РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК. 514.83

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-16-45

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ПРОБЛЕМАМ МЕХАНИКИ, ФИЗИКИ И ГЕОМЕТРИИ

Гладков С. О.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125997, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4, Российская Федерация*

Аннотация. С помощью предложенного в работе несложного математического подхода продемонстрировано строгое вычисление символов Кристоффеля, а также тензора Римана, заведомо имеющих правильную геометрическую размерность, что является чрезвычайно важным при решении огромного класса чисто физических задач. В качестве примеров рассмотрены четыре ортогональные системы координат, две из которых это сферическая и цилиндрическая, являющиеся стандартными при изложении любого курса тензорного анализа, а две другие представляют собой параболическую систему координат и ортогональную двумерную, для которых также продемонстрировано вычисление символов Кристоффеля, оператора Лапласа и тензоров Римана и Риччи, все компоненты которых автоматически имеют правильные геометрические размерности. Продемонстрирован ряд физических приложений описываемого формализма. Рассмотрен пример не ортогональной двумерной системы координат, с помощью которой приводится подробное вычисление символов Кристоффеля обоих родов и находится выражение для оператора Лапласа с приложением к задачам теории упругости и гидродинамики.

Ключевые слова: тензор деформаций, тензор напряжений, уравнение Навье-Стокса, метрический тензор, ковариантное дифференцирование, оператор Лапласа, ортогональная система координат, символ Кристоффеля, тензор Римана.

ALTERNATIVE CALCULATION OF COVARIANT DERIVATIVES WITH AN APPLICATION TO THE PROBLEMS OF MECHANICS, PHYSICS AND GEOMETRY

S. Gladkov

*Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe shosse 4, 125997 Moscow, Russian Federation*

© СС ВУ Гладков С. О., 2019.

Abstract. Based on a simple mathematical approach proposed in the paper, we demonstrate a rigorous computation of the Christoffel symbols and the Riemann tensor that obviously have a regular geometric dimension, which is extremely important in solving a huge class of purely physical problems. As examples, we consider four orthogonal coordinate systems, two of which are spherical and cylindrical, i.e. standard for describing any course of tensor analysis, and the other two are parabolic and orthogonal two-dimensional coordinate systems, for which the Christoffel symbols, the Laplace operator, and Riemann and Ricci, whose all components automatically have the correct geometric dimensions, are calculated. A number of physical applications of the described mathematical formalism are demonstrated. An example of a nonorthogonal two-dimensional coordinate system is considered, with the help of which a detailed calculation of the Christoffel symbols of both kinds is given, and an expression is found for the Laplace operator with application to the problems of elasticity theory and hydrodynamics.

Keywords: strain tensor, stress tensor, Navier-Stokes equation, metric tensor, covariant differentiation, Laplace operator, orthogonal coordinate system, Christoffel symbol, Riemann tensor.

Введение

При внимательном знакомстве с теорией ковариантного дифференцирования (см., к примеру, монографии [1–4]) всё время возникает вопрос, связанный с обоснованием правильной размерности метрического тензора или символов Кристоффеля и тензора Римана. Этот момент является ключевым при решении огромного класса не только различных физических задач, но и чисто математических.

Действительно, если, к примеру, выбрать сферическую систему координат и записать её метрику в обычном виде, то имеем:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

Для неё всегда вводятся обозначения компонент ковариантного метрического тензора в стандартном виде, как $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$, [1–3]. При рассмотрении общего случая ортогональной системы координат вместо (1) обычно используется выражение через коэффициенты Ламе h_i [2]. То есть

$$dl^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2, \quad (2)$$

При сравнении (2) с (1) все компоненты h_1 , h_2 , h_3 легко написать.

Как известно [4; 5], метрику в самом общем виде можно представить, как:

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dx_i dx^i, \quad (3a)$$

где g_{ik} – компоненты ковариантного метрического тензора, dx^i – дифференциалы контравариантных координат, а dx_i – дифференциалы ковариантных координат. Напомним, что по повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование [1].

Если записать определение метрики в виде суммы квадратов, то есть как (см. соответствие на примере (9) и далее):

$$dl^2 = dx^{i^2} = dx_i^2 \quad (3б)$$

и воспользоваться заданным законом преобразования к новым переменным, а именно:

$$x_i = x_i(x^k), \quad (4)$$

где соответственно x_i – это ковариантные координаты, а x^k – контравариантные, то, пользуясь определением элемента длины в виде (36) и подставляя в него преобразования (4), приходим к соотношению, справедливому в любой системе координат:

$$dl^2 = dx_i^2 = dx^{i2} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \frac{\partial x_n}{\partial x^k} dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^k = g^{ik} dx_i dx_k = dx_i dx^i, \quad (5)$$

Надо заметить, что соотношение (5) имеет довольно важное значение и доказывает, что при написании различных типов преобразований, в знаменатели которых входят квадраты дифференциалов, равным счётом не имеет никакого значения, каким образом мы будем писать соответствующие вторые производные, то есть должно иметь место ковариантное тождество (см., например, (9)):

$$\frac{\delta^2}{\delta x_i^2} = \frac{\delta^2}{\delta x^{i2}} = \frac{\delta^2}{\delta x_i \delta x^i}, \quad (6)$$

справедливое в любой ортогональной системе координат (сокращенно СК), доказательство которого на конкретных примерах будет приведено чуть ниже.

Возвращаясь к (5), заметим (см. [1]), что с помощью базиса $g_{n,i} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i}$. Можно ввести ковариантный метрический тензор [5]:

$$g_{ik} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \frac{\partial x_n}{\partial x^k}. \quad (7)$$

С его же помощью определяются и символы Кристоффеля первого рода [1].

$$\Gamma_{ikl} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l}. \quad (8)$$

Как видим, символ Кристоффеля симметричен по индексам k, l и эта формула будет нами использоваться далее.

Мы не станем применять выражение для символа Кристоффеля через линейные производные от метрического тензора, как это приводится, например, в [1–5], а будем пользоваться только определением (7), как наиболее понятным и информативным с точки зрения размерности (см. ниже). Действительно, поскольку x_i и x^k – это координаты, имеющие размерность единицы длины [см], то символ Кристоффеля, как видим из (7), должен иметь размерность обратной длины, то есть:

$$[\Gamma_{ikl}] = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{\text{см}} \right).$$

Причём подчеркнём, что это относится ко всем его двадцати семи компонентам, если говорить о трёхмерном пространстве. Действительно, если буква Γ одна для всех компонент, то и размерность у всех должна быть одинакова. В противном случае имеет место довольно странная ситуация. В самом деле, если, к примеру, взять силу $\mathbf{F}$ с компонентами F_i , то можно было бы сказать, что F_1 имеет одну размерность, а, скажем, F_3 – другую. Это утверждение относится и к компонентам метрического тензора (6), для которого все его компоненты должны быть безразмерны. Точно такое же утверждение имеет место и в отношении тензора Римана, размерность всех компонент которого есть $\frac{1}{L^2}$. Фактически,

прозвучавший сейчас тезис и заставил нас взяться за написание настоящей статьи для того, чтобы продемонстрировать здесь простой и понятный алгоритм вычисления любой физической или геометрической величины с заведомо правильной размерностью, не используя при этом коэффициенты Ламе.

Масса примеров, рассмотренных далее и приводящих в итоге к правильным результатам, позволяет с уверенностью констатировать, что предложенный подход является корректным.

