РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-8-21

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В ПОЛОСЕ

Алгазин О.Д.

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Российская Федерация*

Аннотация. Рассмотрено неоднородное уравнение Трикоми в полосе с полиномиальной правой частью. Показано, что краевая задача Дирихле-Неймана с полиномиальными краевыми условиями имеет полиномиальное решение. Приведён алгоритм построения этого полиномиального решения и рассмотрены примеры. Если полоса лежит в области эллиптичности уравнения, то это решение единственно в классе функций полиномиального роста. Если полоса лежит в смешанной области, то решение задачи Дирихле-Неймана не единственно в классе функций полиномиального роста, но оно единственно в классе полиномов.

Ключевые слова: уравнение Трикоми, задача Дирихле-Неймана, преобразование Фурье, обобщённые функции медленного роста, полиномиальные решения.

POLYNOMIAL SOLUTIONS TO THE MIXED DIRICHLET-NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE TRICOMI EQUATION IN THE STRIP

O. Algazin

*Bauman Moscow State Technical University
ul. 2-ya Baumanskaya 5, stroenie 1, 105005 Moscow, Russian Federation*

Abstract. An inhomogeneous Tricomi equation is considered in a strip with a polynomial right-hand side. It is shown that the Dirichlet-Neumann boundary value problem with polynomial boundary conditions has a polynomial solution. An algorithm for constructing this polynomial

solution is presented and examples are considered. If the strip lies in the ellipticity region of the equation, then this solution is unique in the class of functions of polynomial growth. If the strip lies in a mixed region, then the solution to the Dirichlet-Neumann problem is not unique in the class of functions of polynomial growth, but it is unique in the class of polynomials.

Key words: Poisson equation, Dirichlet-Neumann problem, Fourier transform, generalized functions of slow growth, polynomial solutions.

Введение

Уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

впервые было рассмотрено Ф. Трикоми [1] и в дальнейшем получило его имя. Это уравнение эллиптического типа в верхней полуплоскости $y > 0$, гиперболического типа в нижней полуплоскости $y < 0$ и параболически вырождается на прямой $y = 0$. Уравнения смешанного типа применяются в трансзвуковой газовой динамике [2–4]. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в смешанной области в принципе поставлена некорректно [5]. Поиску условий корректности постановки задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в смешанной области посвящено много работ, например [6–12]. Смешанная краевая задача Дирихле-Неймана также некорректно поставлена в смешанной области, однако если ограничиться поиском её решений в классе полиномов, то решение будет единственным.

Данная работа посвящена отысканию точных полиномиальных решений смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Трикоми в полосе с полиномиальной правой частью. Методом преобразования Фурье аналогично тому, как это ранее сделано в [13] для уравнения Пуассона, показано, что краевая задача Дирихле-Неймана с полиномиальными краевыми условиями имеет полиномиальное решение. Приведён алгоритм построения этого полиномиального решения и рассмотрены примеры. Если полоса лежит в области эллиптичности уравнения, то это решение единственно в классе функций полиномиального роста. Если полоса лежит в смешанной области, то решение задачи Дирихле-Неймана не единственно в классе функций полиномиального роста, но оно единственно в классе полиномов.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Трикоми в полосе с полиномиальной правой частью:

$$Tu(x, y) := yu_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = P(x, y), \quad a < y < b, \quad (1)$$

где $P(x, y)$ – полином от переменных x и y .

На границе полосы зададим краевые условия Дирихле-Неймана:

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad u_y(x, b) = \psi(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – полиномы.

Если $\tilde{u}(x, y)$ – частное полиномиальное решение уравнения Трикоми (1), то для функции $v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$ получаем однородное уравнение:

$$Tv(x, y) = 0, a < y < b, \quad (3)$$

и краевые условия Дирихле-Неймана:

$$v(x, a) = \varphi(x) - \tilde{u}(x, a), v_y(x, b) = \psi(x) - \tilde{u}_y(x, b). \quad (4)$$

Решив задачу Дирихле-Неймана для однородного уравнения Трикоми (3), (4), мы получим решение задачи Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Трикоми (1), (2) по формуле:

$$v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y).$$

Решения задачи Дирихле-Неймана будем искать в классе функций полиномиального роста по x :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, y)| (1 + |x|)^{-m} dx < C \quad (5)$$

для некоторого $m \geq 0$ и для каждого $y \in (a, b)$.

