УДК 514.765

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-42-67

К ВОПРОСУ ПРИЛОЖЕНИЯ ВТОРОЙ КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ К ЗАДАЧАМ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Гладков С. О.*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125080, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация*

Аннотация. С помощью изложенного автором ранее в статье «Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии» метода вычислен результат действия оператора Лапласа на ковариантную и контравариантную векторные функции. Найдены проекции векторов **B** и **C**, определяемые как $B^i = (\Delta \mathbf{A})^i$ и $B_i = (\Delta \mathbf{A})_i$, на соответствующие криволинейные ортонормированные базисы e^i и e_i . Приведены общие ковариантные выражения для операторов $\Delta \mathbf{A}$ и $\text{graddiv} \mathbf{A}$, справедливые в любой криволинейной системе координат. В качестве справочного материала вычислены проекции вектора $C_i = (\Delta \mathbf{A})_i$ в параболической системе координат. В качестве иллюстрирующего примера решена задача о кручении упруго-деформируемого вертикально стоящего цилиндрического тела в условиях его радиального неравномерного нагрева при условии, что его нижний торец жёстко закреплён.

Ключевые слова: ортонормированный единичный базис, ковариантное дифференцирование, символ Кристоффеля, метрический тензор, параболические координаты, объёмное расширение, крутящий момент

APPLICATION OF THE SECOND COVARIANT DERIVATIVE FROM THE VECTOR FUNCTION TO THE PROBLEMS OF HYDRODYNAMICS AND ELASTICITY THEORY

S. Gladkov*Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)
Volokolamskoe shosse 4, 125080 Moscow, Russian Federation*

Abstract. Based on the method described in our paper “Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry”, we have calculated the result of the action of the Laplace operator on covariant and contravariant vector functions. The projections of the vectors **B** and **C**, defined as $B^i = (\Delta \mathbf{A})^i$ and $C_i = (\Delta \mathbf{A})_i$, on the corresponding curvilinear orthonormal bases e^i and e_i are found. The general covariant expressions for the operators $\Delta \mathbf{A}$ and $\text{graddiv} \mathbf{A}$ that are valid in any curvilinear coordinate system are presented. As a reference material, the projections of the vector $C_i = (\Delta \mathbf{A})_i$ in a parabolic coordinate system are calculated. As an illustrative example, the problem of torsion of an elastically

deformable vertically standing cylindrical body under the conditions of its uneven radial heating, provided that its lower end is rigidly fixed, is solved.

Keywords: *orthonormal* unit basis, covariant differentiation, Christoffel symbol, metric tensor, parabolic coordinates, volume expansion, torque

Введение

Вопрос, на котором мы хотели бы сейчас остановиться, относится к классической теории ковариантного дифференцирования, весьма подробно изложенной в многочисленных учебниках и научных монографиях (см., к примеру, [1–4]). Эта теория может применяться при решении огромного класса чисто теоретических проблем из области гидродинамики, теории упругости, электродинамики и теории поля. Сразу же следует заметить, что при использовании ортогональных систем координат (сокращённо – ОСК) все авторы (и отмеченные выше в том числе) используют размерные базисы, которые в итоге приводят и к разным размерностям компонент метрического тензора, символов Кристоффеля, тензора Римана и т. д. Это связано просто с тем обстоятельством, что используемый ими базис не ортонормированный. Всё наше нижеследующее изложение не будет страдать подобным недостатком, и также, как и в работе [5], мы будем использовать только ортонормированный базис, автоматически приводящий к правильным физическим и геометрическим размерностям соответствующих величин. Несложный алгоритм этого подхода, подробно изложенный в [5], поможет нам и в решении задач, составляющих суть настоящей статьи, посвящённой выяснению действия оператора Лапласа на ковариантную и контравариантную векторные функции с его применением к проблемам гидродинамики и теории упругости.

При вычислении оператора Лапласа от скалярной функции обычно используется формула (см., например, [1]):

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^k} \right), \quad (1)$$

где g – определитель метрического тензора g_{ik} , g^{ik} – компоненты контравариантного метрического тензора, которая имеет общий вид и может быть применена к любой, и не только ортогональной системе координат.

Ортогональная система координат

В процессе решения широчайшего круга физических задач часто бывает удобным использовать не формулу (1), а несколько иную, на которой мы сейчас ненадолго остановимся. В самом деле, если ввести ковариантный вектор:

$$a_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \quad (2)$$

где $\psi(x^k)$ – произвольная скалярная функция, дифференцируемая на некотором множестве, то согласно общим правилам ковариантного дифференцирования [1] имеем:

$$a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l a_l, \quad (3)$$

где Γ_{kl}^i – символ Кристоффеля второго рода, а по повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование.

Подставляя сюда (2) и сворачивая полученное выражение по индексам i, k , мы приходим к искомой формуле для оператора Лапласа, справедливой в любой ортогональной системе координат, и весьма удобной при вычислениях:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \Gamma_{ii}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (4)$$

В качестве конкретного примера её приложения рассмотрим цилиндрическую систему координат.

Действительно, благодаря преобразованиям:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

квадрат метрики будет выглядеть как:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (6)$$

В соответствии с алгоритмом, подробно описанным в [5], введём следующие частные дифференциалы:

$$\partial x^1 = dr, \quad \partial x^2 = r d\varphi, \quad \partial x^3 = dz. \quad (7)$$

В результате вместо (6) мы автоматически приходим к ортонормированной метрике:

$$dl^2 = (\partial x^1)^2 + (\partial x^2)^2 + (\partial x^3)^2. \quad (8)$$

Как видим, для метрики (8) метрический тензор есть просто символ Кронекера, то есть:

$$g_{ik} = g^{ik} = \delta_{ik} = \delta^{ik} = \delta_k^i. \quad (9)$$

Поэтому, чтобы вычислить символы Кристоффеля, нам следует использовать уже не формулу [1]:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s} \right), \quad (10)$$

поскольку в соответствии с (9) она даёт просто нуль, а изначальную формулу для символа Кристоффеля первого рода, приведённую, скажем, в [1; 2]:

$$\Gamma_{ikl} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l}. \quad (11)$$

Вышесказанное означает, что все наши последующие вычисления будут вестись только в ортонормированном базисе, автоматически обеспечивающем (как это уже было отмечено выше) правильную размерность всех физических и геометрических величин.

В итоге, в соответствии с преобразованиями (5) и с учётом дифференциалов (7), которые просто подставляем в знаменатели выражения (11), мы немедленно получаем, что отличными от нуля будут только две величины:

$$\begin{aligned}\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial x_n}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x_n}{\partial r \partial \varphi} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \Gamma_{r\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial x_n}{\partial r} \frac{\partial^2 x_n}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{r}.\end{aligned}\quad (12)$$

Поэтому согласно формуле (4), определению (7) и выражениям (12), находим:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \Gamma_{ii}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (13)$$

Как и должно быть. Этот же результат, конечно, получается и из формулы (1).

Не ортогональная система координат

В том случае, когда мы имеем дело с произвольной криволинейной системой координат (в общем случае не ортогональной), можно воспользоваться формулой (1), но переписать её при этом удобно в несколько ином виде.

Дело в том, что для любой ортонормированной системы координат ковариантные и контравариантные величины тождественны [2], то есть:

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{ikl}, \quad R_{klm}^i = R_{iklm},$$

где R_{iklm} – тензор Римана.

