

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 530.145

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-15-27

КУЛОНОВСКИЕ ПОПРАВКИ К ВЕРОЯТНОСТИ ИОНИЗАЦИИ ДВУМЕРНОГО АТОМА СУПЕРПОЗИЦИЕЙ ПОСТОЯННОГО И ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Эминов П. А.¹, Соколов В. В.²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, Российская Федерация

² МИРЭА – Российский технологический университет
119454, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78, Российская Федерация

Аннотация. Исследован процесс нелинейной ионизации двумерной наноструктуры с действующим кулоновским потенциалом суперпозицией постоянного и переменного электрических полей. В адиабатическом приближении вычислена вероятность ионизации двумерного атома с учётом кулоновской поправки. Изучена зависимость вклада кулоновского поля в скорость ионизации от отношения напряжённостей постоянного и переменного электрических полей в процессе многофотонной ионизации атома. Получено аналитическое выражение для вероятности ионизации двумерного атома постоянным электрическим полем с учётом кулоновской поправки.

Ключевые слова: ионизация; метод мнимого времени; двумерный атом

COULOMB CORRECTIONS TO THE IONIZATION PROBABILITY OF A TWO-DIMENSIONAL ATOM BY A SUPERPOSITION OF CONSTANT AND ALTERNATING ELECTRIC FIELDS

P. Eminov¹, V. Sokolov²

¹ National Research University 'Higher School of Economics'
ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation

² MIREA – Russian Technological University
prosp. Vernadskogo 78, 119454 Moscow, Russian Federation

© СС ВУ Эминов П. А., Соколов В. В., 2019.

Abstract. The process of nonlinear ionization of a two-dimensional nanostructure with a long-range Coulomb potential by a superposition of constant and alternating electric fields is investigated. In the adiabatic approximation, the ionization probability of a two-dimensional atom is calculated taking the Coulomb correction into account. The dependence of the contribution of the Coulomb field to the ionization rate on the ratio of the strengths of constant and alternating electric fields in the process of multiphoton ionization of an atom is investigated. An analytical expression is obtained for the ionization probability of a two-dimensional atom by a constant electric field, taking the Coulomb correction into account.

Keywords: *ionization*, imaginary time method, two-dimensional atom

Введение

За последние два десятилетия в изучении электронных свойств наноструктур в интенсивных внешних полях наблюдается существенный прогресс. Интерес к таким исследованиям обусловлен потребностями физики и техники низкоразмерных систем, созданием мощных источников когерентного излучения, а также развитием на основе теории Келдыша аналитических [1–7] и численных [8–10] методов изучения процесса нелинейной ионизации атомов интенсивным внешним полем с учётом дальнедействующего характера кулоновского поля ядра [6]. К одной из важных задач, рассмотренных в этой области, можно отнести исследование процесса нелинейной ионизации внешними электромагнитными полями одномерных [11] и двумерных [12–14] структур с короткодействующим удерживающим потенциалом.

В двумерных наноструктурах реализуются также состояния с дальнедействующим кулоновским потенциалом [15–17]. Примером такой системы является электрон в узкой квантовой яме, локализованный на доноре, который в общем случае располагается в барьере. В предельном случае, когда донор располагается в центре ямы, потенциал взаимодействия электрона с донором имеет вид двумерного кулоновского потенциала. Другим примером физической системы, моделируемой двумерным атомом водорода, является структура с двумя узкими квантовыми ямами, в которой возбуждается пространственно-непрямой экситон, образованный электроном в одной яме и дыркой в другой. Физические свойства таких структур с двумерным кулоновским взаимодействием подробно рассматриваются в работе [15].

В настоящей работе проводится исследование процесса ионизации двумерного водородоподобного атома суперпозицией постоянного и переменного электрических полей с учётом дальнедействующего кулоновского взаимодействия вырываемого электрона с атомным ядром. Влияние кулоновского взаимодействия на ионизацию двумерного атома описывается на основе квазиклассической теории возмущений для действия и метода мнимого времени [3–6]. Для укороченного действия за нулевое приближение принимаются траектория и действие для электрона в двумерной квантовой точке с короткодействующим удерживающим потенциалом в рассматриваемой конфигурации внешнего ионизирующего поля [12–14].

