РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 537.29/534.14
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-22-33

ВЛИЯНИЕ РАСКЛИНИВАЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ НА КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Алиев И.Н., Самедова З.А., Копылов И.С.
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе рассматривается проблема влияния расклинивающего давления на критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости. Проводится теоретический анализ эволюции поверхности заряженного слоя жидкости. Помимо этого доказывается, что при уменьшении толщины слоя жидкости на твёрдой подложке до величины порядка 100 нм влияние расклинивающего давления становится весьма существенным.

Ключевые слова: расклинивающее давление, неустойчивость, дисперсионное уравнение, заряженная поверхность жидкости.

INFLUENCE OF THE DISJOINING PRESSURE ON THE CRITICAL CONDITIONS FOR THE REALIZATION OF THE INSTABILITY OF A CHARGED LIQUID SURFACE

I. Aliev, Z. Samedova, I. Kopylov
Bauman Moscow State Technical University
ul. 2-ya Baumanskaya 5, stroenie 1, 105005 Moscow, Russian Federation

Abstract. We consider the effect of the disjoining pressure on the critical conditions for the realization of the instability of a charged liquid surface. The evolution of the surface of a charged layer of liquid is theoretically analyzed. In addition, it is proved that when the thickness of the liquid layer on a solid substrate is reduced to a value on the order of 100 nm, the effect of the disjoining pressure becomes very significant.

Key words: disjoining pressure, instability, dispersion equation, charged liquid surface.

1. Анализ эволюции поверхности заряженного слоя жидкости вызывает постоянный интерес. С этой проблемой тесно связаны вопросы электро-аэрозольных технологий; задачи очистки жидких металлов от шлаков и окислов; различные геофизические вопросы, касающиеся атмосферного (грозового) электричества, такие, как инициация разряда молнии; задачи, возникающие при разработке электрокаплеструйных печатающих устройств, жидкометаллических источников ионов и устройств для масс-спектроскопии органических и термически нестабильных жидкостей. На основе явления неустойчивости заряженной поверхности жидкости созданы устройства для получения порошков тугоплавких металлов и жидкометаллической эпитаксии и литографии. Особо следует отметить получение капель жидкого водорода в установках термоядерного синтеза [1]. Интенсивное развитие электрогидродинамики поверхности было связано с попытками сформулировать общие методы описания линейных систем и взаимосвязи соответствующих эффектов. Для этого в [2] был проведён полный анализ структуры решений дисперсионного уравнения возмущений тяжелой проводящей жидкости, находящейся в ортогональном к невозмущенной поверхности электрическом поле. Примененный при этом метод представлял собой параметризацию дисперсионного уравнения и обобщал результаты работы [3]. Главным результатом работ [2; 3] стал тот факт, что даже в линейной постановке задачи по мере увеличения частот возмущений (капиллярный спектр) некоторые волны меняют свой тип с осциллирующего на монотонный, то есть происходит бифуркация решения уравнений возмущений. Направления дальнейшего развития электрогидродинамики были продиктованы необходимостью описания процессов, близких к реальным.

В связи с этим и учитывая усиливающийся за последнее время интерес к очень тонким плёнкам (наноразмерным), встаёт вопрос о влиянии так называемого расклинивающего давления на условия реализации неустойчивости.

Похожие проблемы постоянно находятся в поле зрения научных групп. Например, в работе [4] была предпринята попытка найти численным методом критическую напряжённость электрического поля для зажигания разряда свободно падающей обводненной градины с учётом аэродинамического взаимодействия со средой. Но ввиду грубости используемой физической модели основным результатом этой работы следует считать просто постановку проблемы.