Это связано просто с тем фактом, что в случае бесконечно малых преобразований, если мы говорим о нелинейных преобразованиях на языке дифференциалов, метрический тензор в ОСК представляет собой, согласно (9), обычный символ Кронекера.

Поэтому в случае произвольной не ортогональной СК необходимо уже учитывать разницу между ковариантными и контравариантными компонентами, поскольку в этом случае у безразмерного метрического тензора будут отличны от нуля все недиагональные элементы.

Действительно, введём в рассмотрение контравариантный вектор $a_i = g^{ik} a_k$, где $a_k = \frac{\partial \psi}{\partial x^k}$. В результате ковариантная производная от него с учётом леммы

Риччи, согласно которой ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, то есть $g_{ik,l} = 0$, будет иметь вид:

$$a^i_{,k} = (g^{is} a_s)_{,k} = g^{is} \left(\frac{\partial a_s}{\partial x^k} - \Gamma_{sk}^p a_p \right).$$

Подставляя сюда $a_k = \frac{\partial \psi}{\partial x^k}$ и сворачивая по индексам i, k , после несложных преобразований мы пришли бы к формуле (1), как и должно быть, но в нашем подходе, в котором нет места коэффициентам Ламе, её необходимо представить следующим образом:

$$\Delta = g^{ik} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - g^{is} \Gamma_{si}^p \frac{\partial}{\partial x^p}. \quad (14)$$

Отсюда сразу же видно, что при переходе к ОНСК следует просто считать, что $g^{ik} = \delta_{ik} = \delta^{ik}$, и мы приходим к формуле (3).

На примере двумерного случая покажем, как необходимо проводить вычисления, автоматически приводящие к правильным физическим и геометрическим размерностям любых величин.

В качестве простого демонстрационного примера рассмотрим не ортогональные двумерные преобразования, которые по каким-то причинам ни в одном известном нам учебнике по тензорному анализу никогда не разбирались.

Пусть

$$\begin{aligned} x &= uv, \\ y &= \frac{u^2 + v^2}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда элемент метрики будет иметь вид:

$$dl^2 = (u^2 + v^2) du^2 + 4uv du dv + (u^2 + v^2) dv^2. \quad (16)$$

В соответствии с намеченным алгоритмом вычислений полагаем:

$$\begin{aligned} \partial x^1 &= \sqrt{u^2 + v^2} du, \\ \partial x^2 &= \sqrt{u^2 + v^2} dv. \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому из (15) следует, что:

$$dl^2 = (\partial x^1)^2 + \frac{4uv}{u^2 + v^2} \partial x^1 \partial x^2 + (\partial x^2)^2. \quad (18)$$

Из (18) видно, что метрический тензор, как и должно быть, автоматически оказывается безразмерным, и имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2uv}{u^2 + v^2} \\ \frac{2uv}{u^2 + v^2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

а его безразмерный определитель есть:

$$g = \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \right)^2, \quad (20)$$

где $u \neq v$.

Поэтому контравариантный метрический тензор $\hat{g}^{ik} = \hat{g}_{ik}^{-1}$ будет таким:

$$g^{ik} = \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2uv}{u^2 + v^2} \\ -\frac{2uv}{u^2 + v^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Вычисление символов Кристоффеля первого рода по схеме, приведённой выше, приводит нас к следующим выражениям (за подробностями выкладок можно обратиться к работе [5])

$$\begin{aligned} \Gamma_{vvv} &= \frac{v}{q^3}, \quad \Gamma_{vuv} = \Gamma_{vvu} = 0, \quad \Gamma_{vu u} = \frac{u}{q^3}, \\ \Gamma_{uvv} &= \frac{v}{q^3}, \quad \Gamma_{uuv} = \Gamma_{uvu} = 0, \quad \Gamma_{uuu} = \frac{u}{q^3}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $q = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Благодаря же формулам (22), отличные от нуля компоненты символа Кристоффеля второго рода будут такими:

$$\begin{aligned} \Gamma_{vv}^v &= g^{vv} \Gamma_{vvv} + g^{vu} \Gamma_{uvv} = (g^{vv} + g^{vu}) \frac{v}{q^3} = \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \frac{(u-v)^2}{u^2 + v^2} \frac{v}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{v}{(u+v)^2 \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{vv}^u &= g^{uv} \Gamma_{vvv} + g^{uu} \Gamma_{uvv} = (g^{uu} + g^{vu}) \frac{v}{q^3} = \frac{v}{(u+v)^2 \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{uu}^v &= g^{vv} \Gamma_{vu u} + g^{vu} \Gamma_{uuu} = (g^{vv} + g^{vu}) \frac{u}{q^3} = \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \frac{(u-v)^2}{u^2 + v^2} \frac{u}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{u}{(u+v)^2 \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{uu}^u &= g^{uv} \Gamma_{vu u} + g^{uu} \Gamma_{uuu} = (g^{uu} + g^{vu}) \frac{u}{q^3} = \frac{u}{(u+v)^2 \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{vu}^v &= g^{vk} \Gamma_{kvu} = 0, \quad \Gamma_{vu}^u = g^{uk} \Gamma_{kvu} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее, в соответствии с формулой (14), легко получается следующая цепочка простых преобразований:

$$\begin{aligned}\Delta &= g^{ik} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma_{ik}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right) = g^{uu} \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \Gamma_{uu}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right) + 2g^{uv} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \Gamma_{uv}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right) + \\ &+ g^{vv} \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - \Gamma_{vv}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right) = \frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{2g^{uv}}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{\Gamma_{uu}^u}{q} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\Gamma_{uu}^v}{q} \frac{\partial}{\partial v} - \\ &- \frac{\Gamma_{vv}^u}{q} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\Gamma_{vv}^v}{q} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{2g^{uv}}{q} \left(\Gamma_{uv}^u \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{uv}^v \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad (24)\end{aligned}$$

Подставляя сюда найденные выражения для символов Кристоффеля из (23) и недиагональные компоненты метрического тензора из (21), получаем в итоге:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{4uv}{(u^2 - v^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{1}{q^2} \frac{u}{(u+v)^2} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{q^2} \frac{u}{(u+v)^2} \frac{\partial}{\partial v} - \\ &- \frac{1}{q^2} \frac{v}{(u+v)^2} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{q^2} \frac{v}{(u+v)^2} \frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}$$

И окончательно, после простой группировки слагаемых, приходим к искомому ответу:

$$\Delta_2 = \frac{1}{(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{4uv}{(u^2 - v^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{1}{(u^2 + v^2)} \frac{1}{(u+v)} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad (25)$$

Стоит подчеркнуть, что излагаемый подход, на наш взгляд, является значительно более рациональным, чем использование коэффициентов Ламе в случае ортогональных координат. Заметим также, что их приложение к не ортогональным координатам мы нигде не обнаружили.

Выражение (25) получено в случае двухмерного преобразования, поэтому для него оператор Лапласа имеет довольно компактный вид.

Стоит также заметить, что если использовать не преобразования (14), а ортогональные преобразования:

$$\begin{aligned}x &= uv, \\ y &= \frac{u^2 - v^2}{2},\end{aligned} \quad (26)$$

то, как легко проверить, оператор Лапласа будет [5]:

$$\Delta_2 = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right). \quad (27)$$

Из сравнения (25) и (27) видна не только их схожесть, но и принципиальная разница, отличающая ортогональные преобразования от не ортогональных.

Некоторые практические приложения римановой геометрии можно найти, например, в работах [6; 7].

