РАЗДЕЛ III.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 37.016:51

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-97-106

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ОКРУЖНОСТИ В ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЕГЭ

Казаков Н. А.¹, Кузнецова Т. И.²

¹ *Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская
Федерация*

² *Институт русского языка и культуры Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова
117218, г. Москва, ул. Кржижановского, д. 24/35, корп. 1, Российская Федерация*

Аннотация. Одной из важнейших образовательных целей современной школы является подготовка учащихся к успешной сдаче выпускных экзаменов. В структуру выпускного экзамена ЕГЭ по математике профильного уровня входит геометрическая задача на доказательство повышенной сложности, требующая от обучающихся всестороннего знания планиметрии. Важнейшей особенностью является отсутствие единых алгоритмов решения таких задач, успех во многом зависит от накопленного учащимися опыта решения комбинированных планиметрических задач. Тем не менее, практика решения позволила выделить некоторые геометрические структуры, являющиеся вспомогательными ключами к поиску правильного решения. Одним из таких ключей стал метод вспомогательной окружности, который авторы хотели бы представить в рамках данной статьи. В статье описывается суть метода, условия его применения, рассмотрены задачи на доказательство, взятые из реальных контрольно-измерительных материалов экзамена, и приведены их решения в рамках описанного метода.

Ключевые слова: вспомогательная окружность, планиметрическая задача, доказательство, дополнительное построение, вписанный четырёхугольник, вписанные углы.

AUXILIARY CIRCLE METHOD IN PLANIMETRIC PROBLEMS OF THE UNIFIED STATE EXAM

N. Kazakov¹, T. Kuznetsova²

¹ *Moscow Region State University*

ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

² *Institute of the Russian Language and Culture, Lomonosov Moscow State University*

ul. Krzhizhanovskogo 24/35, stroenie 1, 117218 Moscow, Russian Federation

Abstract. One of the most important educational goals of modern school is to prepare students for the successful completion of final exams. The structure of the Unified State Exam in profile-level mathematics includes the proof of increased complexity for geometric problems, requiring students to have a comprehensive knowledge of planimetry. The most important feature is the lack of unified algorithms for solving such problems; the success largely depends on the students' experience in solving combined planimetric problems. Nevertheless, the practice of solution allowed us to identify some geometric structures that are auxiliary keys to finding the right solution. One of these keys was the auxiliary circle method, which is presented in this paper. The paper describes the essence of the method and the conditions of its application, examines the proofs for the problems taken from real test and measurement materials of the exam, and considers the solutions of the problems in the framework of the described method.

Keywords: *auxiliary* circle, planimetric problem, proof, additional construction, inscribed quadrilateral, inscribed angles.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования выделяет результаты сдачи государственной (итоговой) аттестации выпускников в качестве показателя уровня достижения планируемых результатов¹. Одним из содержательных компонентов выпускного экзамена ЕГЭ профильного уровня по математике является геометрическая задача повышенной сложности, включённая в письменную часть под номером 16². Спецификой данной задачи является следующее:

- задача состоит из двух частей, первая из которых посвящается доказательству геометрического высказывания или установлению справедливости приведённого геометрического соотношения;
- задача является комбинированной и, следовательно, требует от выпускника всестороннего и, более того, полного знания курса школьной геометрии.

Статистика сдачи выпускного экзамена по математике, как и практика работы со школьниками, показала, что решение данных задач представляет для обуча-

¹ Приказ Минобрнауки России от 17 мая 2012 года № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» // Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации. URL: <http://docs.cntd.ru/document/902350579> (дата обращения: 9.11.2018).

² Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2019 году единого государственного экзамена по математике. Профильный уровень. М.: Федеральный институт педагогических измерений, 2019. 10 с.

