УДК 530.145
DOI: 10.18384-2310-7251-2018-3-82-89

ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА ЭЛЕКТРОНОМ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Эминов П. А.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, Российская Федерация

Аннотация. В дипольном приближении исследованы процессы вынужденного излучения и поглощения света электроном на цилиндрической поверхности во внешнем поле, образованном суперпозицией магнитного и электростатического полей одинакового направления. Найдены правила отбора и соответствующие частоты излучения. Вычислена суммарная энергия вынужденного излучения и поглощения.

Ключевые слова: индуцированное излучение и поглощение, правила отбора

STIMULATED EMISSION AND ABSORPTION OF LIGHT BY AN ELECTRON ON A CYLINDRICAL SURFACE

P. Eminov
National Research University 'Higher School of Economics'
ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation

Abstract. The processes of stimulated emission and absorption of light by an electron on a cylindrical surface in an external field formed by a superposition of magnetic and electrostatic fields of the same direction are studied in the dipole approximation. The selection rules and the corresponding radiation frequencies are found. The total energy of stimulated emission and absorption is calculated.

Keywords: stimulated emission and absorption, selection rules

Введение

В наноструктурах теория предсказывает целый ряд физических эффектов, обусловленных внешними полями, а также размерами и топологическими особенностями области, где движутся частицы.

Многообразие физических эффектов, предсказываемых в наноструктурах, связано как с наноразмерами и топологическими свойствами области, в которой движутся частицы, так и с учётом влияния внешнего поля. В магнитном поле неодносвязность области движения частиц приводит к эффектам [1–3], аналогичным эффекту Ааронова-Бома.

Закон дисперсии [1–3] получается в предположении о достаточно большой глубине и малой ширине цилиндрической ямы, удерживающей электрон на поверхности цилиндра. Благодаря этому расстояния между соседними уровнями энергии движения электрона в направлении нормали к поверхности цилиндра относительно большие и практически все электроны по радиальному квантовому числу находятся в нижнем энергетическом состоянии при достаточно низких температурах.

В последние годы большое внимание уделяется изучению различных методов генерации излучения на основе низкоразмерных структур и анализу работы лазеров на свободных электронах [4–7].

В настоящей работе строится теория индуцированного излучения электрона на цилиндрической поверхности в параллельных электрическом и магнитном полях, направленных вдоль оси Oz цилиндра. Магнитное поле задаётся векторным потенциалом:

$$\vec{A}=\left\{-\frac{1}{2}HR\sin(\varphi),\ \ \frac{1}{2}HR\cos(\varphi),\ 0\right\}, \tag{1}$$

где H – напряжённость магнитного поля, R – радиус цилиндра, φ – полярный угол цилиндрической системы координат. Потенциальная энергия электрона равна:

$$U=-\frac{e^2a}{2}\left(R^2-2z^2\right), \tag{2}$$

где $e<0$ – заряд электрона, a – положительная постоянная. Потенциальная энергия электрона (2) в электростатическом поле используется, например, и при анализе работы магнетрона. Заметим, что в трёхмерном случае при свободном движении электрона в суперпозиции полей (1) и (2) электростатическое поле можно подобрать так, что индуцированное излучение будет превалировать над поглощением в нерелятивистском приближении [8].

Вынужденные переходы электрона на цилиндрической поверхности

Найдём сначала волновые функции стационарных состояний электрона на цилиндрической поверхности в рассматриваемом электромагнитном поле. Нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}=\left(\frac{\vec{P}^2}{2m}+U\right)\psi(r,t), \tag{3}$$

где $\vec{P}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\vec{r}}-\dfrac{e}{c}\vec{A}$ – оператор кинетического импульса.

После перехода к цилиндрическим координатам для координатной части волновой функции стационарного состояния получаем следующее уравнение:

$$\left[\frac{p_z^2}{2m}-\frac{e^2a}{2}\left(R^2-2z^2\right)+\frac{1}{2m}\left(p_\varphi-\frac{e}{c}A_\varphi\right)^2\right]\psi(z,\varphi)=E\psi(z,\varphi). \tag{4}$$

Здесь E – энергия стационарного состояния и приняты следующие обозначения: $p_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}, p_\varphi - \dfrac{e}{c}A_\varphi = \dfrac{\hbar}{R}[-i\dfrac{d}{d\varphi} + \dfrac{\Phi}{\Phi_0}]$, $\dfrac{\Phi}{\Phi_0}$ – параметр Ааронова-Бома.