Действие оператора Лапласа на контравариантный вектор

Рассмотрим теперь более сложную задачу. Пусть имеется некоторая непрерывная контравариантная векторная функция $\mathbf{A}$, и нас интересует результат действия на неё оператора Лапласа, то есть вектор:

$$\mathbf{B} = \Delta \mathbf{A}.$$

Тогда его проекции на оси x^i будут:

$$B^i = (\Delta \mathbf{A})^i. \quad (28)$$

Чтобы вычислить это выражение, найдём вначале первую и вторую ковариантные производные от вектора $\mathbf{A} = (A^i)$.

Для первой ковариантной производной имеем:

$$A^i_{,k} = B^i_k = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} A^l, \quad (29)$$

где B^i_k – смешанный по индексам тензор второго ранга.

Вторая ковариантная производная будет:

$$B^i_{k,l} = \frac{\partial B^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls} B^s_k - \Gamma^s_{kl} B^i_s. \quad (30)$$

Её легко найти, если представить тензор B^i_k в виде произведения контравариантного $\mathbf{M}$ и ковариантного $\mathbf{N}$ векторов, то есть как $B^i_k = M^i N_k$, и использовать известные правила их дифференцирования $M^i_{,k} = \frac{\partial M^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} M^l$, $N_{i,k} = \frac{\partial N_i}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik} N_s$.

Подставляя в (30) определение (29) для тензора B^i_k , немедленно получаем:

$$\begin{aligned} B^i_{k,l} &= \frac{\partial B^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls} B^s_k - \Gamma^s_{kl} B^i_s = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ks} A^s \right) + \Gamma^i_{ln} \left(\frac{\partial A^n}{\partial x^k} + \Gamma^n_{ks} A^s \right) - \\ &\quad - \Gamma^n_{kl} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \Gamma^i_{ns} A^s \right) = \\ &= \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma^i_{ks} \frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ls} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} - \Gamma^n_{kl} \frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ln} \Gamma^n_{ks} - \Gamma^i_{ns} \Gamma^n_{kl} \right) A^s = \\ &= \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma^i_{ks} \frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \frac{\partial (\Gamma^i_{ls} A^s)}{\partial x^k} - \Gamma^n_{kl} \frac{\partial A^i}{\partial x^n} + R^i_{kls} A^s, \end{aligned} \quad (31)$$

где тензор кривизны Римана определён как:

$$R_{kls}^i = \frac{\partial \Gamma_{ks}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{ls}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ln}^i \Gamma_{ks}^n - \Gamma_{ns}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (32)$$

Сворачивая выражение (31) по индексам k, l с учётом явного выражения (32), мы приходим к следующему результату:

$$(\Delta \mathbf{A})^i = \frac{\partial^2 A^i}{(\partial x^k)^2} + 2\Gamma_{ks}^i \frac{\partial A^s}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^n \frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ks}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kn}^i \Gamma_{ks}^n - \Gamma_{ns}^i \Gamma_{kk}^n \right) A^s. \quad (33)$$

Выделяя здесь оператор Лапласа в явном виде (см. выше и работу [5]), как:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \Gamma_{kk}^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad (34)$$

получаем окончательно для вектора B^i выражение:

$$B^i = (\Delta \mathbf{A})^i = \Delta A^i + 2\Gamma_{ks}^i \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ks}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kn}^i \Gamma_{ks}^n - \Gamma_{ns}^i \Gamma_{kk}^n \right) A^s. \quad (35)$$

Действие оператора Лапласа на ковариантный вектор

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть имеется ковариантный вектор:

$$\mathbf{C} = \Delta \mathbf{A},$$

где $\mathbf{A} = (A_i)$, и нас интересует результат

$$C_i = (\Delta \mathbf{A})_i. \quad (36)$$

Так же, как и в разделе 4, найдём предварительно первые две ковариантные производные от вектора $\mathbf{A} = (A_i)$.

Для первой производной имеем:

$$A_{i,k} = B_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s A_s, \quad (37)$$

где B_{ik} – ковариантный тензор второго ранга.

Для второй ковариантной производной (представляя этот тензор в факторизованном виде, как $B_{ik} = M_{il}N_k$) получаем:

$$B_{ik,l} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^s B_{sk} - \Gamma_{kl}^s B_{is}. \quad (38)$$

Подставляя в (38) определение (37) для тензора B_{ik} , немедленно находим:

$$\begin{aligned} B_{ik,l} = A_{i,k,l} &= \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - \Gamma_{ik}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{kl}^s \frac{\partial A_i}{\partial x^s} + \\ &+ \left(\Gamma_{il}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{in}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^l} \right) A_s. \end{aligned} \quad (39)$$

Сворачивая это выражение по индексам k, l , получаем:

$$C_i = \frac{\partial^2 A_i}{(\partial x^k)^2} - 2\Gamma_{ik}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^s \frac{\partial A_i}{\partial x^s} + \left(\Gamma_{ik}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{in}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^k} \right) A_s =$$

$$= \Delta A_i - 2\Gamma_{ik}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \left(\Gamma_{ik}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{in}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^k} \right) A_s. \quad (40)$$

Глядя на выражение (40), кажется, что оно справедливо только в ортогональной системе координат. Однако это не так. Действительно, в общем случае [8; 5] выражение (39) следует переписать в виде:

$$A_{i,k,l}^j = g^{ip} \left[\frac{\partial^2 A_p}{\partial x^k \partial x^l} - \Gamma_{pk}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^l} - \Gamma_{pl}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{kl}^s \frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \right.$$

$$\left. + \left(\Gamma_{pl}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{pn}^s - \frac{\partial \Gamma_{pk}^s}{\partial x^l} \right) A_s \right]. \quad (41)$$

Сворачивая это общее выражение по индексам k, l , приходим к интересующему нас результату:

$$C^i = (\Delta A)^i = g^{ip} \left[\frac{\partial^2 A_p}{(\partial x^k)^2} - 2\Gamma_{pk}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^s \frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \right.$$

$$\left. + \left(\Gamma_{pk}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{pn}^s - \frac{\partial \Gamma_{pk}^s}{\partial x^k} \right) A_s \right]. \quad (42)$$

Опуская здесь индекс i , с помощью известного правила $C_i = g_{im} C^m$ получаем:

$$C_i = g_{im} (\Delta A)^m = g_{im} g^{mp} \left[\frac{\partial^2 A_p}{(\partial x^k)^2} - 2\Gamma_{pk}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^s \frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \right.$$

$$\left. + \left(\Gamma_{pk}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{pn}^s - \frac{\partial \Gamma_{pk}^s}{\partial x^k} \right) A_s \right] =$$

$$= \delta_p^i \left[\frac{\partial^2 A_p}{(\partial x^k)^2} - 2\Gamma_{pk}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^s \frac{\partial A_p}{\partial x^s} + \left(\Gamma_{pk}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{pn}^s - \frac{\partial \Gamma_{pk}^s}{\partial x^k} \right) A_s \right] =$$

$$= \frac{\partial^2 A_i}{(\partial x^k)^2} - 2\Gamma_{ik}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^s \frac{\partial A_i}{\partial x^s} + \left(\Gamma_{ik}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{in}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^k} \right) A_s =$$

$$= \Delta A_i - 2\Gamma_{ik}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \left(\Gamma_{ik}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{in}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^k} \right) A_s. \quad (43)$$

Сравнивая (43) с формулой (40), мы видим их полную тождественность. Однако, если сравнить (43) с (35), то можно увидеть и весьма существенную

разницу между ними. Действительно, в общем случае векторы $B_i = (\Delta \mathbf{A})_i$ и $C^i = (\Delta \mathbf{A})^i$, как и должно быть, не совпадают.

