РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 + 512.54+517.9
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-6-13

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ГЛАДКИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Забелина С. Б., Марченко Т. А., Матвеев О. А., Пинчук И. А.
Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются геометрические и алгебраические свойства дифференциального уравнения первого порядка на гладких конечномерных вещественных многообразиях. Дифференциальному потоку (автономному или неавтономному) на многообразии сопоставляется некоторая аффинная связность без кручения, причём все исходные траектории являются некоторыми геодезическими линиями этой аффинной связности. Используя дифференциально-алгебраические характеристики аффинной связности, проводится исследование некоторых классов уравнений первого порядка на гладких конечномерных вещественных дифференцируемых многообразиях.

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, гладкие многообразия, аффинные связности, универсальные алгебры, квазигруппы.

GEOMETRIC AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON SMOOTH FINITE-DIMENSIONAL REAL MANIFOLDS

S. Zabelina, T. Marchenko, O. Matveyev, I. Pinchuk
Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. We consider the geometric and algebraic properties of the first-order differential equation on smooth finite-dimensional real manifolds. An affine connection without torsion is compared with a differential flow (autonomic or non-autonomic) on a manifold, with all the original trajectories being some geodesic lines of this affine connection. Using differential-algebraic characteristics of affine connectivity, we study some classes of first-order equations on smooth finite-dimensional real differentiable manifolds.

Keywords: systems of ordinary differential equations, smooth manifolds, affine connections, universal algebras, quasi-groups.

С классической точки зрения одной из основных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений является классификация решений дифференциальных уравнений по некоторому признаку, то есть введение топологических, дифференциальных, алгебраических инвариантов векторного поля, которые определяли бы «качественную» картину поведения соответствующего этому полю потока.

Нашей задачей является сопоставление дифференциальному потоку некоторой аффинной связности без кручения. Тогда тензорные поля кривизны и его ковариантные производные являются тензорными характеристиками исходного потока. Такой подход позволяет в дальнейшем, используя алгебраические аспекты теории пространств аффинной связности [1–5] к потоку, присоединить алгебраические конструкции, такие как касательные алгебры, геометрические лупы, определяемые параллельными переносами, геодезические квазигруппы, определяемые гомотетиями. Это позволяет провести классификацию уже по дифференциально-алгебраическим признакам.

Пусть M – дифференцируемое многообразие конечной размерности n, $\dim M = n$, n – натуральное число, $T(M)$ – касательное расслоение, слой которого в каждой точке носителя обозначим $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное пространство. Касательное расслоение $T(M)$ локально диффеоморфно тривиальному расслоению $U\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} U,$ где U – открытое подмножество M, а π – проекция на первый сомножитель. Автономное векторное поле X на M локально задаётся отображением $X : U \to \mathrm{U} \times \mathbb{R}^n$, где $X(x) = (x, f(x))$, $x \in U$.

Интегральные кривые автономного векторного поля локально представляются в некоторой системе координат решениями автономной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = f^i\left(x\right),\ i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Неавтономное векторное поле $\tilde{X}$ на M локально задаётся отображением $\tilde{X} : U\times\mathbb{R} \to U\times\mathbb{R}^n,$ где $\tilde{X}\left(x,t\right) = \left(x, g\left(x,t\right)\right) \quad x\in U; t\in\mathbb{R}.$

Интегральные кривые неавтономного векторного поля в некоторой локальной системе координат задаются решениями неавтономной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = g^i\left(x,t\right),\ i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

При некоторых естественных предположениях на теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений возможно гладким образом «склеить» эти локальные решения и получить автономный или неавтономный «поток» на M, то есть отображение $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$, $(x, t) \to \varphi(x, t)$.

Наше исследование носит локальный характер; все вычисления мы проводим в одной локальной системе координат.

Дифференцируем по t каждое уравнение системы (2):

$$\ddot{x}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial t}. \quad (3)$$

(Здесь, согласно правилу Эйнштейна, происходит свертка по «слепому» индексу j: $\frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j}\dot{x}^j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j}\dot{x}^j$.)