В работе используется атомная система единиц, где $e = m = \hbar = 1$ [6].

Скорость ионизация двумерного атома водорода интенсивным внешним полем с учётом кулоновской поправки

Векторный потенциал результирующего электрического поля выберем в виде:

$$A(t) = \left(\frac{F_2 \sin \omega t}{\omega} + F_1 t, 0, 0 \right) \quad (1)$$

Здесь F_1 – напряжённость постоянного электрического поля, F_2 – амплитуда напряжённости переменного электрического поля с частотой ω . Экстремальная подбарьерная траектория, описывающая движение электрона в мнимом времени, описывается формулой:

$$x_0(\tau) = \frac{1}{2} F_1 (\tau_0^2 - \tau^2) + \frac{F_2}{\omega^2} [ch(\omega \tau_0) - ch(\omega \tau)], \tau = -it. \quad (2)$$

Координата начальной точки подбарьерного движения и начальная скорость электрона в момент выхода из-под барьера равны нулю, а комплексный начальный момент времени t_0 для подбарьерного движения определяется из уравнения:

$$\left(p_x + F_1 t_0 + \frac{F_2 \sin(\omega t_0)}{\omega} \right)^2 + p_y^2 - 2E_0 = 0, \quad (3)$$

где $E_0 = -\frac{\kappa^2}{2}$ – энергия электрона в начальном состоянии. В дальнейшем пред-

полагается выполнение условий:

$$\frac{F_1 + F_2}{\kappa^3} \ll 1, \quad \omega \ll \frac{\kappa^2}{2},$$

которые необходимы для возможности квазиклассического рассмотрения задачи. Для экстремальной траектории $p_x = p_y = 0$ и из формулы (3) следует, что величина $u_0 = \omega t_0$ находится из уравнения:

$$sh u_0 + \frac{F_1}{F_2} u_0 = \gamma, \quad (4)$$

где введён параметр Келдыша $\gamma = \frac{\kappa \omega}{F_2}$ для переменного электрического поля [1].

Ширина туннельного барьера определяет координату точки, из которой начинает своё движение электрон после выхода из-под барьера:

$$b = x_0(\tau = 0) = \frac{F_2}{\omega^2} [ch u_0 - 1] + \frac{F_1}{2\omega^2} u_0^2. \quad (5)$$

Из приведённых формул следует, что в предельных случаях, когда $\gamma \ll 1$ или $\ln 2\gamma \gg 1$, ширина барьера велика по сравнению с размером связанного состояния атома, который оценивается величиной порядка κ^{-1} , что необходимо для применимости квазиклассического приближения.

Кулоновское взаимодействие между вылетающим электроном и ядром будем учитывать по теории возмущений. Скорость ионизации атома с учётом кулоновского взаимодействия представляется в виде [3–5]:

$$w = w_0 \exp[-2\text{Im}(\Delta S_1 + \Delta S_2)], \quad (6)$$

где w_0 – вероятность ионизации двумерного атома с удерживающим потенциалом нулевого радиуса действия, которая в квазиклассическом приближении определяется формулами (55–56) работы [13].

Обоснование формулы (6) даётся также и в работе [18], где сообщается об удовлетворительном согласии результатов проведённых экспериментов по нелинейной ионизации атомов в переменном электрическом поле именно с теорией Переломова-Попова-Терентьева [3–6].

Учёт кулоновского взаимодействия между вылетающим электроном и ядром атома приводит к двум поправкам к мнимой части укороченного действия в показателе экспоненты формулы (6). За счёт энергии кулоновского взаимодействия возникает поправка:

$$\Delta S_1 = \int_0^{t_0} U_c(x_0(t)) dt = -i \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\frac{F_2}{\omega^2} (chu_0 - chu) + \frac{1}{2} F_1 (\tau^2_0 - \tau^2)}, \quad (7)$$

где интеграл вычисляется вдоль невозмущённой кулоновским полем траектории подбарьерного движения (2), а величина τ_0 определяется формулой (4). Вторая поправка ΔS_2 учитывает влияние кулоновского поля на закон движения электрона (подробнее см. [3–5]).

