# РАЗДЕЛ III. ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 378
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ В РАМКАХ МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ДИСЦИПЛИН В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

***Власова Е.А., Меженная Н.М., Попов В.С., Пугачев О.В.***
*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*
*105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Российская Федерация*

***Аннотация.*** Рассмотрен опыт преподавания дисциплин вероятностного цикла, включающих курсы «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Теория случайных процессов», студентам технического университета с использованием интерактивных компьютерных систем (или математических пакетов (МП)). Обозначены цели и задачи курсов в рамках инженерно-технического образования. Представлены методические проблемы преподавания вероятностных дисциплин, основные идеи их разрешения, методы и приёмы обучения. Особая роль отведена вопросам использования информационных технологий, методическим аспектам их применения при решении конкретных прикладных задач.

***Ключевые слова:*** теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, случайные величины, выборки, проверка гипотез, методические проблемы преподавания, информационные технологии, интерактивные компьютерные системы.

## THE USE OF MATHEMATICAL PACKAGES IN THE FRAMEWORK OF METHODOLOGICAL SUPPORT OF PROBABILISTIC DISCIPLINES IN A TECHNICAL UNIVERSITY

***E. Vlasova, N Mezhennaya, V. Popov, O. Pugachev***
*Bauman Moscow State Technical University*
*Vtoraya Baumanskaya ul. 5, 105005 Moscow, Russian Federation*

***Abstract.*** We consider the experience of teaching probability cycle, including the courses “Probability Theory”, “Mathematical Statistics” and “Theory of Stochastic Processes”, to students of technical universities with the use of interactive computer systems [or mathematical packages (MPs)]. The goals and objectives of courses within engineering education are described. Methodical problems of teaching probabilistic disciplines, the basic ideas of their resolution, methods and techniques of teaching are considered, as well as the role of using information technologies, methodological aspects of their use in the solution of specific applied tasks.

***Key words:*** probability theory, mathematical statistics, theory of random processes, random variables, sampling, hypothesis testing, methodological problems of teaching, information technology, interactive computer system.

## Введение

Особое место среди дисциплин математического цикла, вошедших в структуру образовательных стандартов нового поколения, занимают теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, а также ряд дополнительных дисциплин, изучаемых студентами на старших курсах бакалавриата или в магистратуре. Вероятностные дисциплины тесно связаны с практикой, имеют большое прикладное значение, поскольку изучают математические модели статистических закономерностей природы. Вероятностные и статистические методы широко используются в технических, технологических, экономических науках. Это связано с развитием массовых процессов в производстве и экономике, с развитием экспериментальной техники и необходимостью проведения более тонкого анализа результатов эксперимента. В настоящее время во всех инженерно-технических, технологических, экономических вузах читается курс теории вероятностей и математической статистики. Даже если не всем инженерам в своей производственной деятельности придётся применять вероятностно-статистические методы, то, во всяком случае, им необходимо познакомиться с основными понятиями и идеями, чтобы понимать соответствующие выводы.

Остановимся на особенностях преподавания и методическом обеспечении дисциплин вероятностного цикла, учитывая опыт их изложения в МГТУ имени Н.Э. Баумана [1–6].

## Цели и задачи дисциплины

Дисциплины «Теория вероятностей», «Математическая статистика» и «Теория случайных процессов» входят в вариативную часть математического и естественнонаучного цикла учебного плана студентов.

Основными целями изучения дисциплин вероятностного цикла являются: приобретение знаний основ теории вероятностей и практических навыков по применению её методов для решения типовых и прикладных задач; формирование у студента знаний основных идей и методов математической статистики, играющих важнейшую роль в разработке и анализе соответствующих математических моделей для широкого круга процессов и явлений окружающего мира; приобретение знаний по теории случайных процессов и практических навыков применения её методов для изучения и моделирования случайных явлений в динамике их развития; научить студентов правильно выбирать вероятностную модель явления и проводить необходимые эксперименты.

Главные задачи освоения дисциплин состоят в том, чтобы:

– ознакомить студентов с теорией множеств, способами вычисления вероятностей случайных событий, понятиями дискретной и непрерывной случайной величины (в том числе в многомерном пространстве), способами качественного и количественного описания и анализа законов распределения, а также их числовых характеристик, основами применения асимптотических методов теории вероятностей;

– ознакомить студентов с основами выборочной теории (способами сбора и представления данных, методами планирования эксперимента, оцениванием характеристик законов распределения по выборочным данным); теорией точечного и интервального оценивания параметров распределения; проверкой статистических гипотез; основами регрессионного анализа;

– ознакомить студентов с вероятностными характеристиками случайного процесса, связанными с ними числовыми характеристиками, основными типами случайных процессов (с независимыми и некоррелированными приращениями, стационарных в узком и широком смысле, марковских, нормальных и др.).