Дальнейшее развитие в различных приложениях теория поверхностной электрогидродинамики получила в работах [5–9]. За последние годы работы в этом направлении были продолжены с учётом электромагнитного излучения, сопровождающего колебания заряженной капли [10–12]. В [12] с учётом классических результатов из [13] для неподвижной относительно среды заряженной градины аналитическим путём с использованием модового подхода Рэлея найдены критические условия проявления в жидком слое неустойчивости по отношению к собственному заряду и декремент затухания капиллярных волн. Все исследования проводились для толстых слоёв жидкости, для которых влияние на устойчивость слоя расклинивающего давления можно не учитывать.

Похожие вопросы рассматривались также в [14; 15].

2. К сожалению, теория расклинивающего давления к настоящему времени развита недостаточно строго. В [16; 17] были выделены компоненты этого давления, имеющие различную физическую природу, которые в общем случае не описываются единым аналитическим выражением. Имея в виду, в первую очередь, качественное исследование влияния расклинивающего давления p_h на устойчивость тонких плёнок отметим, что для настоящего рассмотрения наиболее важной особенностью p_h является его сильная зависимость от толщины слоя h, поэтому в дальнейшем примем его совпадающим с флуктуационной составляющей:

$$p_h = A/h^k \ (3 \le k \le 4 \text{ в зависимости от } h), \tag{1}$$

как это было получено в строгом теоретическом расчёте [17] и как это делалось при теоретическом анализе устойчивости свободных тонких пленок [18].

Согласно [16; 17] при уменьшении толщины слоя жидкости на твёрдой подложке до величины порядка 100 нм становится существенным влияние расклинивающего давления, величина которого растёт согласно (1) с уменьшением толщины плёнки. В этом случае сильная зависимость критических условий проявления неустойчивости должна иметь место даже в приближении идеальной жидкости.

Система уравнений имеет вид:

$$E_{+\tau}\Big|_{z=\xi(x,y)} + E_{-\tau}\Big|_{z=\xi(x,y)} = 0,$$

$$v_z\Big|_{z=\xi(x,y)} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v}\nabla\xi -$$

$$-\rho g\xi - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{8\pi}\left(E_{+n}^2 - E_{-n}^2\right)\Big|_{z=\xi(x,y)} = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{2}$$

где $\xi(x, y, t)$ – отклонение поверхности жидкости от равновесной плоской формы; σ и ρ – её коэффициент поверхностного натяжения и плотность, соответственно; R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны в данной точке деформированной поверхности; Φ – потенциал скорости: $\vec{v} = \nabla\Phi$; $E_{\pm\tau} = -\nabla\varphi_{\pm}$ – напряжённость электрического поля по обе стороны от границы поверхности, $E_{\pm\tau}$, $E_{\pm n}$ – её касательные и нормальные компоненты, соответственно; потенциалы Φ и φ удовлетворяют уравнениям Лапласа.

Не останавливаясь на процедуре отыскания решения, детально описанной в предыдущих работах [5–9], сразу выпишем дисперсионное уравнение. При конечных d и h решение системы (1) для спектра малых колебаний приводит к уравнению:

$$\omega^2 = \frac{k\tanh(kd)}{\rho}\left\{\rho g + \sigma k^2 - \frac{k}{4\pi}\left[E_-^2 \coth\left(k(h-d)\right) + E_+^2 \coth(kd)\right]\right\}. \tag{3}$$

Соответствующая геометрия приведена на рисунке 1.

Полученный результат упрощается в симметричном ($h - d = d$) и несимметричном ($h \to \infty$) случаях.

В первом варианте согласно (3):

$$\omega^2 = \frac{k\tanh(kd)}{\rho}\left\{\rho g + \sigma k^2 - \frac{k}{4\pi}\left(E_+^2 + E_-^2\right)\coth(kd)\right\}. \qquad (4)$$

Формально, параметры задачи, соответствующие границе устойчивости, определяются совместным решением уравнений:

$$\omega(k) = 0, \quad \frac{\partial\omega^2}{\partial k} = 0. \qquad (5)$$

Анализ условий (5), требующий в переходной области применения численных методов, приводит в симметричном пределе к результатам, представленных на рис. 1. Экспериментальные точки, показанные на рисунке, представлены согласно [19].