Подставляя соотношения (2) в выражения (3), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x}^i = \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial x^j} g^i(x,t) + \frac{\partial g^i(x,t)}{\partial t}; \; i = \overline{1,n}\ . \quad (4)$$

Сделаем невырожденную линейную замену независимой переменной t:

$$t = au + b,\ a = \text{const},\ b = \text{const},\ a \neq 0,\ \frac{dt}{du} = a,\ \frac{d^2}{du^2} = 0.$$

$$\frac{dx^i}{du} = \frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dt}{du};\ \frac{d^2x^i}{du^2} = \frac{d}{du}\left(a\frac{dx^i}{dt}\right) = a^2\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{du}\right)^2.$$

Теперь считаем u независимой переменной. От системы уравнений (4) приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y^i}{du^2} - \left[\dfrac{\partial g^i(y,au+b)}{\partial y^j} g^j(y,au+b) + \dfrac{\partial g^i(y,au+b)}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{a}\right]\left(\dfrac{dt}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2t}{du^2} = 0; \end{cases} \quad (5)$$

где $y^i(u) = x^i(au+b),\ i = \overline{1,n}.$

Положим $$\tilde{A}^i_{n+1,n+1}(y) = -\left[\frac{\partial g^i(y,au+b)}{\partial y^j} g^j(y,au+b) + \frac{\partial g^i(y,au+b)}{a\cdot\partial u}\right],$$

$\tilde{A}^i_{jk}(y) = 0$, где индексы i, j, k изменяются от 1 до n, $\tilde{A}^{n+1}_{ij} = 0$; $\tilde{A}^{n+1}_{n+1,n+1} = 0$. Для удобства дальнейших записей положим $y^{n+1}(u) = t; g^i(y, y^{n+1}) = \theta^i(y)$. Теперь мы можем систему (5) переписать следующим образом:

$$\frac{d^2y^a}{du^2}+\tilde{A}^{\alpha}_{\beta\gamma}(y)\cdot\frac{dy^{\beta}}{du}\frac{dy^{\gamma}}{du}=0, \tag{6}$$

где $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n + 1$.

Система (6) представляет собой уравнения геодезических линий с аффинным параметром u на $U \times R^{-}U \subset M$, U – некоторое открытое подмногообразие в M, $\left\{\tilde{A}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}$ – символы Кристоффеля второго рода, то есть коэффициенты некоторой аффинной связности ∇ на $U\times R$.

Тензорное поле кручения в $(U \times R, \nabla)$ тождественно равно нулю $\left(\tilde{A}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\tilde{A}^{\alpha}_{\gamma\beta}\right)$.

Компоненты тензорного поля кривизны R вычисляем по формулам:

$$R^{\alpha}_{km,\beta}=\frac{\partial\tilde{A}^{\alpha}_{m\beta}}{\partial y^k}-\frac{\partial\tilde{A}^{\alpha}_{k\beta}}{\partial y^m}+\tilde{A}^{\gamma}_{m\beta}\tilde{A}^{\alpha}_{k\gamma}-\tilde{A}^{\gamma}_{k\beta}\tilde{A}^{\alpha}_{m\gamma}, \tag{7}$$

где $1\le\alpha,\beta,k,m\le n+1; R^{\alpha}_{km,\beta}=-R^{\alpha}_{mk,\beta}$.

$$R^{i}_{n+1j,n+1}=-R^{i}_{j\,n+1,n+1}=\frac{\partial^2\theta^i}{\partial y^j\partial y^k}\theta^k+\frac{\partial\theta^i}{\partial y^k}\frac{\partial\theta^k}{\partial y^j}+a\frac{\partial^2\theta^i}{\partial y^j\partial y^{n+1}}. \tag{8}$$

Здесь индексы i, j, k изменяются от 1 до n. Остальные компоненты тензора кривизны тождественно равны нулю.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть на дифференцируемом многообразии M, $\dim M = n$, задан неавтономный поток. Пусть в некотором открытом подмногообразии $U \subset M$ введена локальная система координат $(x^1, x^2, ..., x^n)$, в которой интегральные кривые потока локально являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (2).

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} y^i(u)=x^i(t)=x^i(au+b), \quad i=\overline{1,n} \\ y^{n+1}(u)=t=au+b, \end{cases} \tag{9}$$

где t, u – действительные переменные, a, b – действительные числа, $a \ne 0$.

Ещё замена $g^i\left(y(u),y^{n+1}(u)\right)=\theta^i(y)$.