Рассмотрим теперь такое выражение:

$$A_i = g_{is} A^s$$

и найдём от него ковариантную производную второго порядка.

В силу леммы Риччи, согласно которой ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, то есть $g_{ik,l} = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} A_{i,k,l} &= g_{is} \left[\frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma_{kn}^s \frac{\partial A^n}{\partial x^l} + \Gamma_{ln}^s \frac{\partial A^n}{\partial x^k} - \Gamma_{kl}^n \frac{\partial A^s}{\partial x^n} + \right. \\ &\quad \left. + A^p \left(\frac{\partial \Gamma_{kp}^s}{\partial x^l} + \Gamma_{ln}^s \Gamma_{kp}^n - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{np}^s \right) \right] = \\ &= g_{is} \frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma_{iks} \frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \Gamma_{ils} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} - g_{is} \Gamma_{kl}^n \frac{\partial A^s}{\partial x^n} + \\ &\quad + A^s \left(\frac{\partial \Gamma_{iks}}{\partial x^l} - \Gamma_{ks}^n \frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} + \Gamma_{iln} \Gamma_{ks}^n - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{ins} \right). \end{aligned}$$

Но поскольку $\frac{\partial g_{in}}{\partial x^l} = \Gamma_{inl} + \Gamma_{nil}$, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A_{i,k,l} &= g_{is} \frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^l} + \Gamma_{iks} \frac{\partial A^s}{\partial x^l} + \Gamma_{ils} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} - g_{is} \Gamma_{kl}^n \frac{\partial A^s}{\partial x^n} + \\ &\quad + A^s \left(\frac{\partial \Gamma_{iks}}{\partial x^l} - \Gamma_{ks}^n (\Gamma_{inl} + \Gamma_{nil}) + \Gamma_{iln} \Gamma_{ks}^n - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{ins} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

Сворачивая выражение (44) по индексам k, l , получим выражение:

$$A_{i,k,k} = g_{is} \Delta A^s + 2\Gamma_{iks} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + A^s \left(\frac{\partial \Gamma_{iks}}{\partial x^k} - \Gamma_{ks}^n \Gamma_{nik} - \Gamma_{kk}^n \Gamma_{ins} \right), \quad (45)$$

где введено сокращённое обозначение для обычного оператора Лапласа согласно (4).

Совершенно ясно, что, с целью введения правильного оператора Лапласа в криволинейных координатах, нам необходимо привести в соответствие друг с другом формулу (45) и формулу (40), которую запишем в виде:

$$C_i = \Delta A_i - 2\Gamma_{ik}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \left(\Gamma_{ik}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{in}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^k} \right) A_s. \quad (46)$$

Взяв среднее арифметическое от формул (45) и (46), получаем искомое общее определение для вычисления результата действия оператора Лапласа на ковариантный вектор в произвольной криволинейной системе координат:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbf{A})_i = & \frac{g_{is} \Delta A^s + \Delta A_i}{2} + \Gamma_{isk} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \frac{\Gamma_{kk}^s}{2} \left(g_{ip} \frac{\partial A^p}{\partial x^s} + \frac{\partial A_i}{\partial x^s} \right) + \\
 & + \frac{A^s}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{isk}}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^n \Gamma_{isn} - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nsk} \right) + \frac{A_s}{2} \left(\Gamma_{ik}^n \Gamma_{nk}^s + \Gamma_{kk}^n \Gamma_{in}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^k} \right). \quad (47)
 \end{aligned}$$

В случае же ортонормированного базиса, в котором, как мы знаем [5], выполняются соотношения:

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{ikl}, \quad A_i = A^i, \quad g_{ik} = \delta_{ik}, \quad (48)$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbf{A})_i = & \Delta A_i + (\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\
 & + \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{sin} - \Gamma_{isn}) + \Gamma_{nik} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right]. \quad (49)
 \end{aligned}$$

Формула (49) и является той замечательной формулой, о которой почему-то в [1; 2; 8; 9], к сожалению, даже не упоминается. Между тем эта формула является основной при вычислении результата действия оператора Лапласа на любую векторную функцию и в любой (а не только в сферической и цилиндрической) ортонормированной системе координат.

Что же касается формулы (47), то она является обобщением действия оператора Лапласа на любую векторную функцию для произвольной криволинейной системы координат.

Посмотрим теперь, как «работает» формула (49) в сферической и цилиндрической СК, и начнём со сферической СК.

Оставляя лишь не нулевые символы Кристоффеля благодаря таблице, приведённой, скажем, в [5], согласно которой:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\varphi\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\varphi\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = \\
 = -\frac{ctg\theta}{r}, \quad \Gamma_{\theta r\theta} = \Gamma_{\theta\theta r} = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\theta\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi\theta} = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{ctg\theta}{r}. \quad (50)
 \end{aligned}$$

В соответствии с (49) для проекции на орт $\mathbf{e}_r$ сферического единичного базиса ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$) имеем:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbf{A})_r = & \Delta A_r + (\Gamma_{rsk} - \Gamma_{srk}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\
 & + \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{rsk} - \Gamma_{srk}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{srn} - \Gamma_{rsn}) + \Gamma_{nrk} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right] = \\
 = & \Delta A_r + (\Gamma_{r\theta\theta} - \Gamma_{\theta r\theta}) \frac{\partial A_\theta}{\partial x^\theta} + (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}) \frac{\partial A_\varphi}{\partial x^\varphi} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_r}{2} \left[\Gamma_{\theta r \theta} (\Gamma_{r \theta \theta} - \Gamma_{\theta r \theta}) + \Gamma_{\varphi r \varphi} (\Gamma_{r \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi r \varphi}) \right] + \\
& + \frac{A_\theta}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\theta} (\Gamma_{r \theta \theta} - \Gamma_{\theta r \theta}) + \Gamma_{\theta \varphi \varphi} (\Gamma_{\theta r \theta} - \Gamma_{r \theta \theta}) + \Gamma_{\varphi r \varphi} (\Gamma_{\theta \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi \theta \varphi}) \right] + \\
& + \frac{A_\varphi}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\varphi} (\Gamma_{r \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi r \varphi}) + \Gamma_{\varphi \theta \theta} (\Gamma_{\varphi r \varphi} - \Gamma_{r \varphi \varphi}) + \Gamma_{\theta r \theta} (\Gamma_{\varphi \theta \theta} - \Gamma_{\theta \varphi \theta}) \right].
\end{aligned}$$

Подставляя сюда символы Кристоффеля из (50) и частные дифференциалы рассматриваемого нами ортонормированного базиса:

$$\partial x^r = dr, \quad \partial x^\theta = r d\theta, \quad \partial x^\varphi = r \sin \theta d\varphi, \quad (51)$$

окончательно находим:

$$\begin{aligned}
(\Delta A)_r &= \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2ctg\theta A_\theta}{r^2} = \\
&= \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left(A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (52)
\end{aligned}$$