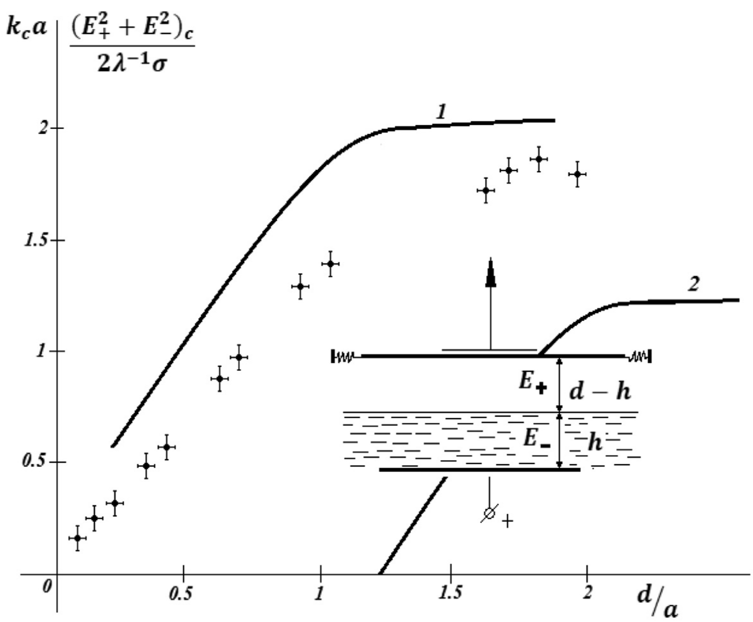

Рис. 1. Свойства заряженного жидкого слоя: 1 – зависимость безразмерного критического параметра, связанного с половиной (для удобства) суммы квадратов напряженностей электрического поля в случае заряженного полупространства от её толщины в капиллярных длинах: $\frac{d}{a}$; 2 – зависимость безразмерного критического волнового числа $k_c a$ от безразмерной толщины. Здесь $a = \frac{\sigma}{\rho g}$ – капиллярная постоянная.

Отметим интересный результат, следующий как из решения системы (5), так и из анализа рис. 1: обращение волнового числа при некотором значении $d = d_0$ в нуль. Вблизи порога d_0 критическое волновое число меняется по следующему закону:

$$k_c^2 = \frac{d^2 - d_0^2}{a^2 d^2}, \ d_0 = \sqrt{3}a. \tag{6}$$

Заметим также, что в области $\frac{d}{d_0} < 1$ заметно уменьшается и критическое поле:

$$\left(E_+^2 + E_-^2\right)_c \cong 4\pi\rho g d. \tag{7}$$

Анализ несимметричного случая не меняет качественных заключений (6–7). Неустойчивость перемещается в область малых волновых чисел, и критические параметры «падают» до тех пор, пока в действие не вступают силы Ван-дер Ваальса.

3. Рассмотрим в приближении невязкой, нетеплопроводной, несжимаемой идеальной жидкости задачу об устойчивости в однородном электростатическом поле E_0 капиллярных волн в заряженном зарядом Q слое жидкости толщины $h = R - R_0$ ($h << R_0$) на поверхности твёрдого сферического ядра радиуса R_0. Внешнюю среду примем непроводящей, с диэлектрической проницаемостью равной единице, невязкой, несжимаемой, нетеплопроводной.