ющих особую сложность. Это обстоятельство можно связать со следующими причинами:

- в рамках урочной деятельности решению комбинированных задач повышенной сложности чаще всего уделяется недостаточное внимание;
- отсутствие строго выделенных приёмов в решении данного класса задач и отсутствие единой методической системы подготовки к решению задач;
- изучение курса планиметрии часто завершается уже в 9 классе, а в старших классах на первое место выходит подготовка к решению стереометрических задач; как следствие, материал забывается и теряет актуальность.

Сами по себе задачи на доказательство являются неотъемлемой частью курса планиметрии. Помимо образовательной, они имеют важную дидактическую функцию и связаны с развитием качеств мышления, творчеством и формированием универсальных учебных действий [1; 2]. Задача на доказательство представляется в сознании обучающегося как небольшое исследование, успех которого заключается в доказательстве требуемого суждения. Так, в рамках образовательного процесса задачи на доказательство являются широким полем для создания проблемных ситуаций и ситуаций успеха для каждого обучающегося [4].

В связи с выделенными проблемами и имеющимся опытом решения планиметрических задач целью данной статьи является демонстрация одного из сложившихся в учебной практике метода решения задач на доказательство – метода вспомогательной окружности.

Критерием применимости метода вспомогательной окружности служит возможность использования в задаче следующих утверждений:

Рис. 1. Первое условие использования метода вспомогательной окружности: вписанный четырёхугольник.

- если у четырёхугольника сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность (рис. 1, а): $\alpha + \beta = 180^\circ$;
- частным случаем является ситуация, в которой два противоположных угла равны 90° (рис. 1, б).
- если из двух различных точек, не лежащих на данном отрезке, концы этого отрезка видны под одним и тем же углом, то через данные точки и концы данного отрезка можно провести окружность (рис. 2, а);

– частным случаем является ситуация, когда концы отрезка видны под прямым углом (рис. 2, б).

Заметим, что рассмотренные частные случаи можно объединить в конструкцию с общим названием: «прямоугольные треугольники с общей гипотенузой». В данных условиях явно определяется положение центра вспомогательной окружности – он лежит в середине гипотенузы.

Чертёж, как модель, является ключевым элементом на пути решения задачи и, следовательно, его незаменимой частью, поэтому качество выполнения чертежа играет значимую роль. С целью повышения качества чертежа, классических средств, мы рекомендуем использовать интерактивные геометрические среды: их преимущества и возможности в построении чертежей показаны в работе [3].

Рис. 2. Второе условие использования метода вспомогательной окружности: вписанные углы.

С методической точки зрения работа по решению задач может быть организована в несколько этапов.

1. Анализ условия («первый взгляд на задачу»). Ещё при анализе условия обучающиеся могут задумываться о возможности применить метод вспомогательной окружности. В качестве «сигналов» могут выступать следующие фразы: «опущены перпендикуляры...», «проведены высоты...», «стороны (или прямые) перпендикулярны...». Как правило, в задачах идёт речь о двух перпендикулярностях. В контексте условия речь также может идти о двух углах, сумма заданных градусных мер которых равна 180° .

2. Построение чертежа («конкретизация»). На данном этапе обучающиеся выполняют построение в соответствии с условием, одновременно конкретизируя и подводя под чертёж свои догадки относительно применения метода вспомогательной окружности. Педагог контролирует правильность выполнения чертежа.

3. Анализ чертежа и выбор метода. На данном этапе происходит выявление соответствующей ситуации (общей или частной из описанных выше), позволяющей обоснованно применить метод вспомогательной окружности. Педагог контролирует правильность выбора метода.

4. Обоснование метода. После выбора конкретного случая проводится его теоретическое обоснование, опираясь на общую возможность построения окружности по двум вписанным равным углам или же по вписанному в неё четырёхугольнику.

5. Дополнительное построение. Здесь обучающиеся непосредственно строят вспомогательную окружность.