Важным представляется развитие у студента знаний и умений, основанных на использовании описанных методов при решении задач в смежных дисциплинах естественнонаучного и профессионального циклов образовательной программы, способности к математическому исследованию прикладных вопросов, умению перевести практическую задачу на математический язык.

Для успешного освоения вероятностных дисциплин требуется интеграция знаний, полученных при изучении дисциплин математического цикла (математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, интегральных преобразований, уравнений математической физики), а также навыки по применению интерактивных математических пакетов.

## Интерактивные компьютерные системы

Решение инженерных задач с применением вероятностно-статистических методов обычно требует большого объёма вычислений. Использование в учебном процессе интерактивных компьютерных систем (или математических пакетов (МП)) позволяет проводить процедуры вычисления достаточно быстро, эффективно и способствует формированию у студентов глубоких и прочных знаний, умений и навыков. Владение математическими пакетами позволяет будущему инженеру решать многие вычислительные задачи с высокой точностью и за значительно меньшее время, чем то, которое необходимо для написания соответствующих программ на языках программирования.

Основные пакеты прикладных математических программ, такие как Maple, Mathematica, MatLab, MathCAD и др., широко используются для аналитических расчётов, статистического моделирования, решения различных задач вероятностно-статистического направления. Эти пакеты содержат встроенную матричную и комплексную арифметику, поддерживают работу с алгебраическими полиномами, дают возможность проводить численное интегрирование дифференциальных и разностных уравнений, строить разнообразные виды графиков функций, трёхмерных поверхностей, содержат встроенный аппарат для моделирования и анализа случайных величин. Такие МП, используя общепринятый способ изображения математических объектов и удобную операционную среду, позволяют формулировать проблемы и получать решения в обычной математической форме, не прибегая к рутинному программированию. Возможности и простота интерфейса таких математических пакетов сделали их весьма популярными и распространёнными.

Применение МП в учебном процессе [7–9] позволило уделять больше времени методологии решения математической задачи (обсуждать условия задачи, возможные методы её решения, полученные результаты), переложив выполнение рутинных операций на вычислительную среду. Кроме того, возможно решение таких задач, которые аналитическими методами, доступными студентам, решить не представляется возможным.

Использование МП позволяет создать для некоторых типов задач шаблоны решения, позволяющие, варьируя исходными данными задачи, получать полные решения с изменением промежуточных и конечных результатов в виде аналитических зависимостей или графических изображений.

Приведём примеры использования математических пакетов MathCAD [7], MatLab [8] и Mathematica [9] при решении задач вероятностного и статистического характера. Задачи такого типа можно разбирать на семинарских занятиях, предлагать на лабораторных работах, а также включать в типовые домашние задания, входящие в промежуточный контроль по дисциплине.

Рассмотрим пример задания по модулю «Случайные величины. Предельные теоремы», который является составной частью дисциплины «Теория вероятностей».

**Пример 1.** Случайная величина $\xi$ имеет плотность распределения вероятностей $f(x) = Ax^2(1 - x)$, $0 \le x \le 1$. Требуется:

а) найти константу $A$ и функцию распределения;

б) построить графики плотности и функции распределения;

в) найти моду, медиану, математическое ожидание и дисперсию;

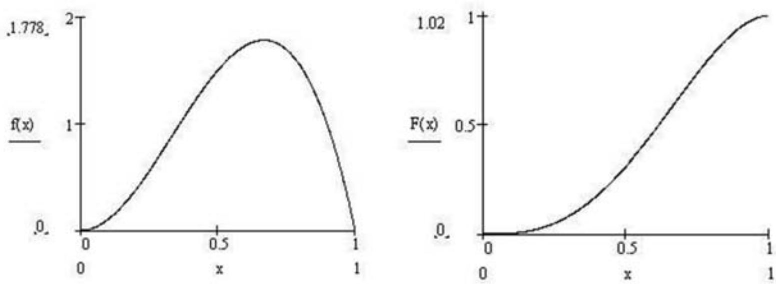
г) найти плотность $g(x)$ распределения суммы двух независимых случайных величин с плотностью $f(x)$, построить график $g(x)$;

д) пользуясь центральной предельной теоремой, оценить интервал, в котором будет находиться среднее арифметическое 100 значений случайной величины $\xi$ с вероятностью не менее 0,95;

е) смоделировать 20 выборок объёма 100 из закона распределения случайной величины $\xi$ и по ним оценить интервал из пункта д).