Пусть в жидкой плёнке и окружающей среде существуют волновые движения малой амплитуды с потенциалами скоростей $\Phi_j(r, \theta, \varphi,)$ ($j = 1$ – внутри плёнки, $j = 2$ – во внешней среде), приводящие к искажению формы плёнки:

$$r(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t) \ \ |\zeta| \ll h.$$

Потенциалы Φ_j, а также потенциал Φ электростатического поля вне капли, являются гармоническими функциями:

$$\Delta\Phi_j = 0 \ \ j = 1,2 \ \ \Delta\Phi = 0, \tag{8}$$

удовлетворяющими следующим граничным условиям:

$$r = R_0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0. \tag{9}$$

$$r = R + \zeta, \ \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{10}$$

$$\Delta p = -\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - p_h + p_E = -\frac{\sigma}{R^2}(2 + L)\zeta. \tag{11}$$

$$C\Phi = Q, \tag{12}$$

где ρ_j – плотности жидкости и среды, p_E – давление электрического поля на свободную поверхность жидкости, возникающее из-за наличия внешнего поля E_0

и собственного заряда Q на жидком слое, C = C(R + ζ) – электроёмкость капли, зависящая от её формы, $\vec{n}_j$ – орты внешней (j = 1) и внутренней (j = 2) нормалей к свободной поверхности жидкости. Так как $|\zeta| << h$, то граничные условия (10)–(11) отнесём к невозмущённой поверхности $r = R$, как это принято в теории волн малой амплитуды [9]. В этом приближении производные по нормали в (10) сведутся к производным по радиальной координате. Угол θ будем отсчитывать от направления поля $\vec{E}_0$. Принимая временную зависимость для потенциалов в виде $\Phi_j = \exp(-i\omega t)$, из (11) с учётом (10) получаем:

$$\left(\rho_1\Phi_1-\rho_2\Phi_2\right)\omega^2-\frac{\partial p_h}{\partial t}+\frac{\partial p_E}{\partial t}+\frac{\sigma}{R^2}\left(2+L\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0. \quad (13)$$

Выражение для частной производной по времени от давления электрического поля на поверхность жидкого слоя в линейном по $\frac{\zeta}{R}$ приближении запишется в виде [6]:

$$r=R \qquad \frac{\partial p_E}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}G$$

$$G=\sum_n\frac{1}{R}\left[\frac{Q}{R^2}+3E_0\cos\theta\right]\left(n+1\right)\frac{\partial F_n}{\partial t}Y_n\left(\cos\theta\right)-$$

$$-\left[\frac{2Q^2}{R^5}+\frac{12QE_0}{R^3}\cos\theta+\frac{18E_0^2}{R}\cos^2\theta\right]\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial t}=\frac{Q}{R^2}\int_0^\pi\frac{\partial\zeta}{\partial t}Y_n\left(\cos\theta\right)d\left(-\cos\theta\right)+$$

$$+3E_0\int_0^\pi\frac{\partial\zeta}{\partial t}\cos\theta Y_n\left(\cos\theta\right)d\left(-\cos\theta\right). \quad (14)$$

Здесь $Y_n(\cos\theta)$ – нормированные полиномы Лежандра.

Для расклинивающего давления в форме (1) константа определена лишь по порядку величины $A = 10^{-13}$ эрг [41]. Тогда, с учётом наличия возмущения поверхности $p_h=\frac{A}{\left(h+\zeta\right)^3}$, выразим $\frac{\partial p_h}{\partial t}$ с учётом (10) при $|\zeta| << h$:

$$r=R \qquad \frac{\partial p_h}{\partial t}=-\frac{3A}{\left(h+\zeta\right)^4}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\approx-\frac{3A}{h^4}\frac{\partial\Phi}{\partial r}. \quad (15)$$

Потенциалы скоростей будем искать в виде разложений:

$$\Phi_1\left(r,\theta\right)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_nr^n+D_nr^{-(n+1)}\right)Y_n\left(\cos\theta\right),$$

$$\Phi_2\left(r,\theta\right)\sim\sum_{n=0}^{\infty}B_nr^{-(n+1)}Y_n\left(\cos\theta\right). \quad (16)$$

Учтём, что мода капиллярных волн с $n = 0$ соответствует радиальным колебаниям, невозможным в несжимаемой жидкости, а мода с $n = 1$ – поступательному движению системы, не принимаемому во внимание в настоящем рассмотрении. Поэтому $A_0 = B_0 = D_0 = A_1 = B_1 = D_1 = 0$.