Сначала рассмотрим случай адиабатического приближения, то есть предельный случай малых значений параметра Келдыша, который реализуется при ионизации атомов излучением инфракрасного или оптического диапазонов длин волн. В этом приближении влияние кулоновского поля на процесс ионизации определяется энергией кулоновского взаимодействия, то есть мнимой частью величины ΔS_1 в формуле (6). В адиабатическом приближении:

$$u_0 = \omega \tau_0 = \frac{\gamma F_2}{F_1 + F_2} \leq \gamma \ll 1,$$

причём для подбарьерного движения $0 \leq \tau \leq \tau_0$.

Тогда из формулы (7) следует:

$$\Delta S_1 \approx -\frac{2i}{F_1 + F_2} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau^2_0 - \tau^2}. \quad (8)$$

Интеграл (8) регуляризуется методом, предложенным в работе [3]. Он основан на использовании асимптотики волновой функции свободного атома, которая при условии $kr \gg 1$ для состояний двумерного атома водорода с нулевым значением азимутального квантового числа имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi(r) &\sim \frac{1}{\sqrt{r}} (\kappa r)^{n^*} \exp(-\kappa r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp[-\kappa r - n^* \ln(\kappa r)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \exp[-\operatorname{Im}[S_0(r) + \Delta S(r)]],\end{aligned}\quad (9)$$

где $n^* = \frac{Z}{\kappa}$ – эффективное главное квантовое число, Z – заряд ядра. Заметим, что

в трёхмерном случае $\psi(r) \sim \frac{1}{r} (\kappa r)^{n^*} \exp(-\kappa r)$.

Правую часть формулы (8) представляем в виде суммы двух интегралов по отрезкам $[0, \tau_1]$ и $[\tau_1, \tau_0]$, где параметр τ_1 удовлетворяет условию:

$$\kappa^{-1} \ll x(\tau_1) \ll b = x_0(\tau = 0). \quad (10)$$

Во второй области выполняются условия $x(\tau) < x(\tau_1) \ll b$, то есть влиянием внешнего поля на подбарьерное движение электрона можно пренебречь. Мнимая часть действия, набираемого за этот промежуток времени, определяется асимптотикой (9) волновой функции, а первый интеграл вычисляется точно.

В итоге получаем следующее выражение для первого множителя в полной кулоновской поправке в формуле (6):

$$G_1 = \exp(-2 \operatorname{Im} \Delta S_1) = \exp\left(2n^* \ln \frac{2F_0}{F_2 + F_1}\right) = \left(\frac{2F_0}{F_2 + F_1}\right)^{2n^*}, \quad (11)$$

где $F_0 = \kappa^3$ – напряжённость характерного электрического поля ядра атома для уровня с потенциалом ионизации $I = \frac{\kappa^2}{2}$.

Используя далее результат (67) работы [13] для вероятности процесса в предельном случае удерживающего потенциала нулевого радиуса действия, из формулы (6) получаем скорость ионизации двумерного атома водорода в адиабатическом приближении:

$$\begin{aligned}w &= \frac{\kappa^2}{2} \sqrt{3} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{F_0}{F_1 + F_2}\right) \left(\frac{2F_0}{F_1 + F_2}\right)^{2n^*-1} \left(\frac{F_1 + F_2}{F_2}\right)^{1/2}, \\ &F_1 > F_2, \quad \frac{F_0 F_2}{(F_1 + F_2)^2} \gg 1, \quad \frac{\kappa \omega}{F_2} \ll 1.\end{aligned}\quad (12)$$

Таким образом, в адиабатическом приближении кулоновская поправка к мнимой части укороченного действия приводит к увеличению вероятности процесса в $\left[\frac{2F_0}{F_1 + F_2}\right]^{2n^*}$ раз. Как и в трёхмерном случае, этот эффект объясняется

тем, что кулоновское поле понижает барьер, через который туннелирует электрон. С другой стороны, следует отметить, что увеличение ширины потенци-

ального барьера (5) по сравнению со случаем, когда ионизация происходит под влиянием постоянного или переменного электрических полей по отдельности, приводит к уменьшению кулоновской поправки (11).