Ниже в качестве этих примеров будет приведено вычисление символов Кристоффеля и компонент тензора Римана в сферической (стандартной) системе координат, цилиндрической, и в более сложных случаях параболической системы координат, и двумерной ортогональной и не ортогональной системах криволинейных координат. Также будут приведены некоторые примеры из теории упругости, и при этом автоматически будет строго доказана полная ненужность коэффициентов Ламе.

Основная часть

В любой ортогональной системе координат ковариантные и контравариантные компоненты символов Кристоффеля и тензора Римана тождественно равны [5], то есть:

$$\Gamma_{ikl} = \Gamma_{kl}^i \text{ и } R_{iklm} = R_{klm}^i.$$

В качестве наглядного примера рассмотрим классическую сферическую СК и, согласно (1), введём следующие соответствия:

$$dx^1 = dr, \quad dx^2 = r d\theta, \quad dx^3 = r \sin \theta d\varphi. \quad (9)$$

При этом напомним, что переход от ковариантных декартовых координат к контравариантным сферическим имеет обычный вид:

$$x_1 = x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = z = r \cos \theta. \quad (10)$$

Это значит, что базис $g_{n,i} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i}$ в общем виде можно представить как:

$$\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где, например, единичный вектор $\mathbf{g}_1$ есть:

$$\mathbf{g}_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x^1}, \frac{\partial x_1}{\partial x^2}, \frac{\partial x_1}{\partial x^3} \right). \quad (12)$$

Аналогично для $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{g}_3$. Все они, что вполне очевидно, образуют матрицу преобразований. Для нашего конкретного примера с помощью (9) и (10) легко получаем из (12)

$$\mathbf{g}_1 = (\sin \theta \cos \varphi, \cos \theta \cos \varphi, -\sin \varphi)$$

и, аналогично,

$$\mathbf{g}_2 = (\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad \mathbf{g}_3 = (\cos \theta, -\sin \theta, 0).$$

Подставив их в (11), находим ортонормированную матрицу преобразований:

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Как видно, её определитель

$$\|\hat{\mathbf{g}}\| = 1. \quad (14)$$

По определению метрического тензора, согласно (6), имеем:

$$\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{g}} \hat{\mathbf{g}}^T.$$

Перемножая матрицу (13) на свою транспонированную, находим в результате метрический тензор в виде единичной матрицы:

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

А потому $\Gamma_{ikl} = g_{is} \Gamma_{kl}^s = \Gamma_{kl}^i$ и $R_{iklm} = g_{is} R_{klm}^s = R_{iklm}^i$. Что и требовалось доказать.

Совершенно понятно, что приведённое доказательство является общим для любой ортогональной системы координат (сокращённо ОСК). Что касается не ортогональной системы координат (сокращённо НСК), то с ней дело обстоит несколько сложнее, однако алгоритм доказательства остаётся тем же, но только в этом случае ковариантные и контравариантные компоненты будут не равны, то есть

$$\Gamma_{kl}^i \neq \Gamma_{ikl}, \quad R_{iklm}^i \neq R_{iklm}.$$

С помощью описанного простого правила вычислим теперь все компоненты символа Кристоффеля и начнём со сферических координат.

Как легко видеть, отличными от нуля будут только девять символов Кристоффеля. Это $\Gamma_{r\theta\theta}$, $\Gamma_{r\varphi\varphi}$, $\Gamma_{\theta\varphi\varphi}$, $\Gamma_{\theta r\theta} = \Gamma_{\theta\theta r}$, $\Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r}$ и $\Gamma_{\varphi\theta\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi\theta}$. Все остальные равны нулю. В качестве простого примера покажем, как следует правильно применять формулу (7). Для этого стоит подчеркнуть, что для метрического тензора, записанного в виде матрицы (15), применение общепринятой формулы для символов Кристоффеля второго рода, а именно

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s} \right),$$

(см. [1]) вызовет определённые затруднения (как видно, они просто равны нулю). Именно поэтому мы будем использовать общее выражение (7), согласно которому:

$$\Gamma_{ikl} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l}.$$

Вычисление символов Кристоффеля

В соответствии с определениями (9) получаем:

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{\partial x_n}{\partial x^1} \frac{\partial^2 x_n}{(\partial x^2)^2} = \frac{\partial x_1}{\partial x^1} \frac{\partial^2 x_1}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial x_2}{\partial x^1} \frac{\partial^2 x_2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial x_3}{\partial x^1} \frac{\partial^2 x_3}{(\partial x^2)^2}.$$

Подставляя сюда преобразования (10), а в знаменатель подставляя просто дифференциалы (9), находим в результате, что:

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial^2 x}{(r\partial\theta)^2} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial^2 y}{(r\partial\theta)^2} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial^2 z}{(r\partial\theta)^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} (-r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - r \cos^2 \theta) = -\frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

С помощью этого нехитрого приёма можно легко найти и остальные компоненты символов Кристоффеля. Заметим здесь, что все они в результате применения преобразований (9) для дифференциалов и (10) для координат будут автоматически иметь правильную размерность. В итоге мы приходим к следующей таблице отличных от нуля правильных символов Кристоффеля, которые, как и должно быть, автоматически все имеют размерность $\frac{1}{L}$, где L – размерность длины (см. табл. 1).

Таблица 1. Символы Кристоффеля

$\Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{r}$	$\Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\varphi\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\frac{ctg\theta}{r}$
$\Gamma_{\theta r\theta} = \Gamma_{\theta\theta r} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\varphi r\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi r} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r}$	
$\Gamma_{\varphi\theta\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi\theta} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \frac{ctg\theta}{r}$		

(17)

(17)

Тензор деформации

В качестве ещё одного примера применения описанного приёма вычислим компоненты тензора деформаций:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right), \quad (18)$$

где вектор деформаций в декартовой системе координат есть $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

При переходе к любой криволинейной системе координат формула (18) уже не будет представлять собой тензор, а потому следует вспомнить, что тензором в криволинейной системе координат является ковариантная производная от вектора [1]. Это означает, что обобщение формулы (18) на кривое пространство в инвариантном виде следует записать как следующее симметричное выражение:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left((g_{is} u^s)_{,k} + (g_{ks} u^s)_{,i} \right), \quad (19)$$

где запятая перед индексом традиционно означает ковариантную производную, а метрический тензор по своим свойствам позволяет проводить поднятие и опускание соответствующих индексов. Напомним, что контравариантный метрический тензор g^{ik} является обратным к ковариантному g_{ik} и подчиняется в случае произвольной криволинейной СК соотношению [1; 4]:

$$g_{is} g^{sk} = \delta_i^k, \quad (20)$$

где δ_i^k – единичная матрица, или просто символ Кронекера в смешанных инвариантных компонентах. В связи с равенством (20) подчеркнём ещё раз, что когда речь идёт об ОСК, его можно писать, не различая ковариантных и контравариантных компонент, то есть в виде:

$$g_{is} g^{sk} = g_{is} g_{sk} = g^{is} g^{sk} = \delta_i^k = \delta_{ik} = \delta^{ik}.$$

Для осуществления ковариантного дифференцирования в (19) следует вспомнить [1], что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, то есть $g_{ik,s} = 0$ (теорема Риччи), поэтому из (19) сразу же следует, что:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (g_{is} u_{,k}^s + g_{ks} u_{,i}^s), \quad (21)$$

а потому, с помощью правила вычисления ковариантной производной согласно [1], имеем:

$$u_{,i}^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^k u^s. \quad (22)$$