Из (9)–(10) несложно найти рекуррентные соотношения, связывающие остальные коэффициенты разложений (16):

$$D_n = A_n \frac{n}{n+1} R^{2n+1}$$

$$B_n = -A_n \frac{n}{n+1} R^{2n+1} \left(1-\nu_n\right) \quad \nu_n = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+1} \quad n \geq 2. \qquad (17)$$

Подставляя (16) с учётом (17) в (13)–(15), приходим к соотношению:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Big\{ \Omega^2 \beta_n C_n + W^2 n(n-1) C_n + \chi W \Big[(n-1)(2n-3)\mu_n C_{n-1} +$$

$$+ (n+1)(2n-1)\lambda_n C_{n+1} \Big] + \chi^2 \Big[d_n (n-2)^2 C_{n-2} + a_n (n+2) n C_{n+2} +$$

$$+ \left(n^2 b_n - 2n\mu_n^2\right) C_n \Big] - C_n \Big[E_n - \left(1-\nu_0\right)^{-4} n\varsigma \Big] \Big\} Y_n(\cos\theta)$$

$$\Omega^2 = \omega^2 \rho_1 R^3 \sigma^{-1} \quad \beta_n = \frac{1+n+n\nu_n}{(1+n)(1-\nu_n)} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{n}{n+1} \quad C_n = A_n R^n \left(1-\nu_n\right)$$

$$W^2 = \frac{Q^2}{16\pi R^3} \quad \chi^2 = \frac{9}{4\pi}\frac{E_0^2 R}{\sigma} \quad \mu_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}} \quad \lambda_n = \frac{n+1}{\sqrt{4(n+1)^2-1}}$$

$$d_n = \mu_n \mu_{n-1} \quad a_n = \lambda_n \lambda_{n+1} \quad b_n = \mu_n^2 + \lambda_n^2 \quad E_n = n(n-1)(n+2) \quad \varsigma = \frac{3A}{R^2\sigma} \qquad (18)$$

Используя ортогональность полиномов Лежандра, приравняем в (18) нулю коэффициенты при полиномах различных порядков и получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов C_n:

$$C_{n-2}K_n^1 + C_{n-1}K_n^2 + C_n\left(\beta_n - K_n^3\right) + C_{n+1}K_n^4 + C_{n+2}K_n^5 = 0, \qquad (19)$$

где

$$K_n^1 = (n-2)^2 d_n \chi^2 \quad K_n^2 = (n-1)(2n-3)\mu_n \chi W$$

$$K_n^3 = E_n + n\left(1-\nu_0\right)^{-4} \varsigma - n(n-1)W^2 - \left(n^2 b_n - 2n\mu_n^2\right)\chi^2$$

$$K_n^4 = (n+1)(2n-1)\lambda_n \chi W \quad K_n^5 = n(n+2)a_n \chi^2$$

Условием разрешимости однородной системы (19) является равенство нулю определителя, составленного из её коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} \beta_2\Omega^2 - K_2^3 & K_2^4 & K_2^5 & 0 & 0 & \ldots \\ K_3^2 & \beta_3\Omega^2 - K_3^3 & K_3^4 & K_3^5 & 0 & \ldots \\ K_4^1 & K_4^2 & \beta_4\Omega^2 - K_4^3 & K_4^4 & K_4^5 & \ldots \\ 0 & K_5^1 & K_5^2 & \beta_5\Omega^2 - K_5^3 & K_5^4 & \ldots \\ 0 & 0 & K_6^1 & K_6^2 & \beta_6\Omega^2 - K_6^3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Это соотношение представляет собой ничто иное, как дисперсионное уравнение относительно Ω^2, определяющее спектр капиллярных волн в слое жидкости как функцию характеристик системы: W, χ, ς, ν_0. В зависимости от величины этих параметров изменяется и дисперсионный спектр, при этом некоторые из решений Ω_j^2 могут, проходя через ноль, стать отрицательными, что соответствует появлению мнимых частот и экспоненциально растущих со временем мод капиллярных волн. Последнее, естественно, связано с проявлением неустойчивости. Условием же появления нулевых решений дисперсионного уравнения является обращение в ноль его свободного коэффициента:

$$\begin{vmatrix} -K_2^3 & K_2^4 & K_2^5 & 0 & 0 & \ldots \\ K_3^2 & -K_3^3 & K_3^4 & K_3^5 & 0 & \ldots \\ K_4^1 & K_4^2 & -K_4^3 & K_4^4 & K_4^5 & \ldots \\ 0 & K_5^1 & K_5^2 & -K_5^3 & K_5^4 & \ldots \\ 0 & 0 & K_6^1 & K_6^2 & -K_6^3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

Важно отметить, что появление неустойчивых мод капиллярных волн в рассматриваемой задаче связано именно с переходом решения через ноль, то есть порождается транскритической (асимметричной) бифуркацией. Система (19) и, соответственно, уравнение (21) также будут бесконечного порядка. Поэтому критические условия появления неустойчивости капиллярных волн целесообразно искать методом последовательных приближений. Но некоторые выводы о решениях (21) можно сделать сразу. Так, из (19) видно, что отношение радиусов $\nu_0 = \dfrac{R_0}{R}$ присутствует только в слагаемом, характеризующем расклинивающее давление. Поэтому ясно, что в случае достаточно толстых слоёв жидкости $h >> 100$ нм, критические условия появления неустойчивости капиллярных волн в используемом приближении идеальной жидкости не будет зависеть от толщины слоя жидкости. Численные расчёты методом последовательных приближений по уравнению (21), представленные на рис. 2, показывают качественный ход критических зависимостей.

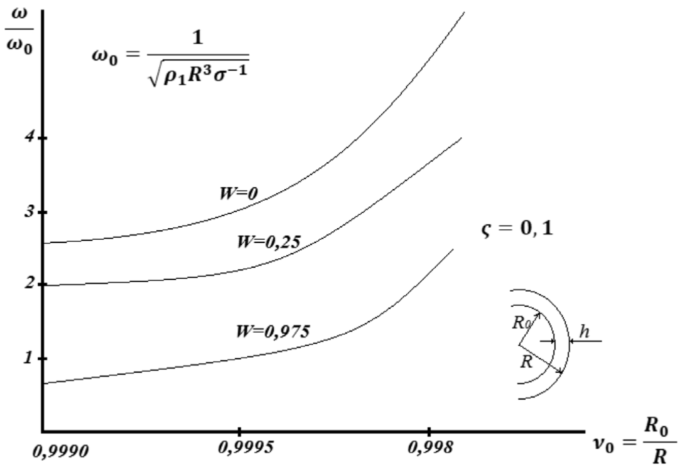

Рис. 2. Зависимость ω от безразмерной толщины плёнки $\nu_0(\varsigma = 0{,}1)$.

Из представленного рисунка видно, что при учёте расклинивающего давления критические параметры системы резко возрастают, что связано с сильной зависимостью p_h от толщины слоя.

Таким образом, приведённый анализ показывает, что учёт расклинивающего давления, как и ожидалось, является существенным при малых толщинах плёнки на поверхности подложки.