***Решение.*** Первые пять пунктов удобно выполнить при помощи математического пакета MathCAD.

Начнём с пункта а). Проинтегрировав функцию $f(x) = x^2(1 - x)$ по отрезку [0,1] в режиме символьных вычислений, получаем ответ 1/12. Следовательно, искомая константа $A = 12$. Далее, находим функцию распределения $F(x)$ при $0 \le x \le 1$, символьно вычислив интеграл




*а* *б*

*Рис. 1.* Графики плотности (*а*) и функции распределения (*б*).

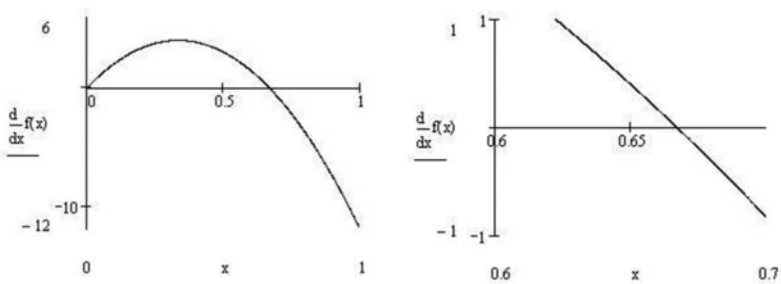



*Рис. 2.* Вычисление моды.

$$f(x) := 12t^2 \cdot (1-t) \;\; F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \;\; F(x) \to 4x^3 - 3x^4$$

Очевидно, что $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = 1$ при $x > 1$.

В пункте б) построим графики плотности и функции распределения на отрезке [0,1] (рис. 1).

Пункт в). Чтобы найти моду, т.е. точку максимума $f(x)$, продифференцируем её и найдём точку пересечения графика $f'(x)$ с осью O$x$:

$$\frac{d}{dx} f(x) \to 2x - 3x^2.$$

Как нетрудно видеть, мода равна 2/3. По графику плотности мы выясняем, что max $F(x) = f(2/3) = 16/9$, т.е. фигура площади 1, ограниченная графиком плотности, вписана в прямоугольник $\Pi = [0,1] \times [0,16/9]$ площади 16/9. (рис. 2). Это обстоятельство пригодится нам в пункте е).

Чтобы найти медиану, нужно решить уравнение $F(x) = 0{,}5$. Сделаем это при помощи команды **solve**.

$$4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^4 - 0{,}5 \;\textbf{solve}, x \to \begin{pmatrix} -0{,}26421069356097389807 - 0{,}38430423124046170357 \cdot 1i \\ -0{,}26421069356097389807 + 0{,}38430423124046170357 \cdot 1i \\ 0{,}61427243186761045172 \\ 1{,}2474822885876706777 \end{pmatrix}$$

Нас интересует только корень, принадлежащий отрезку [0,1]. Таким образом, медиана примерно равна 0,614.

Вычислим математическое ожидание **E**, дисперсию **D** и среднеквадратичное отклонение σ среднего выборки объёма $n = 100$.

$$E := \int_0^1 x \cdot f(x)dx \quad E \to \frac{3}{5} \quad D := \int_0^1 x^2 \cdot f(x)dx = E^2 \quad D \to \frac{1}{25} \quad \sigma := \sqrt{\frac{D}{n}} \quad \sigma = 0{,}02$$

Пункт г). Найдём плотность $g(x)$ распределения суммы двух независимых случайных величин с плотностью $f(x)$ и построим график $g(x)$.

Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин вычисляется при помощи свертки. Но, поскольку функция $f(x)$ задана по-разному на трёх интервалах, для символьного вычисления $g(x)$ придётся применить разные формулы на разных интервалах значений $x$.

При $x < 0$ и $x > 2$, очевидно, $g(x) = 0$.