Частное решение уравнения Трикоми

Уравнение Трикоми с полиномиальной правой частью $P(x, y)$

$$Tu(x, y) := uu_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = P(x, y),$$

имеет полиномиальные решения, одно из которых можно получить по приводимой далее формуле. Эту формулу достаточно привести для монома $P(x, y) = x^n y^m$. Частным решением уравнения Трикоми с правой частью $x^n y^m$ будет функция:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= T^{-1}(x^n y^m) = \\ &= \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \frac{n!(m-1)! \prod_{k=0}^j (m+3k)}{(m+3j+2)!(n-2j)!} y^{m+3j+2} x^{n-2j}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$.

Справедливость формулы (6) доказывается непосредственной проверкой:

$$T\tilde{u}(x, y) = x^n y^m.$$

Например, для

$$P(x, y) = x^5 y^7$$

частным решение, полученным по формуле (6), будет полином:

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{72} x^5 y^9 - \frac{5}{2376} x^3 y^{12} + \frac{1}{16632} x y^{15}.$$

Задача Дирихле-Неймана для полосы, лежащей в области эллиптичности

Рассмотрим полосу $0 < y < b$, в которой уравнение Трикоми эллиплично и параболически вырождается на граничной прямой $y = 0$. Поскольку решение задачи Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения сводится к решению задачи Дирихле-Неймана для однородного уравнения, рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для однородного уравнения:

$$Tu(x, y) := u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, b) = \psi(x), \quad (8)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – полиномы.

Поскольку функции $u(x, y)$ медленного роста по x определяют для каждого y из $(0, b)$ регулярные функционалы из пространства $S'(\mathbb{R})$ – пространства обобщённых функций медленного роста, то к ним можно применить преобразование Фурье по x [14]:

$$\mathcal{F}_x[u(x, y)](t, y) = U(t, y).$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению (7) и краевым условиям (8). Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром $t \in \mathbb{R}$:

$$-t^2 y U(t, y) + U_{yy}(t, y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (9)$$

и краевые условия

$$U(t, 0) = \Phi(t), \quad U_y(t, b) = \Psi(t). \quad (10)$$

Уравнение (9) – это уравнение Эйри, его общее решение выражается через функции Эйри:

$$U(t, y) = c_1(t) \text{Ai}(t^{2/3} y) + c_2(t) \text{Bi}(t^{2/3} y).$$

Используя краевые условия (10), получим единственное решение краевой задачи (9), (10):

$$U(t, y) = K(t, y) \Phi(t) + L(t, y) \Psi(t), \quad (11)$$

где

$$K(t, y) = \frac{\text{Ai}(t^{2/3} y) \text{Bi}'(t^{2/3} b) - \text{Bi}(t^{2/3} y) \text{Ai}'(t^{2/3} b)}{\text{Ai}(0) \text{Bi}'(t^{2/3} b) - \text{Bi}(0) \text{Ai}'(t^{2/3} b)},$$

$$L(t, y) = \frac{Ai(0)Bi(t^{2/3}y) - Bi(0)Ai(t^{2/3}y)}{t^{2/3} [Ai(0)Bi'(t^{2/3}y) - Bi(0)Ai'(t^{2/3}y)]}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим единственное в классе функций полиномиального роста решение задачи Дирихле-Неймана (7), (8) в виде свертки:

$$u(x, y) = k(x, y) * \varphi(x) + l(x, y) * \psi(x), \quad (12)$$

где

$$k(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}(K(t, y)), \quad l(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}(L(t, y)).$$

Чтобы найти свертку (12) с полиномами $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ достаточно рассмотреть случай монома x^n .

$K(t, y)$ и $L(t, y)$ как функции переменного t бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие, то есть принадлежат пространству $S(\mathbb{R})$, а, следовательно, и $k(x, y)$ и $l(x, y)$ как функции переменного x принадлежат пространству $S(\mathbb{R})$, поскольку преобразование Фурье переводит $S(\mathbb{R})$ в себя. Кроме того, $K(t, y)$ и $L(t, y)$ – чётные функции переменного t и, следовательно, $k(x, y)$ и $l(x, y)$ – чётные функции переменного x .