Тогда неавтономному потоку на M сопоставляется однопараметрическое семейство аффинных связностей $(U \times R, \nabla(a))$, $a \in R$, $a \ne 0$ с нулевым кручением, ненулевые коэффициенты этих связностей (символы Кристоффеля второго рода) задаются формулой:

$$\tilde{A}^{i}_{n+1,n+1}(y)=-\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\theta^i(y)}{\partial y^j}\theta^j(y)+a\frac{\partial\theta^i(y)}{\partial y^{n+1}}\right]. \tag{10}$$

Ненулевые компоненты тензора кривизны задаются соотношениями (8).

<u>Следствие.</u> Пусть на дифференцируемом многообразии M, $n = \dim M$, задан автономный поток. Пусть в некотором открытом подмногообразии $U \subset M$ введена локальная система координат $(x^1, x^2, ..., x^n)$. Сделаем замену (9).

Тогда автономному потоку сопоставляется семейство аффинных связностей на $U \times R$, то есть (M, ∇) с нулевым кручением, ненулевые компоненты связности в выбранной системе координат задаются формулами:

$$\tilde{A}^i_{n+1,n+1}\left(y\right) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^i\left(y\right)}{\partial y^j} h^j\left(y\right) + \frac{\partial g^i\left(y, au+b\right)}{\partial u}, \qquad (11)$$

где $h^i\left(y\right) = f^i\left(x\left(t\right)\right) = f^i\left(x\left(au+b\right)\right) = f^i\left(y\left(u\right)\right)$.

Пример. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \gamma_1 x^2 x^3, \\ \dot{x}^2 = \gamma_2 x^1 x^3, \\ \dot{x}^3 = \gamma_3 x^1 x^2, \end{cases} \qquad (12)$$

где $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, t – независимая переменная, действительные коэффициенты γ_1, γ_2, γ_3, считаем постоянными.

Системы этого типа введены при исследовании движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки в отсутствие внешних сил (уравнения Эйлера) ([6], с. 123).

Продифференцируем каждое уравнение системы (12) по t:

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \gamma_1\left(\dot{x}^2 x^3 + x^2 \dot{x}^3\right), \\ \ddot{x}^2 = \gamma_2\left(\dot{x}^1 x^3 + x^1 \dot{x}^3\right), \\ \ddot{x}^3 = \gamma_3\left(\dot{x}^1 x^2 + x^1 \dot{x}^2\right). \end{cases} \qquad (13)$$

В систему (13) подставляем соотношения (12):

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \gamma_1 x^1\left(\gamma_2\left(x^3\right)^2 + \gamma_3\left(x^2\right)^2\right), \\ \ddot{x}^2 = \gamma_2 x^2\left(\gamma_1\left(x^3\right)^2 + \gamma_3\left(x^1\right)^2\right), \\ \ddot{x}^3 = \gamma_3 x^3\left(\gamma_1\left(x^2\right)^2 + \gamma_2\left(x^1\right)^2\right). \end{cases} \qquad (14)$$

Сделаем невырожденную замену независимой переменной t: $t = au + b$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $a \neq 0$. Положим $y^i\left(u\right) = x^i\left(au+b\right)$, $i = \overline{1,3}$, $y^4 = t = au + b$. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y^1}{du^2} - \gamma_1 y^1 \left(\gamma_2 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^2\right)^2\right) \left(\dfrac{dy^4}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2y^2}{du^2} - \gamma_2 y^2 \left(\gamma_1 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^1\right)^2\right) \left(\dfrac{dy^4}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2y^3}{du^2} - \gamma_3 y^3 \left(\gamma_1 \left(y^2\right)^2 + \gamma_2 \left(y^1\right)^2\right) \left(\dfrac{dy^4}{du}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2y^4}{du^2} = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Ненулевые коэффициенты аффинной связности имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^1_{44}\left(y\right) &= -\gamma_1 y^1 \left(\gamma_2 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^2\right)^2\right), \\ \tilde{A}^2_{44}\left(y\right) &= -\gamma_2 y^2 \left(\gamma_1 \left(y^3\right)^2 + \gamma_3 \left(y^1\right)^2\right), \\ \tilde{A}^3_{44}\left(y\right) &= -\gamma_3 y^3 \left(\gamma_1 \left(y^2\right)^2 + \gamma_2 \left(y^1\right)^2\right). \end{aligned} \qquad (16)$$

Заключение

Конструкция, изложенная выше, позволяет построить дифференциально-алгебраические инварианты [7; 8] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, с помощью алгебраической теории пространств аффинной связности.