Для ковариантного тензора деформаций тогда получаем:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s u_s \right) + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^s u_s \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right) - \Gamma_{ik}^s u_s. \quad (23)$$

Из определения (23) видно, что тензор деформаций, во-первых, является симметричным по индексам, то есть $u_{ik} = u_{ki}$, а во-вторых, величиной безразмерной, как и должно быть. С помощью (23) для всех шести отличных от нуля его компонент имеем:

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^l u_l = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 - \Gamma_{11}^3 u_3 = \frac{\partial u_r}{\partial r} - \Gamma_{rr} u_r - \Gamma_{\theta r} u_\theta - \Gamma_{\varphi r} u_\varphi.$$

Согласно же таблице 1 видим, что все символы Кристоффеля здесь равны нулю. Поэтому

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \quad (24)$$

Далее:

$$u_{22} = u_{\theta\theta} = \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \Gamma_{22}^l u_l = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \Gamma_{r\theta\theta} u_r - \Gamma_{\theta\theta\theta} u_\theta - \Gamma_{\varphi\theta\theta} u_\varphi.$$

Согласно таблице 1:

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta\theta r} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}. \quad (25)$$

Следующий диагональный элемент:

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial x^3} - \Gamma_{\varphi\varphi}^l u_l = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \Gamma_{r\varphi\varphi} u_r - \Gamma_{\theta\varphi\varphi} u_\theta - \Gamma_{\varphi\varphi\varphi} u_\varphi.$$

Благодаря таблице 1, получаем отсюда:

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cot \theta}{r} u_\theta. \quad (26)$$

Теперь найдём недиагональные элементы тензора деформаций. Согласно (23) имеем:

$$u_{12} = u_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - \Gamma_{r\theta}^l u_l = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \Gamma_{rr\theta} u_r - \Gamma_{\theta\theta r} u_\theta - \Gamma_{\varphi\theta r} u_\varphi.$$

Из таблицы 1 находим, следовательно,

$$u_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r}. \quad (27)$$

Далее

$$u_{23} = u_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \right) - \Gamma_{\theta\varphi}^l u_l = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) - \Gamma_{\theta\varphi\theta} u_\theta - \Gamma_{\varphi\theta\varphi} u_\varphi - \Gamma_{r\varphi\theta} u_r$$

и, благодаря таблице 1,

$$u_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r}. \quad (28)$$

Наконец,

$$u_{13} = u_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \right) - \Gamma_{r\varphi}^l u_l = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \Gamma_{rr\varphi} u_r - \Gamma_{\theta r\varphi} u_\theta - \Gamma_{\varphi r\varphi} u_\varphi.$$

Подставляя сюда отличные от нуля символы Кристоффеля, имеем в итоге:

$$u_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{u_\varphi}{r}. \quad (29)$$

Объединяя, таким образом, формулы (24) – (29) в таблицу, получаем (см. табл. 2):

Таблица 2. Тензор деформаций

$u_{r\theta} = u_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r}$		$u_{r\varphi} = u_{\varphi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{u_\varphi}{r}$	
$u_{\theta\varphi} = u_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\right) - \frac{u_\varphi\operatorname{ctg}\theta}{r}$			
$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$	$u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$	$u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\cdot u_\theta$	

Тензор напряжений

Остановимся ещё на одном физическом примере из теории упругости и вычислим компоненты тензора напряжений $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ в сферической системе координат. По определению, приведённому, например, в [2], имеем для него:

$$\sigma_{ik} = 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + K \delta_{ik} u_{ll}, \quad (30)$$

где μ – модуль сдвига, а K – коэффициент всестороннего сжатия. Все остальные обозначения известны. Замечательным в этой формуле является то, что согласно (23), мы сразу же можем приступить к вычислению всех шести отличных от нуля его компонент. Если ввести здесь более привычные обозначения $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ и

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \text{ где } E - \text{модуль Юнга, а } \sigma - \text{коэффициент Пуассона, то из (30)}$$

легко получаем:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)u_{11} + \sigma(u_{22} + u_{33}) \right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)u_{22} + \sigma(u_{11} + u_{33}) \right],$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)u_{33} + \sigma(u_{11} + u_{22}) \right].$$

В сферических обозначениях с учётом таблицы 2 находим:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2u_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \cdot u_\theta \right) \right], \quad (31)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[\frac{u_r}{r} + (1-\sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \sigma \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \cdot u_\theta \right) \right], \quad (32)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[\frac{u_r}{r} + (1-\sigma) \left(\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \cdot u_\theta \right) + \sigma \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (33)$$

Аналогично для недиагональных элементов тензора напряжений получим:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu u_{12}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu u_{23}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2\mu u_{13}.$$

В сферических обозначениях тогда с учётом таблицы 2 будет:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} &= \frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r} \right], \\ \sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\varphi\theta} &= \frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right], \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= \frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{u_\varphi}{r} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Собирая (31) – (34) в общую таблицу, имеем (см. табл. 3):

Таблица 3. Тензор напряжений

$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r} \right],$ $\sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\varphi\theta} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right],$ $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left[\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{u_\varphi}{r} \right].$
$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \left((1-\sigma) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} u_\theta \right) \right)$
$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1-\sigma}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \sigma \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} u_\theta \right) \right)$

На этом примере мы пока что остановимся и поговорим теперь об операторе Лапласа Δ , имеющем чрезвычайно важное значение для всего аппарата теоретической физики.

Оператор Лапласа

Для его вычисления в любых криволинейных координатах можно воспользоваться компактной и очень красивой формулой, приведённой в [1], а именно:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \right), \quad (35a)$$

где g – определитель ковариантного метрического тензора.

В классической же монографии [2] оператор Лапласа приводится в другом виде, а именно,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^i} \right). \quad (35б)$$

Попробуем теперь разобраться с этими двумя формулами (35a) и (35б) более подробно. Если исходить из выражения (35a), то при его применении для любой ортогональной системы координат из него получается стандартная формула, которую все записывают через коэффициенты Ламе h_i , где индекс $i = 1, 2, 3$, то есть как:

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (35в)$$

Что касается выражения (35б), то оно даёт правильный ответ лишь в двух случаях, а именно, только для сферических и цилиндрических координат. Покажем это.

Действительно, в случае сферических координат имеем для элемента метрики:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Поэтому определитель метрического тензора $g = r^4 \sin^2 \theta$, и вводя по уже знакомому правилу частные дифференциалы

$$dx_r = dr, \quad dx_\theta = r d\theta, \quad dx_\varphi = r \sin \theta d\varphi,$$

перепишем (35б) в виде:

$$\Delta = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}. \quad (35r)$$

После подстановки сюда частных дифференциалов и определителя находим:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2r^4 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^4 \sin^2 \theta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} = \\ &= \frac{1}{2r^4 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^4 \sin^2 \theta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r^4 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^4 \sin^2 \theta}{r^2 \partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \sin^2 \theta \partial \varphi^2} = \\ &= \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \sin^2 \theta \partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

То есть, хорошо всем известное выражение:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (36)$$

Аналогично можно показать, что в цилиндрической системе координат

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (37)$$

А вот теперь давайте рассмотрим другой, но тоже относительно простой пример, когда имеется лишь ортогональное двухмерное многообразие, характеризующее преобразованиями вида:

$$\begin{cases} x = \xi \eta, \\ y = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}. \end{cases} \quad (38)$$

Как легко видеть, эти преобразования действительно являются ортогональными, а его метрика даётся выражением:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = (\xi^2 + \eta^2)d\xi^2 + (\xi^2 + \eta^2)d\eta^2. \quad (39)$$

Из (38) и (39) элементарно следует, что размерность новых «координат» ξ, η есть $\sqrt{L}$, где L – длина.