Обратимся далее к случаю больших значений параметра Келдыша и рассмотрим вторую часть кулоновской поправки к укороченному действию, которая учитывает влияние кулоновского поля ядра на закон движения электрона. Если $x_1(t)$ – кулоновская поправка к траектории электрона, то соответствующая поправка к действию определяется формулой [3–5]:

$$\Delta S_2 = \int_{t_0}^0 \left[\frac{dx_0}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 - x_1 (F_1 + F_2 \cos(\omega t)) \right] dt - \left(\frac{dx_0}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_1}{dt} x_0 + \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} \right) \Big|_{t=t_0}, \quad t_0 = i \frac{u_0}{\omega}. \quad (13)$$

Для учёта влияния кулоновского взаимодействия на вероятность фотоионизации по теории возмущений в работах [4–5] используется описание движения частицы в реальном времени методом Капицы в быстро осциллирующем поле, а также решение уравнения движения электрона внутри барьера в мнимом времени с ненулевой скоростью в точке выхода из-под барьера.

Здесь следует обсудить вопрос о возможности применения метода Капицы к задаче о движении электрона при одновременном учёте влияния кулоновского поля и суперпозиции переменного и постоянного электрических полей. В методе Капицы под большой понимается частота переменного поля, удовлетворяющая условию $\nu \gg \frac{1}{T}$, где T – порядок величины периода движения, которое частица

совершала бы в не зависящем от времени поле [19]. В нашем случае наличие постоянного электрического поля нарушает финитность движения. Для применимости метода Капицы должно выполняться также дополнительное условие, которое состоит в малости напряжённости F_1 постоянного электрического поля по сравнению с напряжённостью кулоновского поля в точке выхода электрона из-под барьера:

$$F_1 \ll \frac{Z}{b^2}. \quad (14)$$

При многофотонной ионизации атома, когда $\gamma \gg 1$, $\ln 2\gamma \gg 1$, если также выполнено условие:

$$\frac{F_1 (\ln(2\gamma))^2}{2F_2 \gamma} \leq 1,$$

ширина барьера (5) оценивается формулой:

$$b \approx \frac{\kappa}{\omega} \left[1 + \frac{F_1 (\ln(2\gamma))^2}{2F_2 \gamma} \right].$$

Тогда, из формулы (14) получаем следующее ограничение на величину напряжённости постоянного электрического поля:

$$\frac{F_1}{F_0} \ll \frac{\mu}{2K_0}, \quad (15)$$

где $K_0 = \frac{\kappa^2}{2\omega}$ – параметр многоквантовости, $\mu = \frac{Z\omega}{\kappa^3}$ – параметр, определяющий

влияние кулоновского поля на процесс ионизации атома. Согласно экспериментальным данным [4], для случая ионизации положительного иона ксенона Xe^{5+} при энергии фотона $\hbar\omega = 12,7$ эВ, амплитуде переменного поля $F_2 \simeq 0,0044F_0$, $K_0 \simeq 5,67$, $\mu \simeq 0,230$, $\gamma = 20$, из формулы (15) для напряжённости постоянного электрического поля получаем оценку $F_1 \ll 0,002F_0$. Таким образом, в случае многоквантовой ионизации атома условие (14) может выполняться в достаточно широкой области параметров, определяющих характер протекания процесса.

С учётом (14) подбарьерное движение электрона в мнимом времени описывается уравнением:

$$\frac{d^2\xi}{du^2} = \frac{\mu}{\alpha^3\xi^2} - \frac{1}{\alpha\gamma} \left[chu + \frac{F_1}{F_2} \right], \quad (16)$$

решение которого удовлетворяет условиям:

$$\frac{d\xi}{du}(u=0) = i\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha^3}}, \quad \xi(u=0) = 1.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad u = -i\omega t, \quad \alpha = \frac{b}{b_0}, \quad b_0 = \frac{\kappa}{\omega}, \quad \mu = \frac{Z\omega}{\kappa^3},$$

а параметр b определяется формулой (5).

Решение уравнения (16) можно найти в виде разложения в ряд по малому кулоновскому параметру:

$$\xi(u) = \xi_0(u) + \mu\xi_1(u) + \dots,$$

где $\xi_0(u)$ – решение уравнения (16) для $\mu = 0$, которое описывается формулой (2).