Статья поступила в редакцию 22.02.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Matveyev O. A. On quasigroup theory of manifolds with trajectories // Webs and quasigroups. Tver: Tver State University, 2000. P. 129–139.
2. Матвеев О. А. Квазигрупповые свойства многообразий с траекториями // Вестник Московского педагогического университета. Математика-физика. 1998. № 3–4. С. 10–15.
3. Паншина А. В., Матвеев О. А. О локально симметрических и абелевых механических системах // Актуальные проблемы математики и методики ее преподавания: межвузовский сборник научных трудов. Пенза: ПГПУ, 2001. С. 62–68.
4. Паншина А. В., Матвеев О. А., Матвеева Н. В. О квазигрупповой теории абелевых и симметрических механических систем // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сборник научных трудов. Выпуск 9. М.: СТАНКИН, 2005. С. 22–25.
5. Паншина А. В., Матвеев О. А. Геометрические и алгебраические свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2011. № 3. С. 31–40.

6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432 с.
7. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Алгебраическая теория пространств, близких к симметрическим: монография. Germany: Lap Lambert Academic Publishing, 2012. 125 с.
8. Матвеев О. А., Нестеренко Е. Л. Универсальные алгебры в теории пространств аффинной связности, близких к симметрическим: монография. М.: МГОУ, 2012. 132 с.

REFERENCES

1. Matveyev O. A. On quasi-group theory of manifolds with trajectories. In: *Webs and quasi-groups*. Tver, Tver State University Publ., 2000. pp. 129–139.
2. Matveev O. A. [Quasi-group properties of manifolds with trajectories]. In: *Vestnik Moskovskogo pedagogicheskogo universiteta. Matematika-fizika* [Bulletin of Moscow Pedagogical University. Mathematics-physics], 1998, no. 3–4, pp. 10–15.
3. Panshina A. V., Matveev O. A. [On locally symmetric and abelian mechanical systems]. In: *Aktual'nye problemy matematiki i metodiki ee prepodavaniya: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* [Actual problems of mathematics and methods of teaching: Interuniversity collection of scientific papers]. Penza, Penza State Pedagogical University Publ., 2001. pp. 62–68.
4. Panshina A. V., Matveev O. A., Matveeva N. V. [On the quasi-group theory of abelian and symmetric mechanical systems]. In: *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem: sbornik nauchnykh trudov. Vypusk 9* [Fundamental physical and mathematical problems and modeling of technological systems: Collection of scientific works. Issue 9]. Moscow, STANKIN Publ., 2005. pp. 22–25.
5. Panshina A. V., Matveev O. A. [The geometric and algebraic properties of the systems of ordinary differential equations]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2011, no. 3, pp. 31–40.
6. Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. New York, Springer, 2010. 520 p.
7. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Algebraicheskaya teoriya prostranstv, blizkikh k simmetricheskim* [Algebraic theory of spaces close to symmetric: Monograph]. Germany, Lap Lambert Academic Publishing Publ., 2012. 125 p.
8. Matveev O. A., Nesterenko E. L. *Universal'nye algebry v teorii prostranstv affinnoi svyaznosti, blizkikh k simmetricheskim* [Universal algebra in the theory of spaces with affine connection close to symmetric: Monograph]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2012. 132 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Забелина Светлана Борисовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: zabelina_sb@mail.ru;

Марченко Татьяна Андреевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Пинчук Ирина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики Московского государственного областного университета;
e-mail: irenepin@yandex.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Svetlana B. Zabelina – PhD in pedagogical Sciences, associate professor at the Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Mathematics Teaching Methodology, Moscow Region State University;
e-mail: zabelina_sb@mail.ru;

Tatyana A. Marchenko – student at the Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: tatian96@rambler.ru;

Oleg A. Matveyev – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

Irina A. Pinchuk – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Higher Algebra, Elementary Mathematics and Mathematics Teaching Methodology, Moscow Region State University;
e-mail: irenepin@yandex.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Забелина С. Б., Марченко Т. А., *Матвеев О. А.,* Пинчук И. А. Геометрические и алгебраические свойства дифференциальных уравнений первого порядка на гладких конечномерных вещественных многообразиях // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2019. № 2. С. 6–13.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-6-13

FOR CITATION

Zabelina S. B., Marchenko T. A., Matveyev O. A., Pinchuk I. A. Geometric and algebraic properties of first-order differential equations on smooth finite-dimensional real manifolds. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 2, pp. 6–13.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-6-13