Согласно (39) определитель ковариантного двухмерного метрического тензора, который даётся ортогональной матрицей

$$\hat{g}_{ik} = \begin{pmatrix} \xi^2 + \eta^2 & 0 \\ 0 & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

будет равен:

$$g = (\xi^2 + \eta^2)^2. \quad (41)$$

И значит, якобиан перехода есть:

$$I = \sqrt{g} = \xi^2 + \eta^2. \quad (42)$$

Поэтому, в соответствии с (35б) и с помощью простого алгоритма получения (36), казалось бы, что оператор Лапласа с учётом нашего правила замены частных дифференциалов должен иметь вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} = \\ &= \frac{1}{2(\xi^2 + \eta^2)^2} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial(\xi^2 + \eta^2)^2}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2(\xi^2 + \eta^2)^2} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial(\xi^2 + \eta^2)^2}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \\ &\quad + \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \\ &= \frac{2\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{2\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \\ &= \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 + \eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi^2 + \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right]. \end{aligned}$$

То есть

$$\Delta = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 + \eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi^2 + \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right]. \quad (43)$$

Однако надо сказать, что выражение (43) является неверным. Чтобы в этом убедиться, найдём оператор Δ при помощи прямого дифференцирования, или, как говорится, вычислением прямо «в лоб». Эта процедура совсем несложная, но требует внимания. Действительно, в двухмерном случае, как легко показать, будет иметь место следующая общая формула для оператора Лапласа Δ_2 :

$$\tilde{\Delta}_2 = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \Delta_2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \Delta_2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (44)$$

где $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а преобразования от декартовых координат x, y к новым координатам ξ, η имеют совершенно произвольный вид:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (45)$$

но при котором имеет место и изоморфное (обратное) преобразование вида

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \quad (46)$$

В трёхмерном (и вообще в любом n -мерном) случае формула (44) легко обобщается на любое изоморфное преобразование:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \varphi), \quad y = y(\xi, \eta, \varphi), \quad z = z(\xi, \eta, \varphi), \\ \xi &= \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \varphi = \varphi(x, y, z), \end{aligned} \quad (47)$$

которое позволяет, согласно алгоритму получения (44), представить оператор Лапласа в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3 &= \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Delta_3 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \Delta_3 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \Delta_3 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трёхмерный оператор Лапласа. Заметим, что для

любых ортогональных преобразований слагаемые, пропорциональные смешанным производным по аргументам ξ, η, ξ, φ и η, φ , в (44) и в (48) исчезнут и, соответственно, получатся два совсем простых выражения

$$\tilde{\Delta}_2 = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \Delta_2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \Delta_2 \eta \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3 = & \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \\ & + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Delta_3 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \Delta_3 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \Delta_3 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (50)$$

Чтобы вычислить теперь правильный лапласиан, применим формулу (49) к нашим преобразованиям (38), для которых обратное преобразование будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + y}, \\ \eta &= \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - y}. \end{aligned} \quad (51)$$

В результате найдём, что $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2\xi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\xi}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$ и поэтому

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \frac{x^2 + \xi^4}{4(x^2 + y^2)\xi^2} = \frac{\xi^2 \eta^2 + \xi^4}{4\xi^2 \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \right)^2} = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Аналогично $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}$. Можно также легко проверить, что обе

функции (51) являются гармоническими, то есть они обе удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta_2 \xi = \Delta_2 \eta = 0.$$

Таким образом, с учётом всех этих формул мы строго доказали, что для ортогональных преобразований (38) оператор Лапласа должен иметь следующий правильный вид:

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right), \quad (52)$$

который, заметим, получается и из общего также правильного выражения (35а)!

Таким образом, мы убедились, что формула (35б) действительно «работает» только в случае сферических и цилиндрических координат.

Рассмотрим теперь более сложный трёхмерный случай, и введём в рассмотрение весьма удобные при решении ряда задач (см., к примеру, [6, с. 159]) параболические координаты по формулам:

$$x = \sqrt{\xi \eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi \eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2}. \quad (53)$$

Обратное преобразование от (53) будет иметь вид:

$$\xi = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z \right), \quad \eta = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z \right), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (54)$$

Как видно из (54), новые переменные ξ, η могут быть одновременно либо положительными, либо отрицательными. В решениях (54) они выбраны положительными. Элемент метрики согласно (54) тогда будет иметь вид:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} (\eta d\xi + \xi d\eta) \cos \varphi - \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi d\varphi \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} (\eta d\xi + \xi d\eta) \sin \varphi + \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi d\varphi \right)^2 + \frac{1}{4} (d\xi - d\eta)^2 = \\ &= \frac{1}{4\xi\eta} (\eta d\xi + \xi d\eta)^2 + \xi\eta d\varphi^2 + \frac{1}{4} (d\xi - d\eta)^2 = \frac{\xi + \eta}{4\xi} d\xi^2 + \frac{\xi + \eta}{4\eta} d\eta^2 + \xi\eta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (55)$$

А, значит, частные дифференциалы есть:

$$dx_\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi}} d\xi, \quad dx_\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\eta}} d\eta, \quad dx_\varphi = \sqrt{\xi\eta} d\varphi. \quad (56)$$

Как видно из (55), определитель метрического тензора равен

$$g = \frac{(\xi + \eta)^2}{4}, \quad (57)$$

а, потому, якобиан перехода равен

$$I = \sqrt{g} = \frac{\xi + \eta}{2}. \quad (58)$$

Эти формулы понадобятся нам позднее, когда будут вычисляться символы Кристоффеля. Согласно общей формуле (50) находим необходимые нам производные:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{z}{r} + 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{z}{r} - 1,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\text{Поэтому } \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \left(1 + \frac{z}{r} \right)^2 = \frac{4\xi}{\xi + \eta}.$$

$$\text{Аналогично } \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 = \frac{4\eta}{\xi + \eta}.$$

$$\text{Далее } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}.$$

$$\text{А потому } \Delta_3 \xi = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r} = \frac{4}{\xi + \eta}.$$

$$\text{Аналогично получим } \Delta_3 \eta = \frac{4}{\xi + \eta}.$$

Подставляя все найденные формулы в общую формулу (50), будем иметь в результате:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3 &= \frac{4\xi}{\xi + \eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{4\eta}{\xi + \eta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{4}{\xi + \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{4}{\xi + \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{4}{\xi + \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{4}{\xi + \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (59)$$

Как и следовало ожидать, этот оператор Лапласа совпадает с приведённым в [5, с. 159], а потому в нашем распоряжении имеются проверенные и правильные результаты (52) и (59), которые будем считать «эталонном» для дальнейших доказательств.

Как видим из сравнения «эталонного» решения (52) с решением (43), полученному из формулы (356), решение (43) является неверным, хотя, как мы обращали уже внимание, в сферических и цилиндрических координатах формула (356) приводит к правильному ответу! Подобное совпадение, как известно, называется исключением из правил.

Вместо формулы (356) приведём сейчас простую формулу, которая имеет правильный вид и приводит к корректным результатам в любой ортогональной системе координат.

Для начала надо вспомнить, что вектор градиента, определяемый как

$$\mathbf{u} = \nabla \psi,$$

является ковариантным вектором.