При выполнении условия (14) минимальный начальный импульс p_0 , который необходим электрону для преодоления кулоновского притяжения в надбарьерном движении, усреднённом по быстрым осцилляциям, определяется формулой:

$$p_0 = \kappa\sqrt{\frac{2\mu}{\alpha}}, \quad t = 0, \quad (17)$$

которая в мнимом времени определяет первое из начальных условий в (16). Для сравнения отметим, что для экстремальной траектории $\xi_0(u)$ (2) в момент $\tau = 0$ выхода из-под барьера скорость электрона равна нулю.

Далее, используя решение уравнения (16), отвечающее импульсу p_0 электрона в момент времени $\tau = 0$, вычисляем с учётом (3) величину ΔS_2 по формуле (13). Эта процедура эффективно сводится к замене [4; 5]:

$$p_x^2 \rightarrow p_x^2 + p_0^2$$

в формуле для импульсного распределения вероятности процесса ионизации, которая в интересующем нас случае двумерной квантовой точки с короткодействующим удерживающим потенциалом, как это показано в работах [12–14], имеет следующий вид:

$$dW = P \exp \left\{ -g(F_2, F_1, \kappa, \tau_0, \omega) - \frac{1}{\omega} (\lambda p_x^2 + u_0 p_y^2) \right\} \frac{dp_x dp_y}{(2\pi)^2}, \quad (18)$$

где приняты обозначения:

$$g = \kappa^2 \tau_0 - \frac{F_1^2 \tau_0^3}{3} + \left(\frac{F_2}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega \tau_0}{2} - \frac{sh 2\omega \tau_0}{4} \right) + \frac{2F_1 F_2}{\omega^2} [sh \omega \tau_0 - (\omega \tau_0) ch \omega \tau_0], \quad (19)$$

$$\lambda = u_0 - \frac{\gamma}{chu_0 + F_1 / F_2}, \quad (20)$$

а величина u_0 связана с параметром Келдыша и отношением напряжённостей постоянного и переменного полей согласно формуле (4).

Таким образом, в формуле (6) поправка к скорости ионизации двумерного атома, возникающая в результате возмущения траектории движения электрона кулоновским полем в суперпозиции постоянного и переменного электрических полей, определяется формулой:

$$G_2 = \exp[-2 \operatorname{Im} \Delta S_2] \approx \exp \left(-\frac{2\lambda \mu \kappa^2}{\omega \alpha} \right). \quad (21)$$

В современных источниках ультрафиолетового и рентгеновского излучения, в которых используются лазеры на свободных электронах, характерные значения параметра Келдыша γ могут находиться в интервале 30–100 [6]. В предельном случае, когда:

$$\ln(2\gamma) \gg 1, \quad (22)$$

из формулы (21) находим:

$$G_2 \approx \exp \left\{ -\frac{2Z}{\kappa} \ln(2\gamma) \frac{1}{\left(1 + \frac{F_1}{\gamma F_2} \right) \left(1 + \frac{F_1 \ln^2(2\gamma)}{\gamma F_2} \right)} \right\} \leq 1. \quad (23)$$

Как это следует из (23), с ростом напряжённости постоянного электрического поля наблюдается увеличение вклада кулоновского взаимодействия в скорость многофотонной ионизации атома, описываемого множителем G_2 . Считая, что наряду с (22) выполняется также условие:

$$\frac{F_1 \ln^2(2\gamma)}{\gamma F_2} \ll 1, \quad (24)$$

из формулы (23) получаем:

$$G_2 = \exp\left\{-\frac{2Z}{\kappa} \ln(2\gamma)\right\} = (2\gamma)^{-2n^*}. \quad (25)$$

Формула (25), полученная в предельных случаях (22) и (24) из нашего результата (21) для суперпозиции постоянного и переменного электрических полей, совпадает с множителем Q_1 , описывающим вклад в вероятность многофотонной ионизации трёхмерного атома водорода в поле электромагнитной волны за счёт искажения кулоновским полем траектории электрона (см., например, формулу (23) работы [4]).