6. Цепочка следствий. Окружность, как новый элемент позволяет расширить область возможных умозаключений, привнося видимость новых особенностей чертежа. Работая далее с углами в окружности в связи со всем чертежом задачи, выполняя поиск новых отношений, обучающиеся приходят к истинности доказываемого суждения. Педагог выполняет роль проводника в поиске новых отношений, наводит учащихся на ключевые моменты, создавая тем самым проблемность в процессе обучения.

Рассмотрим применение данного метода при решении задач ЕГЭ на доказательство, предлагаемых в открытом банке заданий³, а также сборниках типовых задач [5]. К каждой задаче мы предложим два чертежа: первый, который строит сам обучающийся – после первичного понимания условия задачи, и второй, который получается из первого чертежа – после применения метода вспомогательной окружности.

Задача 1 (2017 г.) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . Точка E принадлежит стороне AB , прямые CD и CE перпендикулярны. Докажите, что прямая BH параллельна прямой ED .

Рис. 3. Чертёж к условию задачи № 1.

Доказательство.

1) В четырёхугольнике $ABCH$ два противолежащих угла – прямые, $\angle ABC + \angle AHC = 180^\circ$, значит, четырёхугольник – вписанный, точки A, B, C, H лежат на одной окружности. Построим эту вспомогательную окружность. Её центр – середина AC .

2) $\angle ABH = \angle ACH$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\widehat{AH}$.

3) Аналогично, четырёхугольник $AECD$ – вписанный. Центр окружности – середина ED .

³ См.: Открытый банк заданий ЕГЭ: Математика. Профильный уровень [Электронный ресурс] // Федеральный институт педагогических измерений : [сайт]. <http://ege.fipi.ru/os11/xmodules/qprint/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B> (дата обращения: 9.11.2018)

- 4) $\angle AED = \angle ACD$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\widehat{AD}$.
- 5) Из пунктов 2 и 4 следует равенство: $\angle AED = \angle ABH$. Значит, равны соответственные углы при прямых BH , ED и секущей AB . Следовательно, $BH \parallel ED$, что и требовалось доказать.

Рис. 4. Чертёж к решению задачи № 1.

Задача 2 (2018 г.) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . В треугольнике MKC из вершины K опущена высота KH на сторону MC . Аналогично, в треугольнике KMA из вершины M опущена высота ME на сторону AK . Докажите, что $EH \parallel AC$.

Доказательство.

- 1) $\triangle MEK$, $\triangle MNK$ – прямоугольные, с общей гипотенузой MK . Значит, точки M , E , H , K – лежат на одной окружности, центр которой – середина MK .
- 2) $\angle MKE = \angle MNE$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\widehat{ME}$.
- 3) $\triangle AMC$, $\triangle AKC$ – прямоугольные, с общей гипотенузой AC . Значит, точки A , M , K , C – лежат на одной окружности, центр которой – середина AC .
- 4) $\angle AKM = \angle ACM$ как вписанные, опирающиеся на дугу $\widehat{AM}$.
- 5) Так как $\angle MKE = \angle MKA$, то из пунктов 2 и 4 следует равенство $\angle MNE = \angle MCA$, значит, равны соответственные углы при прямых EH , AC и секущей MC . Следовательно, $EH \parallel AC$, что и требовалось доказать.

Рис. 5. Чертёж к условию задачи № 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков Н. А. Роль мотивации в развитии субъектности обучающихся общеобразовательной организации [Электронный ресурс] // Наука на благо человечества – 2017: сборник научных статей магистрантов и бакалавров по итогам по итогам Международной научной конференции молодых учёных, аспирантов и студентов (МГОУ, г. Москва, 17–28 апреля 2017 г.). М.: ИИУ МГОУ, 2017. С. 294–298. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM)
2. Казаков Н. А., Забелина С. Б. Реализация творческого аспекта учебной деятельности обучающихся на уроках математики // Материалы ежегодной всероссийской научно-практической конференции преподавателей, аспирантов и студентов «Наука на благо человечества», посвящённой 85-летию МГОУ: Физико-математический факультет. М.: ИИУ МГОУ, 2016. С. 35–41.
3. Казаков Н. А., Кузнецова Т. И. Из истории терминов «модель» и «моделирование». Часть 3. Чертежи – модели задач // Проблемы учебного процесса в инновационных школах: сборник научных трудов / под ред. О. В. Кузьмин. Вып. 21. Иркутск: Издательство Иркутского государственного университета, 2018. С. 54–58.
4. Катуржевская О. В. Методика преподавания математики: учебно-методическое пособие. Армавир: РИО АГПУ, 2016. 140 с.
5. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. М.: Издательство «Национальное образование». 2018. 256 с.