Действительно, в компонентах имеем для него:

$$u_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}. \quad (60)$$

Это означает, что ковариантная производная для него должна быть записана в виде [1]:

$$u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - u_s \Gamma_{ik}^s. \quad (61)$$

Поэтому свёртка по индексам i, k даёт:

$$u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x^i} - u_k \Gamma_{ii}^k. \quad (62)$$

Подставив сюда (60), находим искомое выражение для правильного оператора Лапласа в любых ортогональных координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \Gamma_{ii}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (63)$$

В качестве примеров, иллюстрирующих корректность формулы (63), снова разберём всё те же рассмотренные выше криволинейные системы координат.

Сферические координаты

Для сферических координат с преобразованиями (10) используем уже готовые результаты вычислений символа Кристоффеля (17), а именно:

$$\Gamma_{r\theta\theta} = \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\varphi\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\varphi\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{ctg\theta}{r}.$$

Тогда из (63) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \Gamma_{ii}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \Gamma_{ii}^r \frac{\partial}{\partial r} - \\ &\quad - \Gamma_{ii}^\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} - \Gamma_{ii}^\varphi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - (\Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\varphi\varphi}^r) \frac{\partial}{\partial r} - (\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta) \frac{\partial}{r \partial \theta} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{ctg\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (64)$$

Как видим, получилось правильное выражение для оператора Лапласа в сферических координатах обычного дивергентного вида.

Двухмерные ортогональные координаты

Для преобразований (38) с метрикой (39) частные дифференциалы есть:

$$dx^1 = dx_\xi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\xi, \quad dx^2 = dx_\eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\eta. \quad (65)$$

Поэтому нужные нам символы Γ_{ii}^k будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\xi\xi}^\xi &= \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial x_\eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x_\eta}{\partial \xi^2} = \\ &= \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi\eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\xi\eta) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\xi^2 - \eta^2) \right) = \\ &= \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma_{\eta\eta}^\eta = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial x_\xi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x_\xi}{\partial \eta^2} = \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\xi\xi}^{\eta} &= \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial x_n}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x_n}{\partial \xi^2} = -\frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\Gamma_{\eta\eta}^{\xi} &= \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x_n}{\partial \eta^2} = -\frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\Gamma_{\xi\eta}^{\xi} &= \Gamma_{\xi\eta}^{\eta} = \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Gamma_{\xi\eta}^{\eta} = \Gamma_{\xi\eta}^{\xi} = \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{66}$$

А потому, согласно (63) и (66) имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \Gamma_{ii}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \\
&\quad - (\Gamma_{\xi\xi}^{\xi} + \Gamma_{\eta\eta}^{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi} - (\Gamma_{\xi\xi}^{\eta} + \Gamma_{\eta\eta}^{\eta}) \frac{\partial}{\partial \eta} = \\
&= \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Сравнивая (67) с (52), убеждаемся в их полной эквивалентности.

Параболические координаты

Для преобразований (54) и метрики (56) частные дифференциалы имеют вид:

$$dx_{\xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi}} d\xi, \quad dx_{\eta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\eta}} d\eta, \quad dx_{\varphi} = \sqrt{\xi\eta} d\varphi. \tag{68}$$

а потому интересующие нас символы Кристоффеля будут равны:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{kl}^{\xi} &= \Gamma_{\xi kl} = 2 \sqrt{\frac{\xi}{\xi + \eta}} \frac{\partial x_n}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l} = \\
&= \frac{\sqrt{\eta}}{\xi + \eta} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi + \frac{\sqrt{\eta}}{\xi + \eta} \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi + \\
&\quad + \sqrt{\frac{\xi}{\xi + \eta}} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} (\xi - \eta), \quad \Gamma_{kl}^{\eta} = \Gamma_{\eta kl} = 2 \sqrt{\frac{\eta}{\xi + \eta}} \frac{\partial x_n}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l} = \\
&= \frac{\sqrt{\xi}}{\xi + \eta} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi + \frac{\sqrt{\xi}}{\xi + \eta} \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi + \\
&\quad + \sqrt{\frac{\eta}{\xi + \eta}} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} (\xi - \eta), \quad \Gamma_{kl}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi kl} = \frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} \frac{\partial x_n}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^k \partial x^l} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} (\xi - \eta).
\end{aligned} \tag{69}$$

Как отсюда видно, во всех трёх выражениях последнее слагаемое тождественно обращается в нуль, так же как и компоненты символа Кристоффеля Γ_{kl}^{φ} для любых k, l . Поэтому для двух верхних символов будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\xi\xi}^{\xi} &= 4 \frac{\xi\eta}{(\xi+\eta)^2} \cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{\xi} \cos\varphi + 4 \frac{\xi\eta}{(\xi+\eta)^2} \sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{\xi} \sin\varphi = \\
 &= 4 \frac{\xi\eta}{(\xi+\eta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{\xi} = -\frac{\eta}{(\xi+\eta)^2 \sqrt{\xi}}, \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^{\xi} &= \frac{\sqrt{\eta}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}} \cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi + \frac{\sqrt{\eta}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}} \sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sqrt{\xi\eta} \sin\varphi = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\xi(\xi+\eta)}}, \Gamma_{\eta\eta}^{\xi} = \frac{4\eta\sqrt{\eta}}{(\xi+\eta)^2} \cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi + \\
 &+ \frac{4\eta\sqrt{\eta}}{(\xi+\eta)^2} \sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \sqrt{\xi\eta} \sin\varphi = \frac{4\eta\sqrt{\xi\eta}}{(\xi+\eta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \sqrt{\eta} = -\frac{\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^2}, \\
 \Gamma_{\eta\eta}^{\eta} &= 4 \frac{\eta\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^2} \cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi + 4 \frac{\eta\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^2} \sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \sqrt{\xi\eta} \sin\varphi = \\
 &= 4 \frac{\eta\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \sqrt{\xi\eta} = -\frac{\xi}{(\xi+\eta)^2 \sqrt{\eta}}, \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^{\eta} &= \frac{\sqrt{\xi}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}} \cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi + \frac{\sqrt{\xi}}{\xi\eta\sqrt{\xi+\eta}} \sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sqrt{\xi\eta} \sin\varphi = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\eta(\xi+\eta)}}, \Gamma_{\xi\xi}^{\eta} = -\frac{\sqrt{\eta}}{(\xi+\eta)^2}.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Подставляя (70) в общее выражение (63) с учётом частных дифференциалов (68), найдём:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \Gamma_{ii}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{4\xi}{\xi+\eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{4\eta}{\xi+\eta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \\
 &- 2\sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}} (\Gamma_{\xi\xi}^{\xi} + \Gamma_{\eta\eta}^{\xi} + \Gamma_{\varphi\varphi}^{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi} - 2\sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}} (\Gamma_{\xi\xi}^{\eta} + \Gamma_{\eta\eta}^{\eta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^{\eta}) \frac{\partial}{\partial \eta} = \\
 &= \frac{4\xi}{\xi+\eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{4\eta}{\xi+\eta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\sqrt{\frac{\xi}{\xi+\eta}}\left(-\frac{\eta}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\xi}}-\frac{1}{\sqrt{\xi(\xi+\eta)}}-\frac{\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}- \\
& -2\sqrt{\frac{\eta}{\xi+\eta}}\left(-\frac{\sqrt{\xi}}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\xi}{(\xi+\eta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\eta}}-\frac{1}{\sqrt{\eta(\xi+\eta)}}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}= \\
& =\frac{4\xi}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{4\eta}{\xi+\eta}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}= \\
& =\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{4}{\xi+\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned} \tag{71}$$

Как видим, полученный ответ, так же, как и предыдущие, для оператора Лапласа полностью совпадает с приведённым выше «эталонным» выражением (59). Для цилиндрических координат все получается также.