Статья поступила в редакцию 27.08.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Woosley J.P., Turnbull R.J., Kim K. Field injection electrostatic spraying of liquid hydrogen // Journal of Applied Physics. 1988. Vol. 64. Iss. 9. pp. 4278–4284.
2. Алиев И.Н., Филиппов А.В. О волнах, распространяющихся по плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94–98.
3. Антонюк П.Н. Дисперсионные уравнения для плоской капиллярно-гравитационной волны на свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 286. № 6. С. 1324–1328.
4. Лазарянц А.Э., Григорьев А.И. Устойчивость заряженного сферического слоя маловязкой жидкости на поверхности твердого ядра // Журнал технической физики. 1990. № 6. С. 29–36.
5. Aliev I.N., Yurchenko S.O., Nazarova E.V. Features of combined instability of a charged interface between moving media // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2007. Vol. 80. Iss. 5. pp. 912–917.
6. Aliev I.N., Yurchenko S.O., Nazarova E.V. On the problem of instability of the boundary of two media of finite thickness // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2007. Vol. 80. Iss. 6. pp. 1199–1205.
7. Алиев И.Н., Юрченко С.О. О нелинейных волнах, распространяющихся на поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2009. № 5. С. 139–150.

8. Алиев И.Н., Юрченко С.О. Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей в зазоре между двумя электродами // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2010. № 5. С. 140–150.
9. Алиев И.Н., Юрченко С.О. О расщеплении и бифуркациях решений дисперсионного уравнения волн малой амплитуды на заряженной поверхности раздела // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2009. № 3(34). С. 28–35.
10. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю. Электромагнитное излучение, создаваемое нелинейными осцилляциями заряженной капли // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. Вып. 3. С. 41–50.
11. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Излучение электромагнитных волн осциллирующей заряженной капли // Электронная обработка материалов. 2015. Т. 51. № 6. С. 23–31.
12. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Квадрупольное электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. Вып. 6. С. 914–920.
13. Дерягин Б.В. Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука. 1986. 205 с.
14. Papageorgiou D.T., Petropoulos P.G. Generation of interfacial instabilities in charged electrified viscous liquid films // Journal of Engineering Mathematics. 2004. No. 50. Iss. 2–3. pp. 223–240.
15. El-Sayed M. Electrohydrodynamic wave-packet collapse and solution instability for dielectric fluids in (2+1)-dimensions // The European Physical Journal B. 2004. Vol. 37. Iss. 2. pp. 241–255.
16. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкости. Л.: Наука. 1975. 592 с.
17. Shikin V.B., Leiderer P. Oscillations and stability of a charged helium surface // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1981. Vol. 54. No. 1. pp. 92–101.
18. Григорьев А.И., Ширяева С.О. О стабилизации капиллярной неустойчивости струи диэлектрической жидкости объемным электрическим зарядом // Электронная обработка материалов. 2009. Т. 45. № 5. С. 9–17.
19. Volodin A.P., Rhaikin M.S., Edel`man S. Development of instability and bubbon productionon on a charged surface of liquid helium // JETP Letters. 1977. Vol. 26. Iss. 10. pp. 543–546.

REFERENCES

1. Woosley J.P., Turnbull R.J., Kim K. Field injection electrostatic spraying of liquid hydrogen. In: *Journal of Applied Physics*, 1988, vol. 64, iss. 9, pp. 4278–4284.
2. Aliev I.N., Filippov A.V. [On waves propagating along a plane surface of a viscous conducting liquid in an electric field]. In: *Magnitnaya gidrodinamika* [Magnetohydrodynamics], 1989, no. 4, pp. 94–98.
3. Antonyuk P.N. [Dispersion equations for a plane capillary-gravitational wave on a free surface of a viscous incompressible fluid]. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Doklady Physics], 1986, vol. 286, no. 6, pp. 1324–1328.
4. Lazaryants A.E., Grigor'ev A.I. [Stability of a charged spherical layer of a low-viscous liquid on the surface of a solid core]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 1990, no. 6, pp. 29–36.
5. Aliev I.N., Yurchenko S.O., Nazarova E.V. Features of combined instability of a charged interface between moving media. In: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2007, vol. 80, iss. 5, pp. 912–917.

