical analogy of the gravitational field. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 55–61.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-55-61