Таким образом, абсолютно понятно, что общая формула (63) позволяет нам находить правильные выражения для оператора Лапласа в любой ортогональной криволинейной системе координат.

Как мы это доказали на конкретных примерах, продемонстрированный выше способ показывает полную корректность предложенного подхода. Действительно, с его помощью можно находить правильные по размерности любые ковариантные производные и геометрические характеристики в произвольной криволинейной системе координат (символы Кристоффеля, тензор Римана, тензор Риччи, скорость, ускорение, направляющие косинусы и др.).

Подчеркнём, что вычисления по формуле $\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s}\right)$, приводимой в каждом учебнике по тензорному исчислению, сразу же заводят в тупик, поскольку все они тождественно обращаются в нуль благодаря отмеченному выше факту, что метрический тензор в ортогональной системе координат представляет собой просто символ Кронекера, поскольку метрика всегда может быть представлена в виде:

$$dl^2 = (\partial x^1)^2 + (\partial x^2)^2 + (\partial x^3)^2 + (\partial x^4)^2 + \dots \tag{72}$$

Заметим, что во всех вычислениях, которые были приведены выше, нигде не использовалось такое понятие, как коэффициенты Ламе, о которых также подробно написано в учебниках по тензорному исчислению. По большому счету, эти коэффициенты, вообще говоря, и не нужны вовсе, поскольку приводят только к путанице в размерностях.

В качестве ещё одного показательного примера вычислим компоненты тензора Римана для двухмерной ортогональной системы координат, выбрав в качестве

контравариантных преобразования (38) с метрикой (39) и с частными дифференциалами (65):

$$dx^1 = dx_\xi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\xi, \quad dx^2 = dx_\eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\eta.$$

Согласно общему определению для тензора Римана [1; 4], имеем для него

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (73)$$

Поскольку каждый индекс пробегает всего два значения, то всего компонент тензора Римана будет $2^4 = 16$. По индексам l, m он антисимметричен, а потому для двух координат ξ, η будет $R_{k\xi\eta}^i = -R_{k\eta\xi}^i$. Эти компоненты будут отличны от нуля, а все остальные, а именно $R_{\xi\xi\xi}^\xi, R_{\eta\eta\eta}^\eta, R_{\xi\xi\xi}^\eta, R_{\eta\eta\eta}^\xi, R_{\xi\xi\eta}^\xi, R_{\eta\eta\xi}^\xi, R_{\xi\eta\eta}^\xi, R_{\eta\xi\xi}^\eta$, будут равны нулю.

В самом деле, для них имеем:

$$R_{\xi\xi\xi}^\xi = \Gamma_{n\xi}^\xi \Gamma_{\xi\xi}^n - \Gamma_{n\xi}^\xi \Gamma_{\xi\xi}^n = 0, \quad R_{\eta\eta\eta}^\eta = \Gamma_{m\eta}^\eta \Gamma_{\eta\eta}^m - \Gamma_{m\eta}^\eta \Gamma_{\eta\eta}^m = 0, \quad R_{\eta\eta\eta}^\xi = \Gamma_{m\eta}^\xi \Gamma_{\eta\eta}^m - \Gamma_{m\eta}^\xi \Gamma_{\eta\eta}^m = 0, \\ R_{\xi\xi\xi}^\eta = 0, \quad R_{\eta\eta\eta}^\xi = R_{\xi\eta\eta}^\eta = 0, \quad R_{\xi\eta\eta}^\xi = R_{\eta\xi\xi}^\eta = \Gamma_{m\eta}^\xi \Gamma_{\xi\eta}^m - \Gamma_{m\eta}^\xi \Gamma_{\xi\eta}^m = 0.$$

Для отличных же от нуля, то есть для

$$R_{\xi\xi\eta}^\xi = -R_{\xi\eta\xi}^\xi, \quad R_{\eta\eta\xi}^\eta = -R_{\eta\xi\eta}^\eta, \quad R_{\xi\eta\xi}^\eta = -R_{\xi\eta\xi}^\eta, \quad R_{\eta\xi\xi}^\xi = -R_{\eta\xi\xi}^\xi$$

получаем:

$$R_{\xi\xi\eta}^\xi = -R_{\xi\eta\xi}^\xi = \frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^\xi}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\xi\xi}^\xi}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\eta\xi}^\xi \Gamma_{\xi\eta}^\eta - \Gamma_{\eta\eta}^\xi \Gamma_{\xi\xi}^\eta, \\ R_{\eta\eta\xi}^\eta = -R_{\eta\xi\eta}^\eta = \frac{\partial \Gamma_{\eta\eta}^\eta}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\eta\xi}^\eta}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\xi\xi}^\eta \Gamma_{\eta\eta}^\xi - \Gamma_{\xi\eta}^\eta \Gamma_{\eta\xi}^\xi + \Gamma_{\eta\xi}^\eta \Gamma_{\eta\eta}^\xi - \Gamma_{\eta\eta}^\eta \Gamma_{\xi\xi}^\xi, \\ R_{\xi\eta\xi}^\eta = -R_{\eta\xi\xi}^\xi = \frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^\eta}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\xi\xi}^\eta}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\xi\xi}^\eta \Gamma_{\xi\eta}^\xi - \Gamma_{\xi\eta}^\eta \Gamma_{\xi\xi}^\xi + \Gamma_{\eta\xi}^\eta \Gamma_{\xi\eta}^\xi - \Gamma_{\eta\eta}^\eta \Gamma_{\xi\xi}^\xi, \\ R_{\eta\xi\xi}^\xi = -R_{\eta\eta\xi}^\eta = \frac{\partial \Gamma_{\eta\eta}^\xi}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\eta\xi}^\xi}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\xi\xi}^\xi \Gamma_{\eta\eta}^\xi - \Gamma_{\xi\eta}^\xi \Gamma_{\eta\xi}^\xi.$$

Отсюда, согласно проведённым выше вычислениям (66) имеем:

$$R_{\xi\xi\eta}^\xi = -R_{\xi\eta\xi}^\xi = \frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^\xi}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\xi\xi}^\xi}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\eta\xi}^\xi \Gamma_{\xi\eta}^\eta - \Gamma_{\eta\eta}^\xi \Gamma_{\xi\xi}^\eta = \\ = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ + \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \\ R_{\eta\eta\xi}^\eta = -R_{\eta\xi\eta}^\eta = \frac{\partial \Gamma_{\eta\eta}^\eta}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\eta\xi}^\eta}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\xi\xi}^\eta \Gamma_{\eta\eta}^\xi - \Gamma_{\xi\eta}^\eta \Gamma_{\eta\xi}^\xi + \Gamma_{\eta\xi}^\eta \Gamma_{\eta\eta}^\xi - \Gamma_{\eta\eta}^\eta \Gamma_{\xi\xi}^\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 - \\
&\quad - \left(\frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\
R_{\xi\xi\eta}^\eta &= -R_{\xi\eta\xi}^\eta = \frac{\partial \Gamma_{\xi\eta}^\eta}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\xi\xi}^\eta}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\xi\xi}^\eta \Gamma_{\xi\eta}^\xi - \Gamma_{\xi\eta}^\eta \Gamma_{\xi\xi}^\xi + \Gamma_{\eta\xi}^\eta \Gamma_{\xi\eta}^\eta - \Gamma_{\eta\eta}^\eta \Gamma_{\xi\xi}^\eta = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 - \\
&\quad - \left(\frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\
R_{\eta\xi\eta}^\eta &= -R_{\eta\eta\xi}^\eta = \frac{\partial \Gamma_{\eta\eta}^\eta}{\partial x^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\eta\xi}^\eta}{\partial x^\eta} + \Gamma_{\eta\xi}^\eta \Gamma_{\eta\eta}^\xi - \Gamma_{\xi\eta}^\eta \Gamma_{\eta\xi}^\xi = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&\quad + \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.
\end{aligned}$$