На отрезках [0,1] и [1,2] вычислим $g(x)$ по двум разным формулам, которые получены из формулы свертки с учётом того, что $f(x) = 0$ вне отрезка [0, 1]. Полученные функции обозначим, соответственно, $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

$$g1(x) := \int_0^x f(t)\cdot f(x-t)dt \quad g2(x) := \int_{x-1}^1 f(t)\cdot f(x-t)dt$$

$$g1(x) \to \frac{36}{35}\cdot x^7 - \frac{24}{5}\cdot x^6 + \frac{24}{5}\cdot x^5$$

$$g2(x) \to \frac{576}{35} - \frac{288}{5}\cdot x + \frac{336}{5}\cdot x^2 - 24\cdot x^3 - \frac{36}{35}\cdot x^7 + \frac{24}{5}\cdot x^6 - \frac{24}{5}\cdot x^5$$

Затем «склеим» из них функцию $g(x)$ на отрезке [0, 2] и построим её график (рис. 3).

Пункт д). По центральной предельной теореме оценим интервал, в котором с вероятностью 0,95 будет находиться среднее арифметическое 100 значений слу-

$$g(x) := \begin{cases} g1(x) & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ g2(x) & \text{if } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

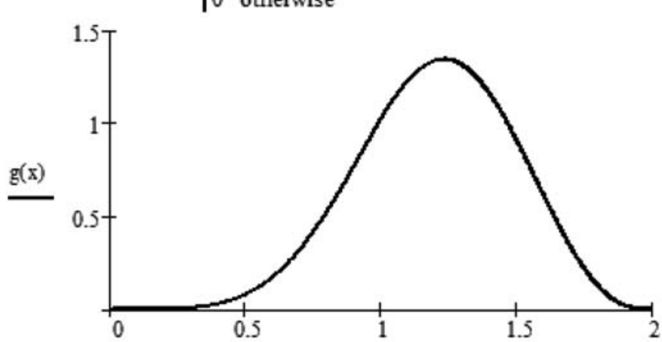



*Рис. 3.* График функции $g(x)$.

чайной величины ξ. Сначала найдём такое $r > 0$, что стандартная нормальная случайная величина с вероятностью 0,95 попадёт в отрезок $[-r, r]$:

$$r := 1{,}96 \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^r e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0{,}475.$$

После этого концы искомого интервала находим по следующим формулам:

$$E - r \cdot \sigma = 0{,}561 \quad E + r \cdot \sigma = 0{,}639$$

Пункт е) удобнее выполнить при помощи MatLab, поскольку в нём имеются удобные средства создания матриц из случайных чисел и работы с этими матрицами. Возникает трудность с генерацией случайной величины с заданным распределением, поскольку стандартный прием, использующий обратную функцию $F^{-1}(x)$, здесь неприменим: пришлось бы решать уравнение 4-й степени. Воспользуемся другим методом. Пусть случайные точки $(x,y)$ равномерно распределены в прямоугольнике $\Pi = [0,1] \times [0,16/9]$; будем оставлять только те точки, у которых $y < f(x)$ (т.е. лежащие под графиком плотности) и брать их $x$-координаты в качестве нужной нам выборки.

```
(*******************************************)
(*Построение выборки для пункта е*)
  m=20;       %количество выборок
  n=100;      %объем выборки
  X=zeros(m,n); %задаем размер матрицы X
  N=220;       %объем исходной выборки с учетом выбраковки
             %(значение N находится экспериментально,
             %чтобы все x получились объема не меньше n)
  for i=1:m    %Создание i-ой выборки x:
   x=rand(1,N);y=rand(1,N)*16/9;
   %точки (x,y) равномерно распределены в П
   z=12*x.*(x-x.*x);
   C=(y<z);   %точки с какими номерами попали под график?
   S(i)=sum(C);%сколько точек попали?
   x=x(C);    %оставляем x-координаты только таких точек
   x=x(1:n);  %и не всех, а только n точек
   X(i,:)=x;  %эту выборку пишем в строку матрицы X
  end;
  ms=min(S)
  %если min(s)<n, то ошибка "Index exceeds matrix dimensions"
  X          %каждая строка матрицы X – выборка объема n
(*******************************************)
```

*Рис. 4.* Скрипт программы генерации *m* выборок объема *n*.

Приведём текст программы, генерирующей m выборок объема n (рис. 4):

Приведём пример работы этой программы (для экономии места рассмотрим количество выборок $m = 4$ и объём выборки $n = 10$) (рис. 5). Здесь брали объём выборки «с запасом» N = 30.