В случае постоянного электрического поля, совершая предельные переходы $F_2 \rightarrow 0$ в формуле (11) и, соответственно, $\omega \rightarrow 0$, $F_2 \rightarrow 0$ в формуле (21), с учётом результата (61) работы [13], получаем вероятность ионизации двумерного атома водорода в постоянном электрическом поле с напряжённостью F_1 с учётом кулоновской поправки:

$$w = \sqrt{\pi} \kappa^2 \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{2F_0}{3F_1}\right). \quad (26)$$

Заметим, что преэкспоненциальный множитель в формуле для скорости ионизации атома водорода в постоянном электрическом поле в трёхмерном случае пропорционален параметру $\frac{F_0}{F_1} \gg 1$ [20], а показатель экспоненты в том же квазиклассическом приближении такой же, как и в формуле (26). Таким образом, эффект размерного ограничения движения вырываемого электрона приводит к существенному увеличению вероятности ионизации атома водорода за единицу времени.

Можно, как это сделано в работе [4] в трёхмерном случае, предложить интерполяционную формулу для вероятности ионизации двумерного атома водорода в переменном электрическом поле при произвольных значениях параметра Келдыша. Для этого воспользуемся результатом работы [21], который показывает, что в отличие от одномерного [11] и трёхмерного случая [3-5], парциальная вероятность ионизации при поглощении n фотонов волны для случая удерживающего двумерного потенциала конечного радиуса действия допускает проведение точного суммирования по квантовому числу n .

В итоге, с учётом формулы (16) работы [21], для скорости ионизации двумерного атома водорода переменным электрическим полем при произволь-

ных значениях параметра Келдыша находим следующую интерполяционную формулу:

$$w = \frac{\kappa^2}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \left(\frac{2F_0}{F_2} \right)^{2n^*} (1 + 2e^{-1}\gamma)^{-2n^*} \exp \left[-\frac{2\omega_0}{\omega} \left[\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \text{Arsh}\gamma - \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{2\gamma} \right] \right] \quad (27)$$

$$\times \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2} \left(1 - \exp \left[-\text{Arsh}\gamma + \frac{\gamma}{(1+\gamma^2)^{1/2}} - \frac{\gamma}{(1+\gamma^2)^{1/2}} t \right] \right)},$$

где множитель

$$G_1 \cdot G_2 \approx \left(\frac{2F_0}{F_2} \right)^{2n^*} (1 + 2e^{-1}\gamma)^{-2n^*},$$

как и в трёхмерном случае [4; 6], описывает полный вклад дальнедействующего кулоновского взаимодействия в скорость фотоионизации двумерного атома.

Заключение

В работе проведён учёт влияния дальнедействующего кулоновского потенциала на процесс ионизации двумерного атома суперпозицией постоянного и переменного электрических полей. В предельном случае многофотонной ионизации определена зависимость кулоновского вклада в скорость ионизации двумерного атома от отношения напряжённостей постоянного и переменного электрических полей и параметра Келдыша. Вычислена вероятность процесса в адиабатическом приближении. Получено аналитическое выражение для вероятности ионизации двумерного атома водорода постоянным электрическим полем с учётом кулоновской поправки. Предложена интерполяционная формула для скорости ионизации двумерного атома в поле плоской электромагнитной волны с учётом влияния дальнедействующего кулоновского поля при произвольных значениях параметра Келдыша. Из полученных результатов следует, что учёт как кулоновских, так и размерных эффектов существенно увеличивает вероятность ионизации двумерных наноструктур во внешних электромагнитных полях.

Статья поступила в редакцию 12.08.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш Л. В. Ионизация в поле сильной электромагнитной волны // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1965. Т. 47. Вып. 5. С. 1945–1957.
2. Никишов А. И., Ритус В. И. Ионизация систем, связанных короткодействующими силами, полем электромагнитной волны // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1966. Т. 50. Вып. 1. С. 255–270.