Далее, для проекции на орт $\mathbf{e}_\theta$ получаем:

$$\begin{aligned}
(\Delta A)_\theta &= \Delta A_\theta + (\Gamma_{\theta s k} - \Gamma_{s \theta k}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\
&+ \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{\theta s k} - \Gamma_{s \theta k}) + \Gamma_{n k k} (\Gamma_{s \theta n} - \Gamma_{\theta s n}) + \Gamma_{n \theta k} (\Gamma_{s n k} - \Gamma_{n s k}) \right] = \\
&= \Delta A_\theta + (\Gamma_{\theta r \theta} - \Gamma_{r \theta \theta}) \frac{\partial A_r}{\partial x^\theta} + (\Gamma_{\theta \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi \theta \varphi}) \frac{\partial A_\varphi}{\partial x^\varphi} + \\
&+ \frac{A_r}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\theta} (\Gamma_{\theta r \theta} - \Gamma_{r \theta \theta}) + \Gamma_{\theta \varphi \varphi} (\Gamma_{r \theta \theta} - \Gamma_{\theta r \theta}) + \Gamma_{\varphi \theta \varphi} (\Gamma_{r \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi r \varphi}) \right] + \\
&+ \frac{A_\theta}{2} \left[\Gamma_{r \theta \theta} (\Gamma_{\theta r \theta} - \Gamma_{r \theta \theta}) + \Gamma_{\varphi \theta \theta} (\Gamma_{\theta \varphi \theta} - \Gamma_{\varphi \theta \theta}) + \Gamma_{\varphi \theta \varphi} (\Gamma_{\theta \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi \theta \varphi}) \right] + \\
&+ \frac{A_\varphi}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\theta} (\Gamma_{\theta \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi \theta \varphi}) + \frac{\partial}{\partial x^\varphi} (\Gamma_{\theta \varphi \varphi} - \Gamma_{\varphi \theta \varphi}) + \Gamma_{\theta \varphi \varphi} (\Gamma_{\varphi \theta \theta} - \Gamma_{\theta \varphi \theta}) + \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{\varphi \theta \theta} (\Gamma_{\varphi \theta \varphi} - \Gamma_{\theta \varphi \varphi}) + \Gamma_{\theta \theta \varphi} (\Gamma_{\varphi \theta \varphi} - \Gamma_{\theta \varphi \varphi}) \right].
\end{aligned}$$

Подставляя сюда отличные от нуля значения символов Кристоффеля согласно (50) и частные дифференциалы из (51), находим:

$$(\Delta A)_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2ctg\theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (53)$$

Наконец, проекция на орт $\mathbf{e}_\varphi$ даёт:

$$\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{A})_{\varphi} &= \Delta A_{\varphi} + (\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\
&+ \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{s\varphi n} - \Gamma_{\varphi sn}) + \Gamma_{m\varphi k} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right] = \\
&= \Delta A_{\varphi} + (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) \frac{\partial A_r}{\partial x^{\varphi}} + (\Gamma_{\varphi\theta\theta} - \Gamma_{\theta\varphi\theta}) \frac{\partial A_{\theta}}{\partial x^{\theta}} + (\Gamma_{\varphi\theta\varphi} - \Gamma_{\theta\varphi\varphi}) \frac{\partial A_{\theta}}{\partial x^{\varphi}} + \\
&+ \frac{A_r}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\varphi}} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) + \Gamma_{\varphi\theta\theta} (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}) + \Gamma_{\theta\varphi\theta} (\Gamma_{r\theta\theta} - \Gamma_{\theta r\theta}) \right] + \\
&+ \frac{A_{\theta}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\theta}} (\Gamma_{\varphi\theta\theta} - \Gamma_{\theta\varphi\theta}) + \frac{\partial}{\partial x^{\varphi}} (\Gamma_{\varphi\theta\varphi} - \Gamma_{\theta\varphi\varphi}) + \Gamma_{\theta\varphi\theta} (\Gamma_{\theta\varphi\theta} - \Gamma_{\varphi\theta\theta}) + \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{\varphi\theta\theta} (\Gamma_{\theta\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi\theta\varphi}) + \Gamma_{\varphi\varphi\theta} (\Gamma_{\theta\varphi\theta} - \Gamma_{\varphi\theta\theta}) \right] + \\
&+ \frac{A_{\varphi}}{2} \left[\Gamma_{r\varphi\varphi} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) + \Gamma_{\theta\varphi\theta} (\Gamma_{\varphi\theta\theta} - \Gamma_{\theta\varphi\theta}) + \Gamma_{\theta\varphi\varphi} (\Gamma_{\varphi\theta\varphi} - \Gamma_{\theta\varphi\varphi}) \right].
\end{aligned}$$

Подставляя сюда (50) и (51), будем иметь:

$$(\Delta \mathbf{A})_{\varphi} = \Delta A_{\varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} - \frac{A_{\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (54)$$

Здесь, напомним ещё раз, обычный оператор Лапласа в сферической системе координат есть:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (55)$$

Собирая формулы (52), (53) и (54) воедино, получаем:

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left(A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_{\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} \right), \quad (56)$$

$$(\Delta \mathbf{A})_{\theta} = \Delta A_{\theta} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{A_{\theta}}{2 \sin^2 \theta} \right), \quad (57)$$

$$(\Delta \mathbf{A})_{\varphi} = \Delta A_{\varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} - \frac{A_{\varphi}}{2 \sin \theta} \right). \quad (58)$$

Сравнивая проекции (54)–(56) с формулами, приведёнными, например, в монографии [8; с. 615], мы видим их полное совпадение.

Рассмотрим теперь ещё один пример. Пусть имеется цилиндрическая система координат, в которой отличные от нуля символы Кристоффеля есть:

$$\Gamma_{r\varphi\varphi} = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{r}, \quad (59)$$

а частные дифференциалы:

$$\partial x^r = dr, \quad \partial x^\varphi = r d\varphi, \quad \partial x^z = dz. \quad (60)$$

Используя формулу (49) для проекций вектора $\mathbf{A}$ на ортонормированный единичный базис $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ находим для проекции на $\mathbf{e}_r$:

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{A})_r &= \Delta A_r + (\Gamma_{rsk} - \Gamma_{srk}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\ &+ \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{rsk} - \Gamma_{srk}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{srn} - \Gamma_{rsn}) + \Gamma_{nrk} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right] = \\ &= \Delta A_r + (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}) \frac{\partial A_\varphi}{\partial x^\varphi} + \\ &+ \frac{A_r}{2} [\Gamma_{\varphi r\varphi} (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi})] + \frac{A_\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x^\varphi} (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}) \end{aligned}$$

Подставляя сюда (59) и (60), получаем:

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_r}{r^2}. \quad (61)$$

Для проекции на орт $\mathbf{e}_\varphi$ находим с помощью (49), оставляя лишь ненулевые символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi + (\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\ &+ \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{\varphi sk} - \Gamma_{s\varphi k}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{s\varphi n} - \Gamma_{\varphi sn}) + \Gamma_{n\varphi k} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right] = \\ &= \Delta A_\varphi + (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) \frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} + \frac{A_r}{2} \frac{\partial}{\partial x^\varphi} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) + \\ &+ \frac{A_\varphi}{2} \Gamma_{r\varphi\varphi} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) \end{aligned}$$

Подставляя сюда (59) и (60), будем иметь окончательно:

$$(\Delta \mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2} \quad (62)$$

Наконец, для проекции на орт $\mathbf{e}_z$ сразу же находим:

$$(\Delta \mathbf{A})_z = \Delta A_z. \quad (63)$$

Собирая теперь (61)–(63) воедино, имеем:

$$\begin{cases} (\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_r}{r^2}, \\ (\Delta \mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2}, \\ (\Delta \mathbf{A})_z = \Delta A_z. \end{cases} \quad (64)$$

В заключении к этому разделу ещё раз подчеркнём, что все вычисления будут нами вестись только в ортонормированных базисах.