Решением задачи Дирихле-Неймана (7), (8) с $\varphi(x) = x^n$, и $\psi(x) = 0$ будет функция:

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= k(x, y) * x^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-t)^n k(t, y) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} t^j (-1)^j k(t, y) dt = \sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} t^j k(t, y) dt, \end{aligned}$$

где $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты. Поскольку последний интеграл для нечётных j равен нулю в силу чётности $K(t, y)$ по t , то

$$u_n(x, y) = \sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m} x^{n-2m} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} k(t, y) dt,$$

где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. Пользуясь свойствами преобразования Фурье, получим:

$$\begin{aligned} p_{2m}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} k(t, y) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m} k(t, y) e^{ixt} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}_x[t^{2m} k(t, y)](x, y) = (-1)^m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} K(x, y). \end{aligned}$$

Здесь $p_{2m}(y)$ являются полиномами от y , производящая функция которых есть $K(t, y)$.

$$K(t, y) = \frac{Ai(t^{2/3}y)Bi'(t^{2/3}b) - Bi(t^{2/3}y)Ai'(t^{2/3}b)}{Ai(0)Bi'(t^{2/3}b) - Bi(0)Ai'(t^{2/3}b)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m}(y) \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}.$$

Приведём несколько первых полиномов $p_{2m}(y)$ и соответствующих решений задачи Дирихле-Неймана $u_n(x, y)$:

$$p_0(y) = 1,$$

$$p_2(y) = \frac{1}{3}y(-y^2 + 3b^2),$$

$$p_4(y) = \frac{1}{15}y(2y^5 - 15b^2y^3 + 48b^5),$$

$$p_6(y) = \frac{1}{126}y(-7y^8 + 90b^2y^6 - 1008b^5y^3 + 3465b^8),$$

$$p_8(y) = \frac{1}{297}y(7y^{11} - 132b^2y^9 + 3168b^5y^6 - 38115b^8y^3 + 131520b^{11}),$$

$$p_{10}(y) = \frac{1}{1287}y(-13y^{14} + 330b^2y^{12} - 13728b^5y^9 + 353925b^8y^6 - 4274400b^{11}y^3 + 14753310b^{14}).$$

$$u_0(x, y) = 1,$$

$$u_1(x, y) = x,$$

$$u_2(x, y) = x^2 - \frac{1}{3}y^3 + b^2y,$$

$$u_3(x, y) = x^3 - xy^3 + 3b^2xy,$$

$$u_4(x, y) = x^4 - 2x^2y^3 + 6b^2x^2y + \frac{2}{15}y^6 - b^2y^4 + \frac{16}{5}b^5y,$$

$$u_5(x, y) = x^5 - \frac{10}{3}x^3y^3 + 10b^2x^3y + \frac{2}{3}xy^6 - 5b^2xy^4 + 16b^5xy.$$

Аналогично, решением задачи Дирихле-Неймана (7), (8) с $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^n$ будет функция:

$$v_n(x, y) = \sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m} x^{n-2m} q_{2m}(y),$$

где $q_{2m}(y)$ – полиномы от y , производящая функция которых есть $L(t, y)$.

$$L(t, y) = \frac{Ai(0)Bi(t^{2/3}y) - Bi(0)Ai(t^{2/3}y)}{t^{2/3}[Ai(0)Bi'(t^{2/3}b) - Bi(0)Ai'(t^{2/3}b)]} = \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}(y) \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}.$$

Приведём несколько первых полиномов $q_{2m}(y)$ и соответствующих решений задачи Дирихле-Неймана $v_n(x, y)$:

$$q_0(y) = y,$$

$$q_2(y) = -\frac{1}{6}y^4 + \frac{2}{3}b^3y,$$

$$q_4(y) = \frac{1}{21}y^7 - \frac{2}{3}b^3y^4 + \frac{7}{3}b^6y,$$

$$q_6(y) = -\frac{1}{63}y^{10} + \frac{10}{21}b^3y^7 - \frac{35}{6}b^6y^4 + \frac{1270}{63}b^9y,$$