Далее по полученным выборкам требуется оценить интервал из пункта д). Поскольку был найден 0,95-доверительный интервал для математического ожидания среднего арифметического выборки, в этот интервал ожидается попадание 19 из 20 значений средних арифметических. Чтобы получить значения средних арифметических наших выборок (построчные средние матрицы **X**), применим команду **sum** суммирования столбцов (предварительно транспонировав матрицу **X**), затем разделим на *n*. К вышеприведённому скрипту нужно добавить одну команду (рис. 6):

```
(******************************************)
(*Результат выполнения*)
ms =
12
X =
 0.737 0.381 0.203 0.801 0.769 0.433 0.960 0.140 0.715 0.946
 0.501 0.582 0.682 0.872 0.370 0.861 0.595 0.420 0.502 0.535
 0.761 0.981 0.487 0.933 0.533 0.700 0.684 0.714 0.742 0.391
 0.792 0.409 0.431 0.073 0.808 0.879 0.438 0.889 0.579 0.972
(******************************************)
```

*Рис. 5.* Пример работы программы генерации выборок.

```
(******************************************)
(*Вычисление среднего для пункта e*)
  Mx=sum(X')/n    %средние по строкам
(******************************************)
(*Результат выполнения*)
Mx =
  Columns 1 through 10
0.564 0.603 0.593 0.629 0.636 0.589 0.593 0.597 0.625 0.604
  Columns 11 through 20
0.614 0.548 0.606 0.579 0.607 0.607 0.622 0.570 0.564 0.612
(******************************************)
```

*Рис. 6.* Добавочная команда к программе генерации выборок.

Здесь число попаданий в интервал из пункта д) совпало с математическим ожиданием числа таких попаданий, т.е. 19.

Следующий пример относится к дисциплине «Математическая статистика».

**Пример 2.** Имеется две партии транзисторов, срок службы которых представлен в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.
Время работы (в часах) транзисторов из первой партии.

| |
|---|
| 318, 114, 304, 40, 232, 102, 89, 196, 31, 123, 31, 139, 25, 676, 53, 156, 107, 116, 84, 92, 3, 72, 415, 14, 269, 34, 154, 66, 514, 58, 446, 129, 52, 20, 150, 44, 125, 26, 25, 62, 209, 13, 21, 177, 97, 279, 164, 364, 23, 24, 104, 246, 238, 33, 161, 49, 97, 32, 209, 102, 130, 73, 233, 68, 57, 206, 7, 137, 48, 12, 28, 124, 75, 125, 233, 51, 164, 141, 4, 91, 232, 84, 204, 222, 113, 17, 139, 136, 122, 14, 29, 72, 214, 4, 179, 196, 188, 94, 867, 229, 136, 81, 155, 129, 23, 281, 184, 352, 165, 4, 13, 151, 0, 16, 51, 55, 233, 89, 15, 112, 283, 175, 130, 45, 109, 216, 31, 116, 214, 212, 354, 631, 88, 67, 88, 75, 41, 75, 200, 13, 159, 87, 40, 57, 145, 15, 50, 96, 35, 49, 3, 35, 66, 17, 134, 129, 9, 9, 329, 71, 427, 231, 43, 66, 315, 87, 57, 316, 361, 33, 135, 445, 25, 127, 214, 11, 25, 97, 149, 45, 32, 193, 36, 95, 277, 32, 137, 74, 137, 255, 218, 27, 68, 387, 134, 226, 38, 79, 203, 20 |

Таблица 2.
Время работы (в часах) транзисторов из второй партии.

| |
|---|
| 50, 78, 52, 89, 91, 108, 70, 136, 42, 29, 28, 0, 81, 38, 45, 61, 98, 21, 164, 13, 146, 51, 105, 39, 51, 242, 35, 23, 6, 28, 59, 378, 76, 116, 107, 38, 54, 101, 299, 331, 301, 389, 69, 222, 37, 49, 451, 15, 13, 8, 112, 32, 43, 7, 6, 124, 116, 27, 90, 2, 102, 55, 31, 27, 28, 75, 21, 36, 36, 9, 52, 49, 204, 129, 33, 122, 93, 41, 63, 111, 52, 33, 38, 53, 48, 149, 20, 183, 108, 1, 105, 244, 23, 10, 131, 97, 92, 7, 16, 163, 341, 31, 140, 167, 57, 163, 106, 230, 22, 46, 2, 270, 50, 2, 58, 301, 84, 40, 65, 48, 63, 165, 110, 162, 65, 29, 2, 41, 44, 145, 31, 25, 14, 85, 161, 140, 5, 5, 18, 209, 22, 61, 291, 50, 7, 20, 27, 42, 7, 235, 11, 136, 14, 48, 291, 192, 17, 5, 129, 11, 174, 212, 241, 55, 81, 14, 4, 627, 30, 66, 7, 42, 32, 84, 49, 595, 9, 88, 155, 62, 89, 43, 222, 198, 83, 43, 29, 61, 37, 135, 67, 56, 26, 44, 317, 18, 125, 173, 64, 82 |

Требуется сравнить числовые характеристики выборок. Можно ли считать распределения обеих партий одинаковыми? Для каждой выборки проверить гипотезу об экспоненциальном распределении.