Учитывая, что потенциальная энергия не зависит от координаты φ, решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$\psi(z,\varphi) = u(\varphi)\upsilon(z). \tag{5}$$

Для определения функции $u(\varphi)$ получаем следующую задачу:

$$\left(i\frac{d}{d\varphi} - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 u(\varphi) = E_1\frac{2mR^2}{\hbar^2}u(\varphi),$$
$$u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi). \tag{6}$$

Ортонормированные собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (6):

$$u_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(in\varphi),\ \ 0 \le \varphi < 2\pi \tag{7}$$

$$E_1(n) = \varepsilon\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2,\ \ n = 0,\ \ \pm 1,\ \ \pm 2,.. \tag{8}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\hbar^2}{2mR^2}$ – энергия размерного конфайнмента, n – орбитальное главное число, $E_1(n)$ – энергия поперечного движения.

Продольная часть волновой функции $\upsilon(z)$ является решением уравнения

$$\upsilon'' + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E_2 + \frac{e^2R^2a}{2}\right) - \lambda^2z^2\right]\upsilon(z) = 0, \tag{9}$$

где принято обозначение:

$$\lambda = \frac{|e|}{\hbar}\sqrt{2am}, \tag{10}$$

а E_2 – энергия продольного движения электрона. Уравнение (9) представляет собой стационарное уравнение Шредингера для гармонического осциллятора с энергией:

$$E_2(l) = \hbar\omega_2\left(l + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2R^2a}{2},\ \ l = 0, 1, 2,.. \tag{11}$$

и с частотой $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2e^2a}{m}}$. Ортонормированные собственные функции продольного движения, отвечающие собственным значениям (11), выражаются через функции Эрмита:

$$\upsilon_l(z) = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} H_l(\sqrt{\lambda} z) \exp(-\frac{\lambda z^2}{2}), \qquad (12)$$

$$H_l(\delta) = (-1)^l \exp(\delta^2) \frac{d^l(e^{-\delta^2})}{d\delta^l}, \ \delta = \sqrt{\lambda} z. \qquad (13)$$

Таким образом, энергия и ортонормированные собственные функции стационарных состояний электрона на цилиндрической поверхности в электромагнитном поле, образованном суперпозицией полей (1) и (2), определяются двумя квантовыми числами $(l, n) \equiv \alpha$:

$$E(n,l) = \varepsilon \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \hbar\omega_2 \left(l + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 R^2 a}{2}, \qquad (14)$$

$$\psi_{nl}(z,\varphi) = u_n(\varphi) \upsilon_l(z) \frac{1}{\sqrt{R}}, \qquad (15)$$

где функции $u_n(\varphi)$ и $\upsilon_l(z)$ определяются формулами (7) и (12).

Как известно [8], взаимодействие электронов с полем виртуальных фотонов приводит к спонтанным переходам электрона из одного энергетического состояния в другое с меньшей энергией, то есть спонтанные переходы всегда переходят сверху вниз. При наличии внешних фотонов наряду со спонтанными переходами должны существовать и вынужденные переходы под действием внешних фотонов. Вероятность $W(n, l \to n', l')$ вынужденного перехода электрона под действием внешней электромагнитной волны с частотой ω определяется формулой [8]:

$$W(n, l \to n', l') = \frac{2\pi c e^2 N(\kappa)}{\hbar \kappa L^3} \left\{ \dot{A} \left(\vec{\beta}^* \vec{\beta} \right) - \left(\vec{\beta}^* \vec{\kappa}^0 \right) \left(\vec{\beta} \vec{\kappa}^0 \right) \right\} \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_0^t e^{-ict(\kappa_{\alpha\alpha'} \mp \kappa)} dt \right|^2, \qquad (16)$$

где $N(\kappa)$ – число падающих квантов внешней электромагнитной волны с импульсом $\hbar\vec{\kappa} = \hbar\kappa\vec{\kappa}^0$ ($\vec{\kappa}^0$ – единичный вектор вдоль импульса фотона с частотой ω), $\beta_{x,y,z}$ – матричные элементы процесса, причём знак минус перед волновым числом κ в показателе экспоненты отвечает индуцированному излучению, а плюс – поглощению. Частота излучения:

$$\omega_{\alpha\alpha'} = c\kappa_{\alpha\alpha'} = \frac{E(n,l) - E(n',l')}{\hbar}. \qquad (17)$$

В наиболее интересном случае, когда электрон в начальном состоянии обладает конечным временем жизни τ, в формуле (16) интеграл по времени следует заменить согласно формуле [8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\int_0^t e^{-ict(\kappa_{\alpha\alpha'}\mp\kappa)}dt\right|^2 \to \frac{\left|\int_0^t e^{-ict(\kappa_{\alpha\alpha'}\mp\kappa)-\frac{t}{2\tau}}dt\right|^2}{\tau} = \frac{4\tau}{4c^2\tau^2(\left|\kappa_{\alpha\alpha'}\right|-\kappa)^2+1}. \quad (18)$$

Интеграл (18) вычислен в предположении, что $t \gg \tau$, причём в предельном случае больших значений τ правая часть равенства (18) обращается в дельта-функцию Дирака.

