РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-6-14

О ПРОЕКТИВНО СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Матвеев О. А., Птицына И. В., Фролов О. В.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Обсуждаются геометрические свойства многообразий аффинной связности нулевой кривизны, имеющих общие геодезические линии с сохранением аффинного (канонического) параметра с локально симметрическими пространствами. Этот класс пространств характеризуется тождествами, которым удовлетворяет тензорное поле кручения и его ковариантные производные. Для этого класса аффинно связных многообразий исследуются геодезические лупы с гомотетиями.

Ключевые слова: многообразия аффинной связности нулевой кривизны, симметрические пространства аффинной связности, геодезическая лупа, параллельные переносы, гомотетия

ON PROJECTIVE SYMMETRIC ZERO CURVATURE MANIFOLDS WITH AFFINE CONNECTION

O. Matveyev, I. Pticina, O. Frolov
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow region, Russian Federation

Abstract. The paper deals with the geometric properties of the zero curvature manifolds with affine connection having common geodesic lines with preservation of the affine (canonical) parameter with locally symmetric spaces of affine connectivity. This class of spaces is characterized by identities satisfied by the torsion tensor field and its covariant derivatives. Geodesic loops with homotheties of this class of affine connected manifolds are investigated.

Keywords: manifolds with affine connection of zero curvature, symmetric spaces with affine connection, a geodesic loop, parallel translations, homothety

Свойства параллельных переносов и гомотетий рассматривались в различных классах пространств аффинной связности, см. например [1–7]. В настоящей работе исследуются пространства постоянной кривизны. Поскольку этот класс пространств очень широк, мы накладываем дополнительное условие, требуем, чтобы пространство имело общие геодезические линии с сохранением аффинного (канонического) параметра с локально симметрическим пространством аффинной связности.

Определение 1. Аффинно связное многообразие (M, ∇) называется локально *просимметрическим* (*проективно симметрическим первого типа*), если оно имеет общие геодезические линии с сохранением аффинного (канонического) параметра с локально симметрическим пространством аффинной связности $(M,\overline{\nabla})$.

Предложение 1. Пусть (M, ∇) – аффинно связное многообразие, T и R – его поля кручения и кривизны. Тогда следующие утверждения (a)–(c) эквивалентны:

(a) (M, ∇) является просимметрическим;

(b) аффинно связное многообразие $(M,\overline{\nabla})$, где $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y)$, является локально симметрическим;

(c) в (M, ∇) выполняется следующее тождество:

$$(\nabla_X \overline{R})(Y,Z,W) + \frac{1}{2}\overline{R}(T(X,Y),Z)W + \frac{1}{2}\overline{R}(Y,T(X,Z))W + \\ + \frac{1}{2}\overline{R}(Y,Z)T(X,W) - \frac{1}{2}T(X,\overline{R}(Y,Z)W) = 0, \qquad (1)$$

где

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2}(\nabla_X T)(Y,Z) + \frac{1}{2}(\nabla_Y T)(X,Z) + \frac{1}{4}T(X,T(Y,Z)) - \\ - \frac{1}{4}T(Y,T(X,Z) + \frac{1}{2}T(Z,T(X,Y)), \qquad (2)$$

X, Y, Z, W – дифференцируемые векторные поля на M.

Предложение 2. Аффинно связное многообразие (M, ∇) просимметрично и имеет нулевую кривизну тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$
\begin{aligned}
&4(\nabla_W\nabla_Z T)(X,Y)-2(\nabla_W T)(X,T(Y,Z))+2(\nabla_W T)(Y,T(X,Z))+\\
&+2(\nabla_Z T)(T(W,X),Y)-2(\nabla_Z T)(T(W,X),Y)-2T(X,(\nabla_W T)(Y,Z)+\\
&+2T(Y,(\nabla_W T)(X,Z)+2(\nabla_{T(W,Z)}T)(X,Y)-2T(W,(\nabla_Z T)(X,Y))-\\
&-T(T(W,X),T(Y,Z))+T(Y,T(T(W,X),Z))-T(T(W,Y),T(X,Z))-\\
&-T(X,T(T(W,Y),Z)-T(X,T(Y,T(W,Z)))+T(Y,T(X,T(W,Z)))+\\
&\qquad+T(W,T(X,T(Y,Z)))-T(W,T(Y,T(X,Z)))=0.
\end{aligned}\tag{3}
$$