REFERENCES

1. Kazakov N. A. [The role of motivation in the development of subjectivity of students of general educational institutions]. In: *Nauka na blago chelovechestva – 2017: sbornik nauchnykh statei magistrantov i bakalavrov po itogam po itogam Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii molodykh uchenykh, aspirantov i studentov (MGOU, g. Moskva, 17–28 aprelya 2017 g.)* [Science for the benefit of humanity – 2017: a collection of scientific papers of undergraduates and bachelors on the basis of the results of the International Scientific Conference of young scientists, graduate students and students (MRSU, Moscow, April 17–28, 2017)]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2017. pp. 294–298 (CD-ROM).
2. Kazakov N. A., Zabelina S. B. [The implementation of the creative aspect of learning activities in students at mathematics lessons]. In: *Materialy ezhegodnoi vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, aspirantov i studentov «Nauka na blago chelovechestva», posvyashchennoi 85-letiyu MGOU: Fiziko-matematicheskii fakul'tet* [The proceedings of the annual all-Russian scientific-practical conference of teachers, graduate students and students “Science for the benefit of humanity”, dedicated to the 85th anniversary of MRSU: the Physics and Mathematics faculty]. Moscow, MRSU Ed. off. Publ., 2016. pp. 35–41.
3. Kazakov N. A., Kuznetsova T. I. [From the history of the terms “model” and “modeling”. Part 3. Drawings – models of task]. In: Kuz'min O. V., chief ed. *Problemy uchebnogo protsesssa v innovatsionnykh shkolakh: sbornik nauchnykh trudov. Vip. 21* [Problems of the educational process in innovative schools: a collection of scientific papers. Iss. 21]. Irkutsk, Irkutsk State University Publishing House, 2018. pp. 54–58.
4. Katurzhevskaya O. V. *Metodika prepodavaniya matematiki* [Methods of teaching mathematics]. Armavir, RIO ASPU Publ., 2016. 140 p.
5. Yashchenko I. V., ed. *EGE. Matematika. Profil'nyi uroven': tipovye ekzamenatsionnye varianty: 36 variantov* [Unified State Exam. Math. Profile level: typical exam tests: 36 options]. Moscow, “Natsional'noe obrazovanie” Publ., 2018. 256 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Казаков Никита Александрович – педагог дополнительного образования физико-математической школы № 2007, магистрант факультета психологии Московского государственного областного университета;
e-mail: alphan95@mail.ru

Кузнецова Татьяна Ивановна – доктор педагогических наук, профессор кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова; академик Международной академии наук педагогического образования;
e-mail: kuzti45@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikita A. Kazakov – teacher of additional education at Physics and Mathematics School No. 2007, 1st year undergraduate student at the Department of Primary Education of the Faculty of Psychology, Moscow Region State University;
e-mail: alphan95@mail.ru

Tatiana I. Kuznetsova – Doctor in Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Natural Sciences and Humanities, Lomonosov Moscow State University; academician of the International Teachers' Training Academy of Science;
e-mail: kuzti45@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Казаков Н. А., Кузнецова Т. И. Метод вспомогательной окружности в планиметрических задачах ЕГЭ // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 1. С. 97–106.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-97-106

FOR CITATION

Kazakov N. A., Kuznetsova T. I. Auxiliary circle method in planimetric problems of the Unified State Exam. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 97–106.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-1-97-106.