Число фотонов $N(\vec{\kappa})$ в объёме L^3 связано с вектором напряжённости поля $\vec{E}$ внешней электромагнитной волны формулой:

$$\frac{\vec{E}^2}{4\pi} = \hbar c\kappa N(\kappa)/L^3,$$

левая и правая части которой определяют энергию поля в единице объема. В результате находим, что при квантовом переходе $(n, l \to n', l')$ соответствующая частота излучения находится из равенства:

$$\omega_{\alpha\alpha'} = \omega_2(l-l') + \frac{\varepsilon}{\hbar}(n-n')\left(n+n'+2\frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (19)$$

Для вероятности (16) вынужденного перехода под действием внешней электромагнитной волны с волновым вектором $\vec{\kappa}$, составляющим угол θ с осью Oz, получаем формулу:

$$W(n,l\to n',l') = \frac{e^2E^2}{{}^2\kappa^2}\left[\left|\beta_x\right|^2 + \cos^2\theta\left|\beta_y\right| \ + \sin^2\theta\left|\beta_z\right|^2\right]\frac{}{4\tau^2(\left|\omega_{\alpha\alpha'}\right|-\omega)^2+1}. \quad (20)$$

Для матричных элементов процесса, описывающих переход $(n, l \to n', l')$, в полярных координатах получаем следующее выражение:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{mc}\int \psi_{n'l'}(z,\varphi)e^{-i\vec{\kappa}\vec{r}}(-i\frac{\partial}{\partial\vec{r}} - \frac{e}{c}\vec{A})\psi_{nl}(z,\varphi)Rdzd\varphi. \quad (21)$$

Используя далее рекуррентные соотношения для функций Эрмита и формулы:

$$P_x\psi_{nl}(z,\varphi) = -\frac{\hbar}{R}\sin\varphi(n+\frac{\Phi}{\Phi_0})\psi_{nl}(z,\varphi),$$

$$P_y\psi_{nl}(z,\varphi) = \frac{\hbar}{R}\cos\varphi(n+\frac{\Phi}{\Phi_0})\psi_{nl}(z,\varphi), \quad (22)$$

в дипольном приближении $(e^{-i\vec{\kappa}\vec{r}} \ll 1)$ получаем:

$$\beta_x = -i\frac{\pi\hbar}{2mc}[n+\frac{\Phi}{\Phi_0}]\delta_{l,l'}\delta_{n,n'+1},$$
$$\beta_y = i\frac{\pi\hbar}{2mc}[n+\frac{\Phi}{\Phi_0}]\delta_{l,l'}\delta_{n,n'+1},$$
$$\beta_z = -i\hbar\sqrt{\frac{\lambda}{2}}R\delta_{n,n'}[\sqrt{l}\delta_{l',l-1} - \sqrt{l+1}\delta_{l',l+1}]. \quad (23)$$

В результате, квадраты модулей матричных элементов процесса можно представить в следующем виде:

$$\left|\beta_x\right|^2 = \left|\beta_y\right|^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{4m^2c^2}[n+\frac{\Phi}{\Phi_0}]^2\delta_{l',l}\delta_{n',n-1}, \quad (24)$$

$$\left|\beta_z\right|^2 = \frac{\lambda\hbar^2R^2}{2m^2c^2}\delta_{n,n'}[l\delta_{l',l-1} + (l+1)\delta_{l',l+1}]. \quad (25)$$

Из формул (24) и (25) находим правила отбора и соответствующие им частоты излучения и поглощения:

$$1)\ \Delta l = l - l' = 0,\ \Delta n = n - n' = 1,\ \omega_1 = \omega(n,\ l \to n-1,\ l) = \frac{\varepsilon}{\hbar}[2n-1+\frac{\Phi}{\Phi_0}], \quad (26)$$

$$2)\ \Delta n = 0,\ \Delta l = \pm 1,\ \omega_{3,2} = \mp\omega_2. \quad (27)$$

Заключение

Полученные в работе формулы (2), (24)–(27) описывают в дипольном приближении процесс вынужденного излучения электрона на цилиндрической поверхности в электромагнитном поле, образованном суперпозицией полей (1) и (2).