Доказательство. Пусть $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T(X,Y)$, тогда тензор кривизны $\overline{R}$ в $(M,\overline{\nabla})$ выражается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&4\overline{R}(X,Z)Z\overset{(2)}{=}-2(\nabla_X T)(Y,Z)+2(\nabla_Y T)(X,Z)+\\
&+T(X,T(Y,Z))-T(Y,T(X,Z))+2T(Z,T(X,Y))=\\
&=2(\nabla_Z T)(X,Y)-T(X,T(Y,Z))+T(Y,T(X,Z))
\end{aligned}\tag{4}
$$

Теперь, используя (4) и (1), получим (3). ▲

Предложение 3. Пусть (M, ∇) – аффинно связное многообразие Муфанг, т. е.

$$R=0,\quad 3(\nabla_Z T)(X,Y)=T(Z,T(X,Y))+T(X,T(Y,Z))+T(Y,T(Z,X)).$$

Тогда (M, ∇) является просимметрическим с нулевой кривизной.

Доказательство. Если положить $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T(X,Y)$, то

$$
\begin{aligned}
&12\overline{R}(X,Z)Z=-T(X,T(Y,Z))-T(Y,T(Z,X))+2T(Z,T(X,Y)),\\
&6(\overline{\nabla}_Z T)(X,Y)=-T(X,T(Y,Z))-T(Y,T(Z,X))-T(Y,T(Z,X)).
\end{aligned}
$$

Ковариантно дифференцируя обе части первого из этих равенств, и, применяя второе равенство, убеждаемся, что $\overline{\nabla}\overline{R}=0$. ▲

Предложение 4. Пусть $(M,\overline{\nabla})$ – локально симметрическое многообразие, и T – тензорное поле, такое, что

$$T(X,Y)=-T(Y,X),\tag{5}$$

$$\overline{R}(X,Y)Z=\frac{1}{2}(\overline{\nabla}_Z T)(X,Y)+\frac{1}{4}T(Z,T(X,Y)).\tag{6}$$

Тогда $(M,\overline{\nabla})$, где $\nabla_X Y=\overline{\nabla}_X Y+\frac{1}{2}T(X,Y)$, является просимметрическим с нулевой кривизной.

Предложение 5. Любое аналитическое просимметрическое многообразие (M, ∇) нулевой кривизны локально определено в достаточно малой окрестности точки $e \in M$ его касательной алгеброй $M_e=\left\langle T_e(M),\left[\ ,\ ,\ \right],*\right\rangle$. Касательная алгебра M_e является тернарной системой Ли с тройной операцией [, ,], связанной с бинарной операцией * следующим тождеством:

$$X*[Z,W,Y]+Y*[W,Z,Y]+Z*[X,Y,W]+W*[Y,Z,X]=0, \tag{7}$$

$$X,\ Y,\ Z,\ W\in T_e(M).$$

Доказательство. Здесь мы изложим только основную идею. Хорошо известно, что симметрическое пространство (M, ∇) локально определяется его касательной тернарной системой Ли. С другой стороны, дифференциальные продолжения уравнения (6) заключаются в следующем тождестве:

$$T(X,\overline{R}(Z,W)Y)+T(Y,\overline{R}(W,Z)X)+T(Z,\overline{R}(X,Y)W)+T(W,\overline{R}(Y,X)Z)=0. \tag{8}$$

Если положить $X*Y=-T(X,Y),\ \ X,Y\in T_e(M),$ то мы получим тождество (7).

Определение 2. Аффинно связное многообразие (M, ∇) называется *проабелевым (проективно плоским первого типа)*, если оно имеет общие геодезические линии с локально плоским пространством $(M,\overline{\nabla}),$ с сохранением аффинного (канонического) параметра.

Предложение 6. Проабелево многообразие является просимметрическим (обратное неверно).

Предложение 7. Пусть (M, ∇) – аффинно связное многообразие, T и R – его поля кручения и кривизны.