***Решение.*** Начнём с построения гистограмм и диаграмм размаха для обеих выборок (рис. 7).

Далее приведены построенные графики для сравнения выборок (рис. 8). Из них видно, что распределения отличаются, но оба должны хорошо приближаться экспоненциальным законом.

Начнём с проверки гипотезы однородности $H_0$ по критерию Колмогорова–Смирнова. Этот критерий состоит в следующем. Пусть имеется две независимые выборки $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ объёмов $n$ и $m$ соответственно, полученные из непрерывных рас-

```
(**********************************************************)
(* зададим метки для маркировки графиков                *)
label={"Sample1","Sample2"};
(*для сравнения выборок построим парные гистограммы      *)
PairedHistogram[sample1,sample2,Automatic,"PDF",PlotTheme->"Monochrome",ChartStyle->White,ChartLabels->label]
(* построим диаграмму размаха                          *)
BoxWhiskerChart[{sample1,sample2},PlotTheme->"Monochrome",AspectRatio->1,ChartLabels->label]
(**********************************************************)
```

*Рис. 7.* Скрипт программы построения гистограмм
и диаграмм размаха для каждой из выборок.

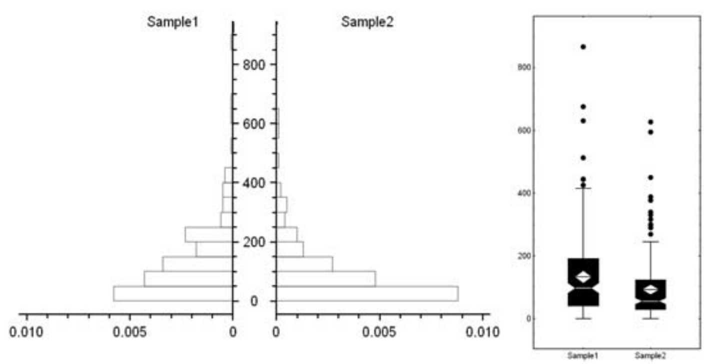



*Рис. 8.* Гистограммы (*а*) и диаграммы размаха (*б*) для каждой из выборок.

пределений. По полученным выборкам стоят их эмпирические функции распределения $\hat{F}_n^X$ и $\hat{F}_m^Y$. Статистика критерия $D_{n,m}$ вычисляется по формуле

$$D_{n,m} = \sup_{x \in R} | \hat{F}_n^X(x) - \hat{F}_m^Y(x) |.$$

Естественно, большие значения статистики свидетельствуют против гипотезы $H_0$ о равенстве функций распределения выборок $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Поэтому критическая область критерия имеет вид $\{D_{n,m} > c_\alpha\}$, где $\alpha$ – уровень значимости критерия. Значение $c_\alpha$ для больших выборок получается из следующего хорошо известного результата.

Согласно теореме Смирнова, для любого $t > 0$

$$\lim_{n,m \to \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{n,m} < t \right\} = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2}.$$

Функция распределения $K(t)$ соответствует закону распределения Колмогорова, её значения берутся из таблиц.

```
(**********************************************************)
Dist1=EmpiricalDistribution[sample1];
Dist2=EmpiricalDistribution[sample2];
Plot[{CDF[Dist1,x],CDF[Dist2,x]},{x,0,600},PlotTheme->"Monochrome",AxesOrigin-
>{0,0},PlotLegends->{"Sample1","Sample2"},PlotStyle->{Automatic,{Thick,Dotted}}]
(**********************************************************)
```

*Рис. 9.* Построение эмпирических функций распределения.