Итак, мы нашли, что отличны от нуля лишь четыре компоненты тензора Римана, а именно:

$$\begin{aligned}
R_{\eta\xi\eta}^\xi &= -R_{\eta\eta\xi}^\xi = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\
R_{\xi\xi\eta}^\eta &= -R_{\xi\eta\xi}^\eta = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Зная отличные от нуля компоненты, легко получить теперь скалярную кривизну в рассматриваемом двухмерном случае, как свёртку тензора Римана:

$$R = R_{kki}^i = R_{\xi\xi}^i + R_{\eta\eta}^i = R_{\xi\xi\xi}^\xi + R_{\eta\eta\xi}^\xi + R_{\xi\xi\eta}^\eta + R_{\eta\eta\eta}^\eta = \frac{2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}. \tag{75}$$

Тензор Риччи, согласно определению, есть тензор второго ранга, определяемый как $R_{ik} = g_{is} R_{ppk}^s$, а потому он будет представлять собой матрицу 2×2 , то есть:

$$\hat{R}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2} & \\ 0 & \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Аналогично можно вычислить кривизну и в любой другой системе координат, однако, это будут уже значительно более громоздкие вычисления. Заметим, что описанный выше подход был применён и в статьях [7–9].

Не ортогональная криволинейная система координат

В качестве заключительной части этого сообщения рассмотрим теперь не ортогональную криволинейную СК, и продемонстрируем «работу» нашего метода на примере преобразований вида:

$$\begin{aligned} x &= uv, \\ y &= \frac{u^2 + v^2}{2}. \end{aligned} \quad (77)$$

После абсолютно понятных простых вычислений можно прийти к следующему выражению для элемента метрики:

$$dl^2 = (u^2 + v^2) du^2 + 4uv du dv + (u^2 + v^2) dv^2. \quad (78)$$

В соответствии с намеченным выше алгоритмом вычислений полагаем, что

$$\begin{aligned} dx^1 &= \sqrt{u^2 + v^2} du, \\ dx^2 &= \sqrt{u^2 + v^2} dv. \end{aligned} \quad (79)$$

Поэтому из (78) следует, что

$$dl^2 = (dx^1)^2 + \frac{4uv}{u^2 + v^2} dx^1 dx^2 + (dx^2)^2. \quad (80)$$

Из (80) видно, что метрический тензор, как и должно быть, автоматически оказывается безразмерным, и имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2uv}{u^2 + v^2} \\ \frac{2uv}{u^2 + v^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Его безразмерный определитель есть:

$$g = \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \right)^2, \quad (82)$$

где $u \neq v$.

Поэтому контравариантный метрический тензор $\hat{g}^{ik} = \hat{g}_{ik}^{-1}$ будет таким:

$$g^{ik} = \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2uv}{u^2 + v^2} \\ -\frac{2uv}{u^2 + v^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Элементарное вычисление символов Кристоффеля первого рода в соответствии с изложенным выше алгоритмом с использованием формулы (8) приводит нас к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \Gamma_{vvv} &= \frac{v}{q^3}, \quad \Gamma_{vuv} = \Gamma_{vu v} = \frac{\partial x_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{u}{q^3}, \quad \Gamma_{vu u} = \frac{v}{q^3}, \\ \Gamma_{uvv} &= \frac{u}{q^3}, \quad \Gamma_{uu v} = \Gamma_{uv u} = \frac{\partial x_n}{\partial x^1} \frac{\partial^2 x_n}{x^1 \partial x^2} = \frac{v}{q^3}, \quad \Gamma_{uuu} = \frac{u}{q^3}, \end{aligned} \quad (84)$$

где $q = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Следовательно, контравариантные компоненты символа Кристоффеля второго рода определяются, как:

$$\begin{aligned} \Gamma_{vv}^v &= g^{vv} \Gamma_{vvv} + g^{vu} \Gamma_{uvv} = (g^{vv} v + g^{vu} u) \frac{1}{q^3} = \\ &= \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \frac{1}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \left(v - \frac{2u^2 v}{u^2 + v^2} \right) = -\frac{v}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{vv}^u &= g^{uv} \Gamma_{vvv} + g^{uu} \Gamma_{uvv} = (g^{uv} v + g^{uu} u) \frac{1}{q^3} = \\ &= \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \frac{1}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \left(u - \frac{2uv^2}{u^2 + v^2} \right) = \frac{u}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{uu}^v &= g^{vv} \Gamma_{vu u} + g^{vu} \Gamma_{uuu} = (g^{vv} v + g^{vu} u) \frac{1}{q^3} = \\ &= \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \frac{1}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \left(v - \frac{2u^2 v}{u^2 + v^2} \right) = -\frac{v}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{uu}^u &= g^{uv} \Gamma_{vu u} + g^{uu} \Gamma_{uuu} = (g^{uv} v + g^{uu} u) \frac{1}{q^3} = \frac{u}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{vu}^v &= g^{vv} \Gamma_{vvu} + g^{vu} \Gamma_{uvu} = (g^{vv} u + g^{vu} v) \frac{1}{q^3} = \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \left(u - \frac{2v^2 u}{u^2 + v^2} \right) = \frac{u}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \Gamma_{vu}^u &= g^{uv} \Gamma_{vvu} + g^{uu} \Gamma_{uvu} = (g^{uv} u + g^{uu} v) \frac{1}{q^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{q^3} \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \left(v - \frac{2uv^2}{u^2 + v^2} \right) = - \frac{v}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (85)$$

В соответствии с формулой (63), тривиальное обобщение которой на произвольную криволинейную СК имеет вид:

$$\tilde{\Delta} = g^{ik} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma_{ik}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right), \quad (86)$$

позволяет нам привести следующую цепочку вычислений:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_2 &= g^{ik} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma_{ik}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right) = \\ &= g^{uu} \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \Gamma_{uu}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right) + 2g^{uv} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2} - \Gamma_{uv}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right) + g^{vv} \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - \Gamma_{vv}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right). \end{aligned} \quad (87)$$

Подставляя сюда найденные выражения для символов Кристоффеля из (85) и недиагональные компоненты метрического тензора из (83), получаем:

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{u^2 + v^2}{(u^2 - v^2)^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{4uv}{(u^2 - v^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - D,$$