3. Переломов А. М., Попов В. С. Ионизация атомов в переменном электрическом поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1967. Т. 52. Вып. 2. С. 514–526.
4. Многофотонная ионизация атомов и ионов интенсивным излучением рентгеновских лазеров / Попруженко С. В., Мур В. Д., Попов В. С., Бауэр Д. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 135. Вып. 6. С. 1092–1108.
5. Ионизация атомов и ионов интенсивным лазерным излучением / Карнаков Б. М., Мур В. Д., Попов В. С., Попруженко С. В. // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 93. Вып. 4. С. 256–268.
6. Карнаков Б. М., Мур В. Д., Попруженко С. В., Попов В. С. Современное развитие теории нелинейной ионизации атомов и ионов // Успехи физических наук. 2015. Т. 185. Вып. 1. С. 3–34.
7. Крайнов В. П. Ионизация атомов в сильном низкочастотном электромагнитном поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2010. Т. 138. Вып. 2. С. 196–205.
8. Bauer D., Koval P. Qprop: A Schrödinger-solver for intense laser-atom interaction // Computer Physics Communications. 2006. Vol. 174. Iss. 5. P. 396–421.
9. Milosevic D. B. Strong-field approximation for ionization of a diatomic molecule by a strong laser field // Physical Review A. 2006. Vol. 74. Iss. 6. P. 063404.
10. Bauer J. H. Quasistatic limit of the strong-field approximation describing atoms in intense laser fields: Circular polarization // Physical Review A. 2011. Vol. 83. Iss. 3. P. 035402.
11. Демиховский В. Я., Вугальтер Г. А. Физика квантовых низкоразмерных структур. М: Логос, 2000. 186 с.
12. Эминов П. А., Гордеева С. В. Ионизация квантовой точки электрическими полями // Квантовая электроника. 2012. Т. 42. Вып. 8. С. 733–738.
13. Eminov P. A. Ionization induced by strong electromagnetic field in low dimensional systems bound by short range forces // Physica B: Condensed Matter. 2013. Vol. 426. P. 158–164.
14. Эминов П. А., Соколов В. В., Гордеева С. В. Нелинейная ионизация двумерной наноструктуры // Физика и техника полупроводников. 2014. Т. 48. Вып. 1. С. 15–22.
15. Семина М. А., Сурис Р. А. Кулоновские состояния в наноструктурах, случайное вырождение и оператор Лапласа-Рунге-Ленца // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. 2011. Т. 94. Вып. 7. С. 614–618.
16. De Souza J. F. O., De Lima Ribeiro C. A., Furtado C. Bound states in desalinated graphene with Coulomb impurities in the presence of a uniform magnetic field // Physics Letters A. 2014. Vol. 378. Iss. 30–31. P. 2317–2324.
17. Zhu J.-L., Li G., Yang N. Coulomb impurities in two-dimensional topological insulators // Physical Review B. 2017. Vol. 95. Iss. 12. P. 125431.
18. Experimental investigation of strong-field-ionization theories for laser fields from visible to midinfrared frequencies / Lai Y. H., Xu J., Szafruga U. B., Talbert B. K., Gong X., Zhang K., Fuest H., Kling M. F., Blaga C. I., Agostini P., Di Mauro L. F. // Physical Review A. 2017. Vol. 96. Iss. 6. P. 063417.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М: Наука, 1988. 216 с.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М: Наука, 1974. 752 с.
21. Эминов П. А., Гордеева С. В. Ионизация двумерной квантовой точки полем электромагнитной волны // Вестник Московского государственного университета. Серия 3. Физика и Астрономия. 2013. №4. С. 3–7.