$$q_8(y) = \frac{2}{351}y^{13} - \frac{8}{27}b^3y^{10} + \frac{70}{9}b^6y^7 - \frac{2540}{27}b^9y^4 + \frac{8768}{27}b^{12}y,$$

$$q_{10}(y) = -\frac{1}{468}y^{16} + \frac{20}{117}b^3y^{13} - \frac{70}{9}b^6y^{10} + \frac{12700}{63}b^9y^7 - \frac{21920}{9}b^{12}y^4 + \frac{983584}{117}b^{15}y.$$

$$v_0(x, y) = y,$$

$$v_1(x, y) = xy,$$

$$v_2(x, y) = x^2y - \frac{1}{6}y^4 + \frac{2}{3}b^3y,$$

$$v_3(x, y) = x^3y - \frac{1}{2}xy^4 + 2b^3xy,$$

$$v_4(x, y) = x^4y - x^2y^4 + 4b^3x^2y + \frac{1}{21}y^7 - \frac{2}{3}b^3y^4 + \frac{7}{3}b^6y,$$

$$v_5(x, y) = x^5y - \frac{5}{3}x^3y^4 + \frac{20}{3}b^3x^3y + \frac{5}{21}xy^7 - \frac{10}{3}b^3xy^4 + \frac{35}{3}b^6xy.$$

Пример. Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Трикоми:

$$Tu(x, y) = 2x^2y^3 - 18x^3y^4, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Частным решением уравнения является полином:

$$\tilde{u}(x, y) = -\frac{3}{5}x^3y^6 + \frac{1}{10}x^2y^5 + \frac{1}{20}xy^9 - \frac{1}{280}y^8,$$

и задача Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения сводится к задаче Дирихле-Неймана для однородного уравнения для функции $v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$:

$$Tv(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < b,$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \tilde{u}(x, 0) = 0,$$

$$v_y(x, b) = u_y(x, b) - \tilde{u}_y(x, b) =$$

$$= \frac{18}{5}b^5x^3 - \frac{1}{2}b^4x^2 - \frac{9}{20}b^8x + \frac{1}{35}b^7.$$

Решением задачи Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения будет полином:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \tilde{u}(x, y) + v(x, y) = \\ &= \tilde{u}(x, y) + \frac{18}{5}b^5v_3(x, y) - \frac{1}{2}b^4v_2(x, y) - \frac{9}{20}b^8v_1(x, y) + \frac{1}{35}b^7v_0(x, y) = \\ &= -\frac{3}{5}x^3y^6 + \frac{18}{5}b^5x^3y + \frac{1}{10}x^2y^5 - \frac{1}{2}b^4x^2y + \frac{1}{20}xy^9 - \\ &\quad - \frac{9}{5}b^5xy^4 + \frac{27}{4}b^8xy - \frac{1}{280}y^8 + \frac{1}{12}b^4y^4 - \frac{32}{105}b^7y. \end{aligned}$$

Задача Дирихле-Неймана для полосы в смешанной области

Рассмотрим полосу $-a < y < a$, в которой уравнение Трикоми имеет смешанный тип. Приведём полиномиальное решение задачи Дирихле-Неймана:

$$Tu(x, y) := yu_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad -a < y < a, \quad (13)$$

$$u(x, -a) = \varphi(x), \quad u_y(x, a) = \psi(x), \quad (14)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – полиномы.

Аналогично изложенному в предыдущем пункте, решением задачи Дирихле-Неймана (13), (14) с $\varphi(x) = x^n$, $\psi(x) = 0$ будет функция:

$$u_n(x, y) = \sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m} x^{n-2m} p_{2m}(y),$$

где $q_{2m}(y)$ – полиномы, производящая функция которых:

$$\frac{Ai(t^{2/3}y)Bi'(t^{2/3}a) - Bi(t^{2/3}y)Ai'(t^{2/3}a)}{Ai(-t^{2/3}a)Bi'(t^{2/3}a) - Bi(-t^{2/3}a)Ai'(t^{2/3}a)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m}(y) \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}.$$