Двухмерная ортогональная параболическая система координат

В качестве ещё одного весьма полезного приложения формулы (49) рассмотрим такой пример. Пусть имеется двухмерное ортогональное преобразование вида:

$$\begin{cases} x = uv, \\ y = \frac{u^2 - v^2}{2}. \end{cases} \quad (65)$$

Тогда метрика в переменных u, v будет:

$$dl^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) = (\partial x^u)^2 + (\partial x^v)^2, \quad (66)$$

где частные дифференциалы:

$$\partial x^u = \sqrt{u^2 + v^2} du, \quad \partial x^v = \sqrt{u^2 + v^2} dv. \quad (67)$$

С помощью алгоритма, изложенного в [5] и немного выше, отличные от нуля символы Кристоффеля первого и второго рода есть:

$$\begin{aligned} \Gamma_{uuu} = \Gamma_{uu}^u &= -\frac{u}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma_{vvv} = \Gamma_{vv}^v = \frac{v}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma_{uvv} = \Gamma_{vv}^u = -\frac{u}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \Gamma_{vu u} = \Gamma_{uu}^v &= -\frac{v}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma_{uuv} = \Gamma_{uvu} = \Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u = \frac{v}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \Gamma_{vvu} = \Gamma_{vuv} &= \Gamma_{vu}^v = \Gamma_{uv}^v = \frac{u}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (68)$$

Найдём проекции оператора Лапласа, действующего на некоторую векторную функцию $\mathbf{A}$ (неважно при этом ковариантный он или контравариантный, поскольку речь идёт об ОНСК), на единичные орты $\mathbf{e}_u$ и $\mathbf{e}_v$ в этом случае. Согласно (49), имеем:

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{A})_i &= \Delta A_i + (\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\ &+ \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{sin} - \Gamma_{isn}) + \Gamma_{nik} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right]. \end{aligned}$$

Откуда проекция на орт $\mathbf{e}_u$ будет:

$$\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{A})_u &= \Delta A_u + (\Gamma_{usk} - \Gamma_{suk}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + \\
&+ \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{usk} - \Gamma_{suk}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{sun} - \Gamma_{usn}) + \Gamma_{nuk} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right] = \\
&= \Delta A_u + (\Gamma_{uvu} - \Gamma_{vu u}) \frac{\partial A_v}{\partial x^u} + (\Gamma_{uvv} - \Gamma_{vuv}) \frac{\partial A_v}{\partial x^v} + \\
&+ \frac{A_u}{2} [\Gamma_{vu u} (\Gamma_{uvu} - \Gamma_{vu u}) + \Gamma_{vuv} (\Gamma_{uvv} - \Gamma_{vuv})] + \\
&+ \frac{A_v}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^u} (\Gamma_{uvu} - \Gamma_{vu u}) + \frac{\partial}{\partial x^v} (\Gamma_{uvv} - \Gamma_{vuv}) + (\Gamma_{uuu} + \Gamma_{uvv}) (\Gamma_{vu u} - \Gamma_{uvu}) + \right. \\
&\left. + (\Gamma_{vu u} + \Gamma_{vvv}) (\Gamma_{vuv} - \Gamma_{uvv}) + \Gamma_{uuu} (\Gamma_{vu u} - \Gamma_{uvu}) + \Gamma_{uvv} (\Gamma_{vuv} - \Gamma_{uvv}) \right). \quad (69)
\end{aligned}$$

Подставляя сюда (67) и (68), найдём:

$$\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{A})_u &= \Delta A_u + \frac{2v}{(u^2 + v^2)^2} \frac{\partial A_v}{\partial u} - \frac{2u}{(u^2 + v^2)^2} \frac{\partial A_v}{\partial v} + \frac{A_u}{2} \left[-\frac{2v^2}{(u^2 + v^2)^3} - \frac{2u^2}{(u^2 + v^2)^3} \right] + \\
&+ \frac{A_v}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^u} \frac{2v}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\partial}{\partial x^v} \frac{2u}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2uv}{(u^2 + v^2)^3} + \frac{2vu}{(u^2 + v^2)^3} \right).
\end{aligned}$$

Или, окончательно:

$$(\Delta \mathbf{A})_u = \Delta A_u + \frac{2}{(u^2 + v^2)^2} \left(v \frac{\partial A_v}{\partial u} - u \frac{\partial A_v}{\partial v} - A_u \right). \quad (70)$$

Аналогично, с помощью (49) получаем проекцию и на орт $\mathbf{e}_v$. Её легко найти благодаря простой замене $u \rightarrow v$, $v \rightarrow u$ в формуле (70), то есть:

$$(\Delta \mathbf{A})_v = \Delta A_v + \frac{2}{(u^2 + v^2)^2} \left(u \frac{\partial A_u}{\partial v} - v \frac{\partial A_u}{\partial u} - A_v \right). \quad (71)$$

В соответствии с определением (4) и частными дифференциалами (67) оператор Лапласа определяется согласно формуле:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^u)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^v)^2} = \frac{1}{(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right). \quad (72)$$

Таким образом, воспользовавшись явным выражением для оператора Лапласа (72), будем иметь из решений (70) и (71):

$$(\Delta \mathbf{A})_u = \frac{1}{(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2 A_u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A_u}{\partial v^2} \right) + \frac{2}{(u^2 + v^2)^2} \left(v \frac{\partial A_v}{\partial u} - u \frac{\partial A_v}{\partial v} - A_u \right), \quad (73)$$

$$(\Delta \mathbf{A})_v = \frac{1}{(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2 A_v}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A_v}{\partial v^2} \right) + \frac{2}{(u^2 + v^2)^2} \left(u \frac{\partial A_u}{\partial v} - v \frac{\partial A_u}{\partial u} - A_v \right). \quad (74)$$

Задача о кручении цилиндра в условиях его нагрева

В качестве практического приложения приведённых выше формул вычислим деформацию упруго-деформируемого цилиндра в условиях его бокового кручения, когда крутящий момент направлен строго вдоль его оси z , при дополнительном условии, когда он ещё и нагревается благодаря приложенному в радиальном по отношению к оси цилиндра градиенту температуры. Считаем, что нижний конец цилиндра жёстко закреплён.

Согласно основному уравнению статической теории упругости [3], описывающему пространственное распределение вектора деформаций $\mathbf{u}$ при учёте теплового эффекта, имеем:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = \frac{\rho \mathbf{g}}{\mu} - \frac{K\beta}{\mu} \nabla T + \frac{\mathbf{f}}{\mu}, \quad (75)$$

где σ – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала, $\mu = \frac{E}{2(1-\sigma)}$ – модуль

сдвига, E – модуль Юнга, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, $K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$ – коэффи-

циент всестороннего сжатия (растяжения), $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_S$ – коэффициент тепло-

вого расширения, T – температура, V – объём тела, S – энтропия, $\mathbf{f}$ – объёмная сила.