6. Aliev I.N., Yurchenko S.O., Nazarova E.V. On the problem of instability of the boundary of two media of finite thickness. In: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics,* 2007, vol. 80, iss. 6, pp. 1199–1205.
7. Aliev I.N., Yurchenko S.O. [On nonlinear waves propagating on the surface of an ideal conducting liquid in an electric field]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2009, no. 5, pp. 139–150.
8. Aliev I.N., Yurchenko S.O. [Evolution of perturbations of a charged surface at the interface between immiscible non-viscous fluids in a gap between two electrodes]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 2010, no. 5, pp. 140–150.
9. Aliev I.N., Yurchenko S.O. [On splitting and bifurcations of solutions to the dispersion equation of small-amplitude waves at a charged interface]. In: *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya "Estestvennye nauki"* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences], 2009, no. 3(34), pp. 28–35.
10. Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu. [Electromagnetic radiation produced by nonlinear oscillations of a charged droplet]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2016, vol. 86, iss. 3, pp. 41–50.
11. Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryaeva S.O. [Radiation of electromagnetic waves of an oscillating charged droplet]. In: *Elektronnaya obrabotka materialov* [Surface Engineering and Applied Electrochemistry], 2015, vol. 51, no. 6, pp. 23–31.
12. Grigor'ev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryaeva S.O. [Quadrupole electromagnetic radiation of an oscillating charged droplet]. In: *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki* [Technical Physics], 2017, vol. 87, no. 6, pp. 914–920.
13. Deryagin B.V. *Teoriya ustoichivosti kolloidov i tonkikh plenok* [The theory of stability of colloids and thin films]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 205 p.
14. Papageorgiou D.T., Petropoulos P.G. Generation of interfacial instabilities in charged electrified viscous liquid films. In: *Journal of Engineering Mathematics*, 2004, no. 50, iss. 2–3. pp. 223–240.
15. El-Sayed M. Electrohydrodynamic wave-packet collapse and solution instability for dielectric fluids in (2+1)-dimensions. In: *The European Physical Journal B,* 2004, vol. 37, iss. 2, pp.241–255.
16. Frenkel' Ya.I. *Kineticheskaya teoriya zhidkosti* [Kinetic theory of fluid]. Leningrad, Nauka Publ., 1975. 592 p.
17. Shikin V.B., Leiderer P. Oscillations and stability of a charged helium surface. In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1981, vol. 54, no. 1, pp. 92–101.
18. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. [On the stabilization of the capillary instability of a jet of a dielectric liquid by a bulk electric charge]. In: *Elektronnaya obrabotka materialov* [Surface Engineering and Applied Electrochemistry], 2009, vol. 45, no. 5, pp. 9–17.
19. Volodin A.P., Rhaikin M.S., Edel`man S. Development of instability and bubbon productionon on a charged surface of liquid helium. In: *JETP Letters*, 1977, vol. 26, iss. 10, pp. 543–546.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алиев Исмаил Новруз оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана; профессор академии военных наук, академик Российской Академии естественных наук; e-mail: alievprof@yandex.ru;

Самедова Зарифа Алышан кызы – аспирант факультета фундаментальных наук кафедры физики Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана; преподаватель МГТУ им. Н.Э. Баумана;
e-mail: samezara@bk.ru;

Копылов Иван Станиславович – студент кафедры физики Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана;
e-mail: i.s.kopylov@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ismail N. Aliev – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University; Professor at the Academy of Military Sciences; Professor at the Russian Academy of Natural Sciences;
e-mail: alievprof@yandex.ru;

Zarifa A. Samedova – postgraduate student at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University; Lecturer;
e-mail: samezara@bk.ru;

Ivan S. Kopylov – student at the Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University;
e-mail: i.s.kopylov@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Алиев И.Н., Самедова З.А., Копылов И.С. Влияние расклинивающего давления на критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2018. № 3. С. 22-33.
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-22-33

FOR CITATION

Aliev I.N., Samedova Z.A., Kopylov I.S. Influence of the disjoining pressure on the critical conditions for the realization of the instability of a charged liquid surface. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 22–33.
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-22-33