УДК 539.1

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-24-48

К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА-МАКСВЕЛЛА-ЭЙНШТЕЙНА И ЕГО СВЯЗЬ С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЛЯМБДА-ЧЛЕНОМ

Веденяпин В. В.^{1,2}, Фимин Н. Н.¹, Чечеткин В. М.¹

¹ Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук

125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4, Российская Федерация

² Российский университет дружбы народов

117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Российская Федерация

Аннотация. Из классического действия Лоренца-Гильберта-Эйнштейна выводятся кинетические уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна для частиц в гравитационном и электромагнитном полях. Предложена методика синхронизации собственных времён различных частиц. На основе полученных выражений для действий (в том числе в постньютоновском приближении) анализируется связь космологического лямбда-члена и тёмной энергии.

Ключевые слова: модель Милна-МакКри, уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна, лагранжиан, космологическая постоянная, действие Гильберта.

DERIVATION OF VLASOV–MAXWELL–EINSTEIN EQUATION AND ITS CONNECTION WITH COSMOLOGICAL LAMBDA-TERM

V. Vedenyapin^{1,2}, N. Fimin¹, V. Chechetkin¹

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences
Miusskaya ploshchad' 4, 125047 Moscow, Russian Federation

² RUDN University

ul. Mikluho-Maklaya 6, 117198 Moscow, Russian Federation

Abstract. Using the classical Lorentz–Hilbert–Einstein action, we derive the kinetic Vlasov–Maxwell–Einstein equation for particles in the gravitational and electromagnetic fields. The method of synchronization of intrinsic times of different particles is proposed. Based on the obtained expressions for actions (including in the post-Newtonian approximation), we analyze the connection of the cosmological lambda-term and dark energy.

Keywords: Milne–McCree model, Vlasov–Maxwell–Einstein equation, Lagrangian, cosmological constant, Hilbert action.

Введение

Уравнения типа Власова проживают удивительную жизнь. Всё время расширяются не только сферы их приложения, но и приставки, соответствующие этим приложениям: уже сейчас в научном обиходе есть уравнения Власова-

Пуассона для гравитации, плазмы и электронов, уравнения Власова-Максвелла для электродинамики и уравнения Власова-Эйнштейна для систем гравитирующих частиц. Мы будем рассматривать в настоящей работе уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна. Это название естественное, поскольку проистекает из классических лагранжианов общей теории относительности (ОТО) и электродинамики. При выводе уравнений типа Власова из классических лагранжианов обычно сначала выводятся уравнения Лиувилля. В случае уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна возникают новые трудности: для корректности вывода требуется синхронизация времён разных частиц и сравнение разных форм лагранжианов для движения по геодезическим. При этом появляется интеграл интервала (в пособиях по ОТО фактически принудительно полагаемый равным единице), без изучения которого невозможно синхронизовать собственные времена разных частиц, а поэтому и выписать уравнение Власова-Эйнштейна для многих частиц. Для получения уравнений самосогласованных полей требуется преобразование классических действий от лагранжева представления к эйлерову с использованием функций распределения.

Уравнение движения частиц в гравитационном и электромагнитном поле и уравнение Лиувилля

Общерелятивистское действие для движущейся заряженной (с зарядом e) частицы массы m в присутствии гравитационного и электромагнитного поля может быть записан в следующем виде:

$$S_1 = -mc \int_0^{\lambda_{\max}} \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{X})} \frac{dX^\mu(\mathbf{q}, \lambda)}{d\lambda} \frac{dX^\nu(\mathbf{q}, \lambda)}{d\lambda} d\lambda - \frac{e}{c} \int A_\mu \frac{dX^\mu}{d\lambda} d\lambda,$$

где: $g_{\mu\nu}(\mathbf{X})$ – фундаментальный тензор 4-мерного пространства-времени

$(\mathbf{X} = \{X^\mu\}_{\mu=1,\dots,4})$, $A_\mu(\mathbf{X}) \equiv \{\varphi(\mathbf{X}); \mathbf{A}(\mathbf{X})\}$ – 4-потенциал электромагнитного

поля, $\mathbf{q}$ – лагранжев параметр частицы; переменная $\lambda \in \mathbb{R}^+$ – произвольный параметр. По повторяющимся индексам идёт суммирование.

Введём в рассмотрение также действие с модифицированным первым членом:

$$S_2 = -\frac{mc}{2\sqrt{I}} \int_0^{\lambda_{\max}} g_{\mu\nu}(\mathbf{X}) \frac{dX^\mu(\mathbf{q}, \lambda)}{d\lambda} \frac{dX^\nu(\mathbf{q}, \lambda)}{d\lambda} d\lambda - \frac{e}{c} \int A_\mu \frac{dX^\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

В литературе (см., например, [1–3; 8]) подобная операция (переход к новой форме действия) производится без электромагнитного поля (второго слагаемого в действиях) и обосновывается тем, что уравнения движения частицы в гравитационном поле будут одинаковыми в обоих случаях (то есть при использовании действий S_1 и S_2 с заменой параметра λ на «натуральный» параметр s или собственное время $\tau = s/c$).

Поставим вопрос обоснования эквивалентности действий по признаку совпадения уравнений Эйлера-Лагранжа. Рассмотрим два типа действий с ядрами-лагранжианами следующей общей формы:

$$S_I = k \int L \left(\mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{d\lambda} \right) d\lambda + \int L_1 \left(\mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{d\lambda} \right) d\lambda,$$

$$S_{II} = \int h(L) d\lambda + \int L_1 \left(\mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{d\lambda} \right) d\lambda,$$

где $h(L)$ – некоторая (гладкая) произвольная функция своего аргумента. Сравним уравнения Эйлера-Лагранжа, получаемые из действий S_I и S_{II} .

Лемма (об эквивалентности действий S_I и S_{II}). Достаточные условия для эквивалентности, то есть совпадения уравнений Эйлера-Лагранжа, действий S_I и S_{II} таковы:

- 1) лагранжиан $L(\mathbf{X}, \mathbf{X}_\lambda)$ должен быть интегралом движения для действия S_I ;
- 2) коэффициент k в определении S_I должен совпадать с производной функции $h(L)$ из определения действия S_{II} : $k = dh(L)/dL$. Если лагранжиан не равен