Приведём несколько первых полиномов $q_{2m}(y)$ и соответствующих решений задачи Дирихле-Неймана $u_n(x, y)$:

$$p_0(y) = 1,$$

$$p_2(y) = -\frac{1}{3}y^3 + a^2y + \frac{2}{3}a^3,$$

$$p_4(y) = \frac{2}{15}y^6 - a^2y^4 - \frac{4}{3}a^3y^3 + \frac{35}{6}a^5y + \frac{101}{15}a^6,$$

$$p_6(y) = -\frac{1}{18}y^9 + \frac{5}{7}a^2y^7 + \frac{4}{3}a^3y^6 - 18a^5y^4 - \frac{101}{3}a^6y^3 + \frac{321}{2}a^8y + \frac{9082}{63}a^9.$$

$$u_0(x, y) = 1,$$

$$u_1(x, y) = x,$$

$$u_2(x, y) = x^2 - \frac{1}{3}y^3 + a^2y + \frac{2}{3}a^3,$$

$$u_3(x, y) = x^3 + 3x \left(-\frac{1}{3}y^3 + a^2y + \frac{2}{3}a^3 \right),$$

$$u_4(x, y) = x^4 + 6x^2 \left(-\frac{1}{3}y^3 + a^2y + \frac{2}{3}a^3 \right) + \frac{2}{15}y^6 - a^2y^4 - \frac{4}{3}a^3y^3 + \frac{36}{5}a^5y + \frac{101}{15}a^6,$$

$$u_5(x, y) = x^5 + 10x^3 \left(-\frac{1}{3}y^3 + a^2y + \frac{2}{3}a^3 \right) +$$

$$+ 5x \left(\frac{2}{15}y^6 - a^2y^4 - \frac{4}{3}a^3y^3 + \frac{36}{5}a^5y + \frac{101}{15}a^6 \right).$$

Решением задачи Дирихле-Неймана (13), (14) с $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x^n$ будет функция:

$$v_n(x, y) = \sum_{m=0}^{[n/2]} C_n^{2m} x^{n-2m} q_{2m}(y),$$

где $q_{2m}(y)$ полиномы, производящая функция которых:

$$\frac{Ai(-t^{2/3}a)Bi(t^{2/3}y) - Bi(-t^{2/3}a)Ai(t^{2/3}y)}{t^{2/3} \left[Ai(-t^{2/3}a)Bi'(t^{2/3}a) - Bi(-t^{2/3}a)Ai'(t^{2/3}a) \right]} = \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m}(y) \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}.$$

Приведём несколько первых полиномов $q_{2m}(y)$ и соответствующих решений задачи Дирихле-Неймана $v_n(x, y)$:

$$q_0(y) = y + a,$$

$$q_2(y) = -\frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{3}ay^3 + \frac{5}{3}a^3y + \frac{3}{2}a^4,$$

$$q_4(y) = \frac{1}{21}y^7 + \frac{2}{15}ay^6 - \frac{5}{3}a^3y^4 - 3a^4y^3 + \frac{218}{15}a^6y + \frac{459}{35}a^7,$$

$$q_6(y) = -\frac{1}{63}y^{10} - \frac{1}{18}ay^9 + \frac{25}{21}a^3y^7 + 3a^4y^6 - \frac{109}{3}a^6y^4 - \frac{459}{7}a^7y^3 + \\ + \frac{39863}{126}a^9y + \frac{1997}{7}a^{10}.$$

$$v_0(x, y) = y + a,$$

$$v_1(x, y) = x(y + a),$$

$$v_2(x, y) = x^2(y + a) - \frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{3}ay^3 + \frac{5}{3}ay^3 + \frac{3}{2}a^4,$$

$$v_3(x, y) = x^3(y + a) + 3x \left(-\frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{3}ay^3 + \frac{5}{3}ay^3 + \frac{3}{2}a^4 \right),$$

$$v_4(x, y) = x^4(y + a) + 6x^2 \left(-\frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{3}ay^3 + \frac{5}{3}ay^3 + \frac{3}{2}a^4 \right) +$$

$$+ \frac{1}{21}y^7 + \frac{2}{15}ay^6 - \frac{5}{3}a^3y^4 - 3a^4y^3 + \frac{218}{15}a^6y + \frac{459}{35}a^7,$$

$$v_5(x, y) = x^5(y + a) + 10x^3 \left(-\frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{3}ay^3 + \frac{5}{3}ay^3 + \frac{3}{2}a^4 \right) +$$

$$+ 5x \left(\frac{1}{21}y^7 + \frac{2}{15}ay^6 - \frac{5}{3}a^3y^4 - 3a^4y^3 + \frac{218}{15}a^6y + \frac{459}{35}a^7 \right).$$