Для того, чтобы найти теперь проекции уравнения (75) на ортонормированный базис $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ цилиндрической системы координат, нам следует воспользоваться общими выражениями для оператора Лапласа в соответствии с формулами (64). Легко заметить, что второе слагаемое в левой части уравнения (75) также представляет собой вторую ковариантную производную, но в отличие от выражения (44), его следует вычислять несколько иначе. Действительно, поскольку операция дифференцирования в этом случае представляет собой нахождение градиента от скаляра, то предварительно запишем общее выражение для ковариантной производной от некоторого произвольного вектора $\mathbf{A}$. Имеем, считая этот вектор ковариантным:

$$A_{i,k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s A_s.$$

Сворачивая его по индексам i, k , находим:

$$A_{k,k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^k} - \Gamma_{kk}^s A_s.$$

Записав от этого выражения градиент, получаем:

$$\frac{\partial A_{k,k}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial A_s}{\partial x^i} \Gamma_{kk}^s - \frac{\partial \Gamma_{kk}^s}{\partial x^i} A_s. \quad (76)$$

С другой стороны, поскольку:

$$A_i = g_{is} A^s,$$

то, взяв ковариантную производную от этого выражения с учётом леммы Риччи, согласно которой $g_{ik,l}$ имеем:

$$A_{i,k} = g_{is} A_{,k}^s = g_{is} \left(\frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^s A^l \right) = g_{is} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \Gamma_{ikl} A^l.$$

Сворачивая это выражение по i, k , получаем:

$$A_{k,k} = g_{ks} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \Gamma_{kkl} A^l. \quad (77)$$

Выполнив для него операцию градиента, приходим к формуле:

$$\frac{\partial A_{k,k}}{\partial x^i} = g_{ks} \frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \Gamma_{kkl} \frac{\partial A^l}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{kkl}}{\partial x^i} A^l. \quad (78)$$

Поскольку:

$$\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} = \Gamma_{ksi} + \Gamma_{ski},$$

то из (78) следует, что:

$$\frac{\partial A_{k,k}}{\partial x^i} = g_{ks} \frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^i} + (\Gamma_{ksi} + \Gamma_{ski}) \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \Gamma_{kks} \frac{\partial A^s}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{kks}}{\partial x^i} A^s. \quad (79)$$

Но выражения (76) и (79) должны быть равны. Поэтому взяв от них среднее арифметическое, имеем окончательную формулу для операции *graddiv*, справедливую в любой криволинейной системе координат:

$$\begin{aligned} (graddiv A)_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^i} + g_{ks} \frac{\partial^2 A^s}{\partial x^k \partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{kks}}{\partial x^i} A^s - \frac{\partial \Gamma_{kk}^s}{\partial x^i} A_s \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\Gamma_{ksi} + \Gamma_{ski}) \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \Gamma_{kks} \frac{\partial A^s}{\partial x^i} - \frac{\partial A_s}{\partial x^i} \Gamma_{kk}^s \right]. \end{aligned} \quad (80)$$

В случае ортонормированной СК, благодаря равенствам $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{ikl}$, $A_i = A^i$, $g_{ik} = \delta_{ik}$, получаем из (80):

$$\begin{aligned} (graddiv \mathbf{A})_i &= \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{1}{2} \left[(\Gamma_{ksi} + \Gamma_{ski}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} + (\Gamma_{kks} - \Gamma_{skk}) \frac{\partial A_s}{\partial x^i} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{kks}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{skk}}{\partial x^i} \right) A_s \end{aligned} \quad (81)$$

В случае рассматриваемой нами цилиндрической системы координат из общего выражения (81), если подставить в него символы Кристоффеля согласно (59) и дифференциалы из (60) для проекции на орт $\mathbf{e}_r$, будем иметь:

$$\begin{aligned} (\text{graddiv}\mathbf{A})_r &= \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{A_r}{r^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (82)$$

Для проекции на орт $\mathbf{e}_\varphi$ найдём:

$$\begin{aligned} (\text{graddiv}\mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^\varphi} + \frac{1}{2} (\Gamma_{ksk} - \Gamma_{skk}) \frac{\partial A_s}{\partial x^\varphi} + \frac{1}{2} (\Gamma_{ks\varphi} - \Gamma_{s\varphi k}) \frac{\partial A_s}{\partial x^k} - \Gamma_{s\varphi k} \frac{\partial A_k}{\partial x^s} + \\ &+ \frac{A_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{ks\varphi} + \Gamma_{s\varphi k}) - 2 \frac{\partial \Gamma_{skk}}{\partial x^\varphi} - \Gamma_{n\varphi k} (\Gamma_{ksn} + \Gamma_{nsk} - 2\Gamma_{snk}) \right] = \\ &= \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^\varphi} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) \frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) \frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} + \\ &+ \frac{1}{2} (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi\varphi r}) \frac{\partial A_\varphi}{\partial x^r} - \Gamma_{r\varphi\varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial x^r} - \Gamma_{\varphi\varphi r} \frac{\partial A_r}{\partial x^\varphi} + \\ &+ \frac{A_r}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\varphi} (\Gamma_{\varphi r\varphi} + \Gamma_{r\varphi\varphi}) - 2 \frac{\partial \Gamma_{r\varphi\varphi}}{\partial x^\varphi} \right] + \\ &+ \frac{A_\varphi}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^r} (\Gamma_{r\varphi\varphi} + \Gamma_{\varphi\varphi r}) - \Gamma_{r\varphi\varphi} (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi r\varphi}) - \Gamma_{\varphi\varphi r} (\Gamma_{r\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi\varphi r}) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда определения (59) и дифференциалы (60), приходим к искомому результату:

$$\begin{aligned} (\text{graddiv}\mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Наконец, проекция на орт $\mathbf{e}_z$ даёт:

$$\begin{aligned} (\text{graddiv}\mathbf{A})_z &= \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k \partial x^z} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) \frac{\partial A_r}{\partial x^z} = \\ &= \frac{\partial^2 A_r}{\partial x^r \partial x^z} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial x^\varphi \partial x^z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^z \partial x^z} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\varphi r\varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi}) \frac{\partial A_r}{\partial x^z}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (59) и (60), получим:

$$\begin{aligned} (\text{graddiv}\mathbf{A})_z &= \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (84)$$

То есть, результаты (82)–(84) имеют тот традиционный вид, который и должен у них быть.

С учётом всего сказанного в соответствии с (49) и (79) уравнение (75), записанное в произвольной ортонормированной системе координат, должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta u_i + (\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}) \frac{\partial u_s}{\partial x^k} + \frac{u_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{isk} - \Gamma_{sik}) + \Gamma_{nkk} (\Gamma_{sin} - \Gamma_{isn}) + \right. \\ \left. + \Gamma_{nik} (\Gamma_{snk} - \Gamma_{nsk}) \right] + \\ + \frac{1}{1-2\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{1}{2} (\Gamma_{ksk} - \Gamma_{skk}) \frac{\partial u_s}{\partial x^i} + \frac{1}{2} (\Gamma_{ksi} - \Gamma_{sik}) \frac{\partial u_s}{\partial x^k} - \Gamma_{sik} \frac{\partial u_k}{\partial x^s} + \right. \\ \left. + \frac{u_s}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{ksi} + \Gamma_{sik}) - 2 \frac{\partial \Gamma_{skk}}{\partial x^i} - \Gamma_{nik} (\Gamma_{ksn} + \Gamma_{nsk} - 2\Gamma_{snk}) \right] \right\} = \frac{f_i}{\mu}. \quad (85) \end{aligned}$$

где под объёмной силой f_i подразумевается сумма всех объёмных сил, действующих на выделенный элемент объёма.