Тогда эквивалентны следующие утверждения (a)–(c):

(a) (M, ∇) является проабелевым;

(b) аффинно связное многообразие $(M,\overline{\nabla}),$ где $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T(X,Y),$ является локально плоским многообразием;

(c) в (M, ∇) выполняется следующее тождество:

$$R(X,Y)Z=\frac{1}{2}(\nabla_X T)(Y,Z)-\frac{1}{2}(\nabla_Y T)(X,Z)-\frac{1}{4}T(X,T(Y,Z))+$$
$$+\frac{1}{4}T(Y,T(X,Z))-\frac{1}{2}T(Z,T(X,Y)). \tag{9}$$

Следствие 1. Аффинно связное многообразие (M, ∇) является проабелевым с нулевой кривизной тогда и только тогда, когда выполняется тождество:

$$(\nabla_X T)(Y,Z)-(\nabla_Y T)(X,Z)-\frac{1}{2}T(X,T(Y,Z))+$$
$$+\frac{1}{2}T(Y,T(X,Z))-T(Z,T(X,Y))=0. \tag{10}$$

Замечание. Используя тождества Бианки, убеждаемся, что тождество (10) эквивалентно следующему:

$$2(\nabla_Z Y)(X,Y)=T(X,T(Y,Z))+T(Y,T(Z,X)). \tag{11}$$

Предложение 8. Пусть $(M,\overline{\nabla})$ – локально плоское многообразие (т. е. $\overline{T}=0,\ \overline{R}=0$). Пусть T – тензорное поле на M, такое, что $T(X,\ Y) = -T(Y,\ X)$, и

$$2(\overline{\nabla}_Z T)(X,Y) = T(T(X,Y),Z). \qquad (12)$$

Тогда $(M,\ \nabla)$, где $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}T(X,Y)$, является проабелевым нулевой кривизны.

Следующая схема иллюстрирует взаимное расположение подклассов просимметрических пространств (см. рис. 1).

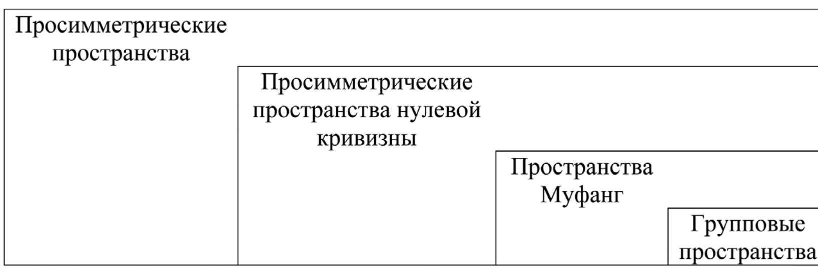

Рис. 1. Расположение подклассов просимметрических пространств.

Определение 3. Геодезическая лупа с гомотетиями $\bar{\mathcal{M}}_e = \left\langle M, S^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ называется симметрической, если локально выполняются следующие тождества (когда одновременно правые и левые части имеют смысл):

$$S^e_{t_e x} \circ S^e_{u_e x} = S^e_{(t+u)_e x} \qquad (13)$$

$$S^e_{S^e_x S^e_y x} = S^e_x \circ S^e_y \circ S^e_x \qquad (14)$$

$$\left(-1\right)_e \circ S^e_x = S^e_{\left(-1\right)_e x} \circ \left(-1\right)_e \qquad (15)$$

$$\overline{l}^{\,e}\left(x,y\right) \circ t_e = t_e \circ \overline{l}^{\,e}\left(x,y\right), \qquad (16)$$

где $\overline{l}^{\,e}\left(x,y\right) = \left(S^e_{S^e_x y}\right)^{-1} \circ S^e_x \circ S^e_y$.

Замечание. Тождество (14) в теории квазигрупп и луп называется левым тождеством Бола.(см.,например, [2; 8]).

Предложение 9. Пространство аффинной связности является симметрическим, если и только если все его локальные геодезические лупы с гомотетиями симметрические.