Пример. Рассмотрим задачу Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения Трикоми:

$$Tu(x, y) = 2x^2y^3 - 18x^3y^4, \quad x \in \mathbb{R}, \quad -a < y < a,$$

$$u(x, -a) = 0, u_y(x, a) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Частным решением уравнения является полином:

$$\tilde{u}(x, y) = -\frac{3}{5}x^3y^6 + \frac{1}{10}x^2y^5 + \frac{1}{20}xy^9 - \frac{1}{280}y^8,$$

и задача Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения сводится к задаче Дирихле-Неймана для однородного уравнения для функции $v(x, y) = u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$:

$$Tv(x, y) = 0, x \in \mathbb{R}, -a < y < a,$$

$$v(x, -a) = u(x, -a) - \tilde{u}(x, -a) = \frac{3}{5}a^6x^3 + \frac{1}{10}a^5x^2 + \frac{1}{20}a^9x + \frac{1}{280}a^8,$$

$$v_y(x, a) = u_y(x, a) - \tilde{u}_y(x, a) = \frac{18}{5}a^5x^3 - \frac{1}{2}a^4x^2 - \frac{9}{20}a^8x + \frac{1}{35}a^7.$$

Решением задачи Дирихле-Неймана для неоднородного уравнения будет полином:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \tilde{u}(x, y) + v(x, y) = \\ &= \tilde{u}(x, y) + \frac{3}{5}a^6u_3(x, y, a) + \frac{1}{10}a^5u_2(x, y, a) + \frac{1}{20}a^9u_1(x, y, a) + \frac{1}{280}a^8u_0(x, y, a) + \\ &\quad + \frac{18}{5}a^5v_3(x, y) - \frac{1}{2}a^4v_2(x, y) - \frac{9}{20}a^8v_1(x, y) + \frac{1}{35}a^7v_0(x, y) = \\ &= -\frac{3}{5}x^3y^6 + \frac{18}{5}a^5x^3y + \frac{21}{5}a^6x^3 + \frac{1}{10}x^2y^5 - \frac{1}{2}a^4x^2y - \frac{2}{5}a^5x^2 + \frac{1}{20}xy^9 - \frac{9}{5}a^5xy^4 - \\ &\quad - \frac{21}{5}a^6xy^3 + \frac{387}{20}a^8xy + 17a^9x - \frac{1}{280}y^8 + \frac{1}{12}a^4y^4 + \frac{2}{15}a^5y^3 - \frac{74}{105}a^7y - \frac{547}{840}a^8. \end{aligned}$$

О единственности решения задачи Дирихле-Неймана

Если искать решение задачи Дирихле-Неймана для полосы $-a < y < a$ в классе функций полиномиального роста, то решение не единственно. К указанному в пункте 4 полиномиальному решению можно прибавить любое решение вида:

$$(c_1 \sin(\mu_k^{3/2}x) + c_2 \cos(\mu_k^{3/2}x))(\text{Bi}(\mu_k y)\text{Ai}(-\mu_k a) - \text{Ai}(\mu_k y)\text{Bi}(-\mu_k a)),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, а μ_k – любой положительный корень уравнения:

$$\text{Bi}'(\mu a)\text{Ai}(-\mu a) - \text{Ai}'(\mu a)\text{Bi}(-\mu a) = 0.$$

Приведём несколько первых положительных корней этого уравнения (приближенные значения):

$$\mu_1 = 2,335063765, \mu_2 = 4,087945258, \mu_3 = 5,520559821,$$

$$\mu_4 = 6,786708090, \mu_5 = 7,944133587.$$

Если же искать решения в классе полиномов, то указанное решение будет единственным. Для доказательства этого достаточно показать, что если полином $P(x, y)$ удовлетворяет однородному уравнению Трикоми:

$$TP(x, y) := yP_{xx}(x, y) + P_{yy}(x, y) = 0 \quad (15)$$

и однородным граничным условиям:

$$P(x, -a) = 0, P_y(x, a) = 0, \quad (16)$$

то он тождественно равен нулю $P(x, y) \equiv 0$.