Таким образом, с учётом (64), (82) и (84), уравнения приводятся к виду:

$$\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{f_r}{\mu}, \quad (86)$$

$$\Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{f_\varphi}{\mu}, \quad (87)$$

$$\Delta u_z + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) = \frac{f_z}{\mu}. \quad (88)$$

С помощью уравнений (86)–(88) можно приступить теперь к решению нашей задачи, в которой на цилиндр действует крутящий момент $\mathbf{M}$, приложенный к его боковой поверхности, и действующий по касательной к ней. При этом будем предполагать, что нас интересует распределение деформаций вдали от его нижнего закреплённого торца.

Чтобы найти объёмную силу $\mathbf{f}$, возникающую благодаря этому кручению, поступим следующим образом. Поскольку момент сил, приложенных к боковым поверхностям цилиндра, вычисляемый относительно оси цилиндра есть $\mathbf{M} = [\mathbf{F} \times \mathbf{R}]$, где R – радиус цилиндра, а $\mathbf{F}$ – сила, приложенная к его боковой поверхности, то в скалярном виде это равенство можно представить как граничное условие:

$$F_\varphi = \frac{M_z}{R}.$$

Поэтому объёмная сила, отнесённая к единице объёма, будет:

$$f_{\varphi} = \frac{M_z}{VR} = \frac{M_z}{\pi R^3 h}, \quad (89)$$

где h – длина цилиндра.

Предполагая, что момент M_z может действовать на любую внутреннюю область, которую можно представить в виде некоторого виртуального цилиндра радиуса r , то его зависимость от расстояния r можно записать как:

$$M_z(r) = M_z \frac{r^3}{R^3}. \quad (90)$$

Это означает, что объёмная сила должна меняться по закону:

$$f_{\varphi}(r) = M_z \frac{r^2}{\pi R^5 h}. \quad (91)$$

С помощью системы уравнений (86)–(88), при условии, что имеется нагрузка только в виде крутящего момента, силы тяжести и градиента температуры, приложенного перпендикулярно к оси цилиндра, легко прийти к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial \varphi \partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \\ = -\frac{K\beta}{\mu} \frac{\partial T}{\partial r}, \\ \Delta u_{\varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{1-2\sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) = \\ = \frac{M_z r^2}{\pi \mu R^5 h}, \\ \Delta u_z + \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) = \frac{\rho g}{\mu}. \end{cases} \quad (92)$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (93)$$

В силу аксиальной симметрии задачи вектор деформаций можно искать в виде:

$$\mathbf{u} = (u_r(r), u_{\varphi}(r), u_z(z)). \quad (94)$$

В результате, с учётом только радиальной части оператора Лапласа (93), из (92) следует весьма компактная система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{K\beta(1-2\sigma)}{2\mu(1-\sigma)} \frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = \frac{M_z r^2}{\pi\mu R^5 h}, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{\rho g(1-2\sigma)}{2\mu(1-\sigma)}. \end{cases} \quad (95)$$

Из нижнего уравнения прямым интегрированием немедленно находим:

$$u_z = \frac{\rho g(1-2\sigma)z^2}{4\mu(1-\sigma)}, \quad (96)$$

где обе константы интегрирования положены равными нулю.

Из верхнего уравнения в (92) методом вариации постоянных получаем:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{ar}{2}(T - T_0) + \frac{a}{2r} \int r^2 \frac{dT}{dr} dr, \quad (97)$$

где параметр $a = \frac{K\beta(1-2\sigma)}{2\mu(1-\sigma)}$, а T_0 – температура поверхности цилиндра.

Полагая, согласно [3],

$$\mu = \frac{E}{2(1-\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)},$$

найдем, что $a = \frac{\beta}{3}$.

В силу конечности решения в нуле, следует считать, что $C_2 = 0$. Интегрируя последнее слагаемое по частям и предполагая, что на границе радиальное смещение отсутствует, то есть:

$$u_r|_{r=R} = 0,$$

означающее, что $C_1 = 0$, немедленно приходим к искомому решению:

$$u_r = \frac{\beta}{3r} \int_r^R r(T_0 - T) dr. \quad (98)$$

Второе уравнение в системе (95) также легко решается методом вариации постоянных, и в результате мы приходим к такому ответу:

$$u_\varphi = C_3 + C_4 r^3 + \frac{b}{4} r^4, \quad (99)$$

где

$$b = \frac{M_z}{\pi \mu R^5 h}. \quad (100)$$

Из условия $u_\varphi|_{r=0} = 0$ следует, что $C_3 = 0$. Задавая второе граничное условие в виде:

$$u_\varphi|_{r=R} = u_0, \quad (101)$$

приходим к ответу:

$$u_\varphi = u_0 \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \frac{br^3(r-R)}{4}. \quad (102)$$

Найденные решения (96), (98) и (102) были иллюстрирующим примером применения метода ковариантного дифференцирования к конкретной физической задаче.

Заключение

В заключение отметим:

1. Благодаря предложенному алгоритму вычислений легко находятся символы Кристоффеля, автоматически обладающие правильной геометрической размерностью. При этом введение коэффициентов Ламе, как это делается во всех учебниках по тензорному исчислению, является абсолютно лишним.
2. Приведены общие выражения для проекций оператора Лапласа, действующего на ковариантную и контравариантную векторные функции.
3. Показано, что проекции векторов $(\Delta A)^i$ и $(\Delta A)_i$ в ортонормированных базах совпадают. В качестве справки приводится их подробное вычисление в сферических, цилиндрических и в параболических координатах.
4. На примере конкретной задачи теории упругости, решение которой мы не обнаружили в оригинальных источниках, продемонстрирована процедура подобного рода вычислений.

Статья поступила в редакцию 20.05.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложением к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Т. 7. М.: Наука, 2004. 266 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 2004. 524 с.
5. Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с приложением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45.
6. Гладков С. О. К вопросу о линеаризации основного уравнения ОТО // Инженерная физика. 2017. Т. 19. №. 10. С. 19–27.

7. Гладков С. О. К вопросу о взаимодействии полей разной физической природы // Инженерная физика. 2018. Т. 20. №. 3. С. 14–31.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 2003. 560 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды: в 2 т. М.: Наука, 1973.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 2003. 733 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Т. 3. М.: Наука, 2004. 752 с.

REFERENCES

1. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York, Dover, 1957. 318 p.
2. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriya i tenzornyi analiz* [Riemannian geometry and tensor analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p.
3. Landau L. D., Lifshits E. M. *Theory of Elasticity*. Vol. 7. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1986.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1975.
5. Gladkov S. O. [Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-Matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2019, no. 1, pp. 16–45.
6. Gladkov S. O. [To the question of linearization basic equation of RTG]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2017, vol. 19, no. 10, pp. 19–27.
7. Gladkov S. O. [To the question of account the interaction between the fields of different physical nature]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2018, vol. 20, no. 3, pp. 14–31.
8. Landau L. D., Lifshits E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Vol. 8. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1984.
9. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy: v 2 t.* [Mechanics of continuous media: in 2 volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 536 p.
10. Landau L. D., Lifshits E. M. *Fluid Mechanics*. Vol. 6. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1987.
11. Landau L. D., Lifshits E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Vol. 3. Oxford, Pergamon Press, 1977.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математическое моделирование №311 Московского авиационного института (национальный исследовательский университет);
e-mail: sglad51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Mathematical Modeling no. 311, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 3. С. 42–67. DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-42-67

FOR CITATION

Gladkov S. O. Application of the second covariant derivative from the vector function to the problems of hydrodynamics and elasticity theory. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 42–67. DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-42-67