Для дальнейшего анализа полученных результатов найдём суммарную энергию вынужденного излучения и поглощения электрона. В случае (26), когда изменяется только квантовое число n, определяющее энергию поперечного движения, имеем:

$$W_1 = \hbar\omega_1 W(l,\ n \to l,\ n-1) = \varepsilon\left[2n-1+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right](1+\cos^2\theta)$$
$$\frac{e^2E^2\pi^2}{2(\kappa mc)^2}\left(n+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2\frac{\tau}{4\tau^2(\omega_1-\omega)^2+1}. \quad (28)$$

Мы видим, что электромагнитные волны, частоты которых лежат вблизи частоты ω_1, будут вынужденно излучаться ($W_1 > 0$), причём значение W_1 зависит не только от орбитального квантового числа n, но и от параметра Ааронова-Бома. Во втором случае, когда изменяется только квантовое число l, определяющее энергию продольного движения электрона, находим:

$$W_2 = \hbar\omega_2[W(l,\ n \to l-1,\ n) - W(l,\ n \to l+1,\ n)] = -\hbar\omega_2 \sin^2\theta \frac{e^2E^2\lambda R^2}{(2mc\kappa)^2} \cdot \frac{\tau}{4\tau^2(\omega_2-\omega)^2+1} < 0. \quad (29)$$

Итак, электромагнитные волны, частоты которых лежат вблизи частоты ω_2, наоборот, должны поглощаться системой, а зависимость W_2 от магнитного поля содержится только в среднем времени пребывания электрона в начальном состоянии. Обобщение полученных результатов на случай электронного газа нанотрубки будет проведено отдельно.

Статья поступила в редакцию 30.07.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обменное взаимодействие и осцилляции намагниченности электронного газа в нанотрубках / Эминов П. А., Сезонов Ю. И., Альперн А. В., Сальников Н. В. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2006. Т. 130. № 4. С. 724–728.
2. Эминов П. А. Экранирование кулоновского поля в намагниченном электронном газе квантового цилиндра // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2009. Т. 135. № 5. С. 1029–1036.
3. Эминов П. А., Гордеева С. В., Соколов В. В. Флуктуации термодинамических свойств намагниченного квантового цилиндра в окрестности критической температуры // Доклады Академии наук. 2013. Т. 450. № 6. С. 659.
4. Садыков Н. П., Скоркин Н. А. Метод генерации электромагнитного излучения на основе нанотрубок при наличии постоянного электрического поля и поля электромагнитной волны // Физика и техника полупроводников. 2012. Т. 46. № 2. С. 168–174.
5. Yokomizo N. Radiation from electrons in graphene in strong electric field // Annals of Physics. 2014. Vol. 351. P. 166–199.
6. Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. The physics of X-ray free-electron lasers // Reviews of Modern Physics. 2016. Vol. 88. Iss. 1. P. 015006.
7. Жуковский К. В. Ондуляторы и генерация рентгеновских импульсов в лазерах на свободных электронах с самоусилением спонтанного излучения // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2017. № 2. С. 29–44.
8. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974. 392 с.

REFERENCES

1. Eminov P. A., Sezonov Yu. I., Al'pern A. V., Sal'nikov N. V. [Exchange interaction and oscillations of the magnetization of the electron gas in a quantum cylinder]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2006, vol. 130, no. 4, pp. 724–728.
2. Eminov P. A. [Screening of the Coulomb field in a magnetized electron gas of a quantum cylinder]. In: *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2009, vol. 135, no. 5, pp. 1029–1036.
3. Eminov P. A., Gordeeva S. V., Sokolov V. V. [Fluctuations in the thermodynamic properties of a magnetized quantum cylinder in the vicinity of the critical temperature]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2013, vol. 450, no. 6, pp. 659.

4. Sadykov N. P., Skorkin N. A. [Generation of electromagnetic radiation based on nanotubes under a constant electric field and an electromagnetic wave field]. In*: Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Semiconductors], 2012, vol. 46, no. 2, pp. 168–174.
5. Yokomizo N. Radiation from electrons in graphene in strong electric field. In: Annals of Physics, 2014, vol. 351, pp. 166–199.
6. Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. The physics of X-ray free-electron lasers. In: *Reviews of Modern Physics*, 2016, vol. 88, iss. 1, P. 015006.
7. Zhukovskii K. V. [Undulators and generation of X-ray pulses in free-electron lasers with self-amplified spontaneous emission]. In: *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya* [Moscow University Physics Bulletin], 2017, no. 2, pp. 29–44.
8. Sokolov A. A., Ternov I. M. *Relyativistskii elektron* [Relativistic electron]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 392 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Эминов Павел Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор департамента прикладной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;
e-mail: peminov@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Pavel A. Eminov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics, National Research University ‘Higher School of Economics’;
e-mail: peminov@mail.ru;

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Эминов П. А. Вынужденное излучение и поглощение света электроном на цилиндрической поверхности // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 3. С. 82–89.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-82-89

FOR CITATION

Eminov P. A. Stimulated emission and absorption of light by an electron on a cylindrical surface. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 3, pp. 82–89.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-3-82-89