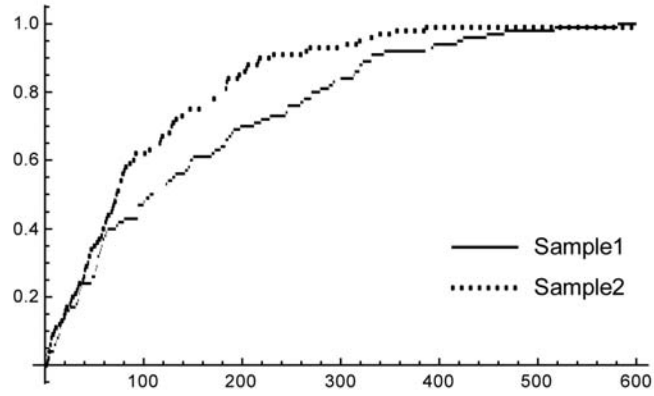



*Рис. 10.* Графики эмпирических функций распределения для обеих выборок.

```
(**********************************************************)
(*вычислим статистику D_{n,m}                    *)
KSStat=N[Max[Table[Abs[CDF[Dist1,x]-CDF[Dist2,x]],
{x,Join[sample1,sample2]}]]]
(*зададим функцию K(t) и обратную к ней функцию          *)
K[x_]:=EllipticTheta[4,0,E^(-2 x^2);
InverseK[p_]:=Re[Select[u/.Solve[K[u]==p,u],
Re[#]>0&&Im[#]==0&]] [[1]]
(*вычислим объемы выборок                   *)
m=Length[sample1];
n=Length[sample2];
(*теперь найдем критическое значение              *)
c=InverseK[0.95]/Sqrt[n m/(n+m)]
(**********************************************************)
 (*значение статистики D_{n,m}                  *)
0.19
(*критическое значение                     *)
0.13581
(**********************************************************)
```

*Рис. 11.* Значение статистики Колмогорова–Смирнова и ее критическое значение.

```
(**********************************************************)
(*проверка критерия хи-квадрат для первой выборки         *)
PearsonChiSquareTest[sample1,ExponentialDistribution[a1],
"TestDataTable"]
                Statistic     P-Value
Pearson χ²      16.07         0.377415
(*проверка критерия хи-квадрат для второй выборки         *)
PearsonChiSquareTest[sample2,ExponentialDistribution[a2],
"TestDataTable"]
                Statistic     P-Value
Pearson χ²      13.86         0.536173
(**********************************************************)
```

*Рис. 12.* Скрипт программы проверки по критерию хи-квадрат гипотезы о виде распределения.

Критерий Смирнова уровня значимости $\alpha$ состоит в том, что вычисленное значение статистики $D_{n,m}$ сравнивается величиной $c_\alpha = k_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}$, где $k_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$ распределения Колмогорова $K(t)$. Если вычисленное значение $D_{n,m} > c_\alpha$, то гипотеза $H_0$ отклоняется.

Расчёт критерия Колмогорова–Смирнова будем проводить в системе Mathematica. Начнём с того, что зададим эмпирические распределения для выборок и построим графики $\hat{F}_n^X$ и $\hat{F}_m^Y$ (рис. 9).

Как видно из приведённых графиков (рис. 10), функции распределения не очень близки.

Вычислим статистику Колмогорова–Смирнова и её критическое значение (рис. 11).

Так как полученное значение статистики больше критического, то гипотезу $H_0$ следует отклонить.

Теперь проверим гипотезу об экспоненциальном распределении для каждой из выборок по критерию хи-квадрат (рис. 12).

Так как для обеих выборок полученные p-value больше уровня значимости $\alpha$, то гипотеза об экспоненциальном распределении принимается для каждой из выборок.

## Заключение

Использование в учебном процессе интерактивных компьютерных систем позволяет достаточно эффективно, быстро и с большой точностью решать инженерные задачи с применением вероятностно-статистических методов, обычно требующих большого объёма вычислений. Возможности таких систем огромны и владение ими существенно активизирует освоение математических понятий и методов реш ения задач. Применение математических пакетов является особенно обоснованным, когда речь идёт о средних и больших выборках, так как вычисления могут быть очень громоздкими. Однако с помощью систем компьютерной математики и встроенных процедур вычисления проводятся достаточно просто.