Подставляя $P(x, y)$ в уравнение Трикоми (15) и граничные условия (16) и приравнявая к нулю коэффициенты при мономах $x^n y^m$, получим, что все коэффициенты полинома $P(x, y)$ равны нулю и, следовательно, $P(x, y) \equiv 0$.

Заключение

С помощью преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста получены полиномиальные решения задачи Дирихле-Неймана в полосе для неоднородного уравнения Трикоми с полиномиальной правой частью и полиномиальными граничными условиями. Этим же методом получаются полиномиальные решения и задачи Дирихле для уравнения Трикоми в полосе.

Статья поступила в редакцию 29.06.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto // Rendiconti. Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze di Fisiche, Matematiche e Naturale. 1923. Ser. 5. Vol. 14. pp. 134–247.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Издательство Иностранной литературы, 1961. 208 с.
3. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 712 с.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
5. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // Доклады Академии Наук СССР. 1958. Т. 122. № 2. С. 167–170.
6. Нахушев А.Н. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 1. С. 190–191.
7. Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.
8. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 413. № 1. С. 23–26.
9. Солдатов А.П. О задачах типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 242–249.

10. Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. Вып. 1. С. 68–78.
11. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 7. С. 62–76.
12. Хайруллин Р.С. О задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. Вып. 4. С. 528–534.
13. Алгазин О.Д. Полиномиальные решения краевых задач для уравнения Пуассона в слое // Математика и математическое моделирование. 2017. № 6. С. 1–18.
14. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

REFERENCES

1. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto. In: *Rendiconti. Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze di Fisiche, Matematiche e Naturale*, 1923, ser. 5, vol. 14, pp. 134–247.
2. Bers L. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. New York, John Wiley & Sons, Inc., London: Chapman & Hall, Ltd., 1958.
3. Frankl' F.I. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected works on gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 712 p.
4. Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 448 p.
5. Bitsadze A.V. [Incorrectness of the Dirichlet problem for mixed-type equations in mixed domains]. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Doklady Mathematics], 1958, vol. 122, no. 2, pp. 167–170.
6. Nakhushev A.N. [The criterion of uniqueness of the Dirichlet problem for a mixed-type equation in a cylindrical domain]. In: *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1970, vol. 6, no. 1, pp. 190–191.
7. Khachev M.M. *Pervaya kraevaya zadacha dlya lineinykh uravnenii smeshannogo tipa* [The first boundary value problem for linear equations of mixed type]. Nalchik, El'brus Publ., 1998. 168 p.
8. Sabitov K.B. [The Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain]. In: *Doklady Akademii Nauk* [Doklady Mathematics], 2007, vol. 413, no. 1, pp. 23–26.
9. Soldatov A.P. [On problems of Dirichlet type for the Lavrent'ev-Bitsadze equation]. In: *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2012, vol. 278, pp. 242–249.
10. Sabitov K.B., Vagapova E.V. [The Dirichlet problem for mixed type equation with two lines of degeneration in the rectangular region]. In: *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2013, vo. 49, no. 1, pp. 68–78.
11. Sabitov K.B., Melisheva E.P. [The Dirichlet problem for a loaded mixed-type equation in a rectangular domain]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [Russian Mathematics], 2013, no. 7, pp. 62–76.
12. Khairullin R.S. [On the Dirichlet problem for the mixed-type equation of the second kind with strong degeneration]. In: *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2013, vol. 49, no. 4, pp. 528–534.

13. Algazin O.D. [Polynomial Solutions to the Boundary Value Problems for the Poisson Equation in a Layer]. In: *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2017, no. 6, pp. 1–18.
14. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 318 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Алгазин Олег Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана;
e-mail: mopi66@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Oleg D. Algazin – PhD in Physical and Mathematical Science, assistant professor at the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: mopi66@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алгазин О.Д. Полиномиальные решения смешанной краевой задачи Дирихле-Неймана для уравнения Трикоми в полосе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 3. С. 8-21.
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-8-21

FOR CITATION

Algazin O.D. Polynomial solutions to the mixed Dirichlet-Neumann boundary value problem for the Tricomi equation in the strip. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 8-21.
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-8-21