REFERENCES

1. Keldysh L. V. [Ionization in the field of a strong electromagnetic wave]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1965, vol. 47, iss. 5, pp. 1945–1957.
2. Nikishov A. I., Ritus V. I. [Ionization of systems bound by short-range forces by the field of an electromagnetic wave]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1966, vol. 50, iss. 1, pp. 255–270.
3. Perelomov A. M., Popov V. S. [Ionization of atoms in an alternating electrical field]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1967, vol. 52, iss. 2, pp. 514–526.
4. Popruzhenko S. V., Mur V. D., Popov V. S., Bauer D. [Multiphoton ionization of atoms and ions by high-intensity X-ray lasers]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2009, vol. 135, iss. 6, pp. 1092–1108.
5. Karnakov B. M., Mur V. D., Popov V. S., Popruzhenko S. V. [Ionization of atoms and ions by intense laser radiation]. In: *Pis'ma v zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2011, vol. 93, iss. 4, pp. 256–268.
6. Karnakov B. M., Mur V. D., Popruzhenko S. V., Popov V. S. [Current progress in developing the nonlinear ionization theory of atoms and ions]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspkhi], 2015, vol. 185, iss. 1, pp. 3–34.
7. Krainov V. P. [Ionization of atoms in a strong low-frequency electromagnetic field]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2010, vol. 138, iss. 2, pp. 196–205.
8. Bauer D., Koval P. Qprop: A Schrödinger-solver for intense laser-atom interaction. In: *Computer Physics Communications*, 2006, vol. 174, iss. 5, pp. 396–421.
9. Milosevic D. B. Strong-field approximation for ionization of a diatomic molecule by a strong laser field. In: *Physical Review A*, 2006, vol. 74, iss. 6, pp. 063404.
10. Bauer J. H. Quasistatic limit of the strong-field approximation describing atoms in intense laser fields: Circular polarization. In: *Physical Review A*, 2011, vol. 83, iss. 3, pp. 035402.
11. Demikhovskii V. Ya., Vugal'ter G. A. *Fizika kvantovykh nizkorazmernykh struktur* [Physics of Low-Dimensional Quantum Structures]. Moscow, Logos Publ., 2000. 186 p.
12. Eminov P. A., Gordeeva S. V. [Ionisation of a quantum dot by electric fields]. In: *Kvantovaya elektronika* [Quantum Electronics], 2012, vol. 42, iss. 8, pp. 733–738.
13. Eminov P. A. Ionization induced by strong electromagnetic field in low dimensional systems bound by short range forces. In: *Physica B: Condensed Matter*, 2013, vol. 426, pp. 158–164.
14. Eminov P. A., Sokolov V. V., Gordeeva S. V. [Nonlinear ionization of a two-dimensional nanostructure]. In: *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductors], 2014, vol. 48, no. 1, pp. 15–22.
15. Semina M. A., Suris R. A. [Coulomb states in nanostructures, accidental degeneracy, and the Laplace-Runge-Lenz operator]. In: *Pis'ma v zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters], 2011, vol. 94, iss. 7, pp. 614–618.
16. De Souza J. F. O., De Lima Ribeiro C. A., Furtado C. Bound states in desalinated graphene with Coulomb impurities in the presence of a uniform magnetic field. In: *Physics Letters A*, 2014, vol. 378, iss. 30–31, pp. 2317–2324.
17. Zhu J.-L., Li G., Yang N. Coulomb impurities in two-dimensional topological insulators. In: *Physical Review B*, 2017, vol. 95, iss. 12, pp. 125431.
18. Lai Y. H., Xu J., Szafruga U. B., Talbert B. K., Gong X., Zhang K., Fuest H., Kling M. F., Blaga C. I., Agostini P., Di Mauro L. F. Experimental investigation of strong-field-ionization theories for laser fields from visible to midinfrared frequencies. In: *Physical Review A*, 2017, vol. 96, iss. 6, pp. 063417.

19. Landau L. D., Lifshits E. M. *Mechanics*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1995.
20. Landau L. D., Lifshits E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Oxford, Pergamon Press, 1958. 515 p.
21. Eminov P. A., Gordeeva S. V. [Ionization of a two-dimensional quantum dot by the field of an electromagnetic wave]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 3. Fizika i Astronomiya* [Moscow University Physics Bulletin], 2013, no. 4, pp. 3–7.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Эминов Павел Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор департамента прикладной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;
e-mail: peminov@mail.ru;

Соколов Виктор Васильевич – доктор физико-математических наук, советник по научной работе МИРЭА – Российского технологического университета;
e-mail: vvs195326@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Pavel A. Eminov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics, National Research University ‘Higher School of Economics’;
e-mail: peminov@mail.ru;

Victor V. Sokolov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, scientific advisor at the MIREA – Russian Technological University;
e-mail: vvs195326@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Эминов П. А., Соколов В. В. Кулоновские поправки к вероятности ионизации двумерного атома суперпозицией постоянного и переменного электрических полей // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 3. С. 15–27.
DOI: [10.18384-2310-7251-2019-3-15-27](https://doi.org/10.18384-2310-7251-2019-3-15-27)

FOR CITATION

Eminov P. A., Sokolov V. V. Coulomb corrections to the ionization probability of a two-dimensional atom by a superposition of constant and alternating electric fields. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*. 2019, no. 3, pp. 15–27.
DOI: [10.18384-2310-7251-2019-3-15-27](https://doi.org/10.18384-2310-7251-2019-3-15-27)