Разумная интеграция традиционных учебных занятий и математических пакетов, создающая таким образом информационную среду, позволяет сделать процесс обучения гораздо интереснее, продуктивнее и способствует формированию у студентов глубоких и прочных знаний, умений и навыков.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Теория вероятностей: учебник для втузов / Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др.; ред. Зарубин В.С., Крищенко А.П. – 4-е изд., стер. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 455 с. (Математика в техническом университете, вып. XVI).
2. Математическая статистика / Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др.; ред. Зарубин В.С., Крищенко А.П. – 3-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 424 с.
3. Случайные процессы: учебник для втузов / Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.; ред. Зарубин В.С., Крищенко А.П. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 447 с. (Математика в техническом университете, вып. XVIII).
4. Меженная Н.М. Основы теории вероятностей и математической статистики: курс лекций [Электронный ресурс]. URL: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1530.html (дата обращения: 06.07.2017).
5. Меженная Н.М. Оценивание параметров. Проверка гипотез [Электронный ресурс]. URL: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1448.html (дата обращения: 06.07.2017).
6. Будовская Л.М., Тимонин В.И. Использование компьютерных технологий в преподавании математики // Инженерный журнал: наука и инновации. Электронное научно-техническое издание. 2013. вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/736.html
7. Лукашенко А.Г. Опыт использования системы MathCAD 11 при обучении высшей математике // Математика в высшем образовании. 2005. №3. С. 53–64.
8. Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. Использование электронных математических пакетов при обучении высшей математике // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 3. С. 120–132.
9. Wolfram Language & System. Documentation center. [Электронный ресурс]. URL: http://reference.wolfram.com/language/?source=nav (дата обращения: 04.07.2017)


## REFERENCES


1. Pechinkin A.V., Teskin O.I., Tsvetkova G.M., et al. *Teoriya veroyatnostei: uchebnik dlya vtuzov* [Probability theory: textbook for technical colleges]. Moscow, BMSTU Publ., 2006, 455 p.
2. Goryainov V.B., Pavlov I.V., Tsvetkova G.M., et al.; Zarubin V.S. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008. 424 p.
3. Volkov I.K., Zuev M.S., Tsvetkova G.M. *Sluchainye protsessy: uchebnik dlya vtuzov* [Random processes: a textbook for technical colleges]. Moscow, BMSTU Publ., 2006. 447 p.
4. Mezhennaya N.M. *Osnovy teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistiki: kurs lektsii* [Fundamentals of the theory of probability and mathematical statistics: a course of lectures]. Available at: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1530.html (accessed: 06.07.2017)

5. Mezhennaya N.M. *Otsenivanie parametrov. Proverka gipotez* [Estimation of the parameters. Test of hypotheses]. Available at: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/241/book1448.html (accessed: 06.07.2017)
6. Budovskaya L.M., Timonin V.I. [The use of computer technology in teaching mathematics]. In: *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii. Elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie*. [Engineering journal: science and innovation. Electronic science and engeneering publications], 2013, vol. 5. Available at: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/736.html (accessed: 06.07.2017)
7. Lukashenko A.G. [Experience in the use of MathCAD 11 in teaching higher mathematics] In: *Matematika v vysshem obrazovanii* [Mathematics in Higher Education], 2005, no. 3, pp. 53–64.
8. Vlasova E.A., Popov V.S., Pugachev O.V. [The use of electronic mathematical software when teaching mathematics] In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University], 2016, no. 3, pp. 120–132.
9. Wolfram Language & System. Documentation center. Available at: http://reference.wolfram.com/language/?source=nav (accessed: 04.07.2017)

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Власова Елена Александровна* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

*Меженная Наталья Михайловна* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: natalia.mezhennaya@gmail.com;

*Попов Владимир Семенович* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: vspopov@bk.ru;

*Пугачев Олег Всеволодович* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры ФН2 «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: opugachev@yandex.ru

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*Elena A. Vlasova* – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: elena.a.vlasova@yandex.ru;

*Natalia M. Mezhennaya* – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: Natalia.mezhennaya@gmail.com;

*Vladimir S. Popov* – PhD in Physico-mathematical sciences, associate professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: vspopov@bk.ru;

*Oleg V. Pugachev* – Doctor in Physico-mathematical sciences, professor at the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: opugachev@yandex.ru

**ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ**

Власова Е.А., Меженная Н.М., Попов В.С., Пугачев О.В. Использование математических пакетов в рамках методического обеспечения вероятностных дисциплин в техническом университете // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 4. С. 114–128.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128

**FOR CITATION**

Vlasova E.A., Mezhennaya N.M., Popov V.S., Pugachev O.V. The use of mathematical packages in the framework of methodological support of probabilistic disciplines in a technical university. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2017, no 4, pp. 114–128.
DOI: 10.18384/2310-7251-2017-4-114-128