где

$$\begin{aligned} D &= \left(g^{uu} \Gamma_{uu}^p + 2g^{uv} \Gamma_{uv}^p + g^{vv} \Gamma_{vv}^p \right) \frac{\partial}{\partial x^p} = \\ &= \left(g^{uu} \Gamma_{uu}^u + 2g^{uv} \Gamma_{uv}^u + g^{vv} \Gamma_{vv}^u \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(g^{uu} \Gamma_{uu}^v + 2g^{uv} \Gamma_{uv}^v + g^{vv} \Gamma_{vv}^v \right) \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{q} \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \times \\ &\times \left(\frac{u}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{4uv}{u^2 + v^2} \frac{v}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{u}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{q} \left(\frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \right)^2 \times \\ &\times \left(- \frac{v}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{4uv}{u^2 + v^2} \frac{u}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{v}{(u^2 - v^2) \sqrt{u^2 + v^2}} \right) \frac{\partial}{\partial v} = \\ &= \frac{2u(u^2 + 3v^2)}{(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{2v(v^2 + 3u^2)}{(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_2 = & \frac{u^2 + v^2}{(u^2 - v^2)^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{4uv}{(u^2 - v^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \\ & - \frac{2u(u^2 + 3v^2)}{(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2v(v^2 + 3u^2)}{(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}\quad (88)$$

Чтобы убедиться в корректности формулы (88), воспользуемся теперь эталонным выражением (49), которое в наших переменных можно записать как:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_2 = & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \Delta_2 u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta_2 v \frac{\partial}{\partial v} + \\ & + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}.\end{aligned}\quad (89)$$

Из (77) обратное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} u + v = \sqrt{2(x + y)}, \\ u - v = \sqrt{2(y - x)}. \end{cases}\quad (90)$$

Откуда:

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{x + y} + \sqrt{y - x}}{\sqrt{2}}, \\ v = \frac{\sqrt{x + y} - \sqrt{y - x}}{\sqrt{2}}. \end{cases}\quad (91)$$

Поэтому:

$$\begin{aligned}\Delta_2 u = & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{x + y} + \sqrt{y - x}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sqrt{x + y} + \sqrt{y - x}) = \\ & = -\frac{1}{4\sqrt{2}(x + y)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4\sqrt{2}(y - x)^{\frac{3}{2}}} - \\ & - \frac{1}{4\sqrt{2}(x + y)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4\sqrt{2}(y - x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}(x + y)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\sqrt{2}(y - x)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}\Delta_2 v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sqrt{x+y} - \sqrt{y-x}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sqrt{x+y} - \sqrt{y-x}) = \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}(x+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\sqrt{2}(y-x)^{\frac{3}{2}}} - \\ &- \frac{1}{4\sqrt{2}(x+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\sqrt{2}(y-x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}(x+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}(y-x)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Согласно (90):

$$\begin{aligned}\Delta_2 u &= -\frac{1}{(u+v)^3} - \frac{1}{(u-v)^3} = -\frac{2u(u^2+3v^2)}{(u^2-v^2)^3}, \\ \Delta_2 v &= -\frac{1}{(u+v)^3} + \frac{1}{(u-v)^3} = \frac{2v(v^2+3u^2)}{(u^2-v^2)^3}.\end{aligned}\quad (91)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} - \frac{1}{\sqrt{y-x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y-x}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y-x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(u+v)^2} + \frac{1}{(u-v)^2} \right) = \frac{u^2+v^2}{(u^2-v^2)^2}, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 &= \frac{u^2+v^2}{(u^2-v^2)^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} - \frac{1}{\sqrt{y-x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y-x}} \right) + \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} - \frac{1}{\sqrt{y-x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y-x}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y-x} \right) = -\frac{2uv}{(u^2-v^2)^2}.\end{aligned}$$

Согласно (89) имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_2 &= \frac{u^2+v^2}{(u^2-v^2)^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{4uv}{(u^2-v^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \\ &- \frac{2u(u^2+3v^2)}{(u^2-v^2)^3} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{2v(v^2+3u^2)}{(u^2-v^2)^3} \frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}\quad (92)$$

Сравнивая (92) и (88), убеждаемся в их полной эквивалентности. Таким образом, наше утверждение, сформулированное несколько выше, может считаться доказанным.

Стоит ещё раз подчеркнуть, что предлагаемый подход вычисления является, на наш взгляд, значительно более рациональным, чем использование коэффициентов Ламе, поскольку автоматически приводит в результате к физически правильным размерностям, что является чрезвычайно важным именно при решении различных физических задач.

Заключение

В заключение стоит отметить несколько основных моментов, дающих краткую характеристику описанного выше подхода.

1. Предложен простой формализм, позволяющий правильно вычислять любые тензорные физические характеристики, в частности, из гидродинамики и теории упругости, в криволинейном пространстве с заведомо правильной физической размерностью.

2. Доказано, что коэффициенты Ламе, часто используемые в теории упругости и гидродинамике, не имеют никакого значения и приводят только к путанице в размерностях. Продемонстрированный выше подход не связан с подобного рода проблемой.

3. Приведено правильное выражение для оператора Лапласа (63), справедливое в любой ортогональной криволинейной системе координат, и его обобщение (86) для произвольной СК.

4. Рассмотрены физические и геометрические примеры, иллюстрирующие корректность описанного выше подхода.

Статья поступила в редакцию 24.12.2018 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике: пер. с англ. / под ред. Г. В. Коренева. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Т. 7. М.: Наука, 2004. 246 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Т. 1. М.: Наука, 2001. 189 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 2002. 502 с.
5. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Т. 3. М.: Наука, 2004. 752 с.
7. Гладков С. О. К вопросу о линеаризации основного уравнения ОТО // Инженерная физика. 2017. Т. 19. № 10. С. 19–27.
8. Гладков С. О. К вопросу о взаимодействии полей разной физической природы // Инженерная физика. 2018. Т. 20. № 3. С. 17–31.
9. Gladkov S. O. To the question of a common field theory // Journal of Physics: Conference series. 2018. Vol. 1051: XX International Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory 2017". P. 012029.

REFERENCES

1. MacConnel A. J. Applications of Tensor Analysis. New York, Dover Publication, 2011. 352 p.
2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Theory of Elasticity*, Course of Theoretical Physics, Vol. 7. London Elsevier, 2005.
3. Landau L. D., Lifshits E. M. *Mechanics*. Oxford, Pergamon Press, 2000. 170 p.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *The Classical Theory of Fields*, Course of Theoretical Physics, Vo. 2. Oxford, Pergamon Press, 1971.
5. Rashevskii P. K. *Rimanova geometriya i tenzornyi analiz* [Riemannian geometry and tensor analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 664 p.
6. Landau L. D., Lifshits E. M. *Quantum mechanics*, Course of Theoretical Physics, Vo. 3. Oxford, Pergamon Press, 1965.
7. Gladkov S. O. [To the problem of linearization of the basic equation of the general relativity]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2017, vol. 19, no. 10, pp.19–27.
8. Gladkov S. O. [To the problem of the interaction between the fields of different physical nature]. In: *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2018, vol. 20, no. 3, pp. 17–31.
9. Gladkov S. O. To the problem of a common field theory. In: *Journal of Physics: Conference series*, 2018, vol. 1051: XX International Meeting “Physical Interpretations of Relativity Theory 2017”, pp. 012029.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования № 311 Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
e-mail: sglad51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey O. Gladkov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, professor, professor at the Department of Mathematical Modeling no. 311, Moscow Aviation Institute (National Research University);
e-mail: sglad51@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Гладков С. О. Об альтернативном вычислении ковариантных производных с применением к проблемам механики, физики и геометрии // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 16–45.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-16-45

FOR CITATION

Gladkov S. O. Alternative calculation of covariant derivatives with an application to the problems of mechanics, physics and geometry. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 16–45.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-16-45