Определение 4. Геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ называется просимметрической, если $\bar{\mathcal{M}}_e = \left\langle M, S^e, t_e, e\right\rangle$ – симметрическая, где

$$S_x^e = (-1)_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e = L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \circ (-1)_e \circ \left(L^e_{\left(\frac{1}{2}\right)_e x} \right)^{-1} \circ (-1)_e . \qquad (17)$$

Предложение 10. Дифференцируемая просимметрическая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ является просимметрической, если и только если выполняются следующие тождества:

$$(-1)_x \ t_y z = t_w (-1)_x z, \qquad (18)$$

где $w = (-1)_x y$

$$(-1)_x (-1)_a = (-1)_b (-1)_y z, \qquad (19)$$

где $a = t_x y, b = t_y x$.

Замечание. Тождество (19) эквивалентно следующему соотнощению:

$$(-1)_{(t+1)_x y} \circ (-1)_{t_x y} = (-1)_y \circ (-1)_x \qquad (20)$$

Очевидно, что просимметрическая геодезическая лупа с гомотетиями является симметрической, обратное неверно.

Предложение 11. Дифференцируемая просимметрическая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ является просимметрической, если и только если она может быть включена в качестве геодезической лупы в просимметрическое аффинно связное многообразие.

Предложение 12. Дифференцируемая просимметрическая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ может быть включена в качестве геодезической лупы в просимметрическое аффинно связное многообразие (M, ∇) нулевой кривизны, если и только если удовлетворяется тождество правой моноальтернативности:

$$L^e_{L^e_x y} t_e y = L^e_x (t+1)_e \ y \Leftrightarrow l^e(x, y) t_e y = t_e y \qquad (21)$$

Замечание. Тождества (21) имеют следующие следствия:

$$(-1)_e \left(L^e_x\right)^{-1} y = \left(L^e_y\right)^{-1} x. \quad \left((x \setminus y)^{-1} = y \setminus x\right). \qquad (22)$$

Действительно, $L^e_{L^e_x z} (-1) z = L^e_x (1-1)_e z = L^e_x e = x.$ Если мы положим

$z = \left(L^e_x\right)^{-1} y,$ то $L^e_x z = y,$ и мы приходим к соотношениям (22).

Предложение 13. Дифференцируемая правомоноальтернативная локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e = \left\langle M, L^e, \{t_e\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ является просимметрической, если и только если удовлетворяются тождества:

$$x_{\dot{e}}\left(\left[\left(x_{\dot{e}}a\right)_{\dot{e}}\left(t_e z\right)\right]\backslash_e\, x\right)=\left(x_{\dot{e}}\left(-1\right)_e a\right)_{\dot{e}} t_e[\left(x_{\dot{e}}\left(-1\right)_e a\right)\backslash_e\, (x_{\dot{e}}\left[\left[\left(x_{\dot{e}}a\right)_{\dot{e}} z \backslash_e x]\right)\right]. \tag{23}$$

$$\left(x_{\dot{e}}a\right)_{\dot{e}}\left[\left(x_{\dot{e}}\left(z \backslash_e \left(x_{\dot{e}}t_e a\right)\right)\right)_{\dot{e}}\left(x_{\dot{e}}a\right)\right]=$$
$$=\left(x_{\dot{e}}\left(t+1\right)_e a\right)_{\dot{e}}\left[\left[\left(x_{\dot{e}}t_e a\right)_{\dot{e}}\left(\left(-1\right)_e z\right)\right]\backslash_e\, x_{\dot{e}}\left(t+1\right)_e a)\right]. \tag{24}$$

Определение 5. Дифференцируемая правомоноальтернативная локальная лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ называется проабелевой, если $\bar{\mathcal{M}}_e=\left\langle M, S^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ (см. (17)) является векторным пространством над полем действительных чисел.

Предложение 14. Дифференцируемая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ является проабелевой, если и только если выполняются тождества:

$$t_x \circ u_y = u_{t_x y} \circ t_x \tag{25}$$

$$v_x \circ \left(\frac{1}{v}\right)_y \circ v_z = v_z \circ \left(\frac{1}{v}\right)_y \circ v_x; \tag{26}$$

$$t, u, v\ \mathbb{R},\ v\neq 0, x, y, z\ M.$$

Предложение 15. Дифференцируемая локальная геодезическая лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ является проабелевой, если и только если выполняются тождества:

$$L^e_x \circ v_e \circ \left(L^e_x\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{v}\right)_e \circ L^e_z \circ v_e \circ \left(L^e_z\right)^{-1} =$$
$$= L^e_z \circ v_e \circ \left(L^e_z\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{v}\right)_e \circ L^e_x \circ v_e \circ \left(L^e_x\right)^{-1} \tag{27}$$

$$m^e\left(z,t\right)\circ u_e = u_e \circ m^e\left(z,t\right); \tag{28}$$

$$l^e \circ \left(x,y\right) u^e = u_e \circ l^e\left(x,y\right), \tag{29}$$

где $m^e\left(z,t\right)=\left(L^e_{t_e z}\right)^{-1}\circ t_e \circ L^e_z$.

Предложение 15. Дифференцируемая локальная лупа с гомотетиями $\mathcal{M}_e=\left\langle M, L^e, \left\{t_e\right\}_{t\in\mathbb{R}}, e\right\rangle$ может быть включена в качестве геодезической лупы с гомотетиями в проективно плоское первого типа (проабелево) пространство аффинной связности нулевой кривизны, если и только если выполняются тождества (21), (27)–(29).

Статья поступила в редакцию 16.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гомотетии и параллельные переносы в проективно симметрических пространствах аффинной связности* / Андроникова Е. О., Дмитриева М. Н., Матвеев О. А., Матвеева Н. В. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2016. № 3. С.8–17.
2. Андроникова Е. О., Матвеев О. А. Левое тождество Бола в теории симметрических пространств аффинной связности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия Физика–математика. 2017. № 3. С. 6–11.
3. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature // Webs and Quasigroups. Tver: Tver State University Press, 2002. P. 78–85.
4. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces // Non-associative algebra and its applications. Vol. 246.A series of lecture notes and applied mathematics / Edited by L Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006. P. 253–260.
5. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Germany: Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 с.
6. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.
7. Sabinin L. V., Matveyev O. A. Geodesic loops and some classes of affinely connected manifolds // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Математика. 1995. №2 (1). С. 135–143.
8. Shelehov A. M. Left Bol three-webs with the IC-property // Russian Mathematics. 2013. Vol. 57. Iss. 5. P. 20–28.

REFERENCES

1. Andronikova E. O., Dmitrieva M. N., Matveyev O. A., Matveeva N. V. [Homotheties and parallel translations in the projective symmetric spaces with affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2016, no. 3, pp. 8–17.
2. Andronikova E. O., Matveyev O. A. [The left Bol identity in the theory of symmetric spaces with affine connection]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya Fizika–matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2017, no. 3, pp. 6–11.
3. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. On the quasigroup properties of prosymmetric spaces with zero curvature. In: *Webs and Quasigroups*. Tver, Tver State University Press, 2002. pp. 78–85.
4. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. The real prosymmetric spaces. In: Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I., ed. *Non-associative algebra and its applications. Vol. 246.A series of lecture notes and applied mathematics*. Boca Raton, FL, USA, CRC Press, Taylor & Francis Group Publ., 2006. pp. 253–260.
5. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim* [Algebraic theory of spaces close to symmetric]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing Publ., 2012. 125 p.
6. Matveyev O. A., Nesterenko E. L. *Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim* [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2012. 132 p.

7. Sabinin L. V., Matveyev O. A. [Geodesic loops and some classes of affinely connected manifolds]. In: *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya Matematika* [Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Mathematics Series], 1995, no. 2 (1), pp. 135–143.
8. Shelehov A. M. Left Bol three-webs with the IC-property. In: *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, iss. 5, pp. 20–28.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Птицына Инга Вячеславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математический анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: inpt@mail.ru;

Фролов Олег Викторович – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: frol3661@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg A. Matveyev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

Inga V. Pticina – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: inpt@mail.ru

Oleg V. Frolov – student of the Physical and Mathematical Department, Moscow Region State University;
e-mail: frol3661@gmail.com.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Матвеев О. А., *Птицына И. В.*, *Фролов О. В.* О проективно симметрических многообразиях аффинной связности нулевой кривизны // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 3. С. 6–14.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-6-14

FOR CITATION

Matveyev O. A., Pticina I. V., Frolov O. V. On projective symmetric zero curvature manifolds with affine connection. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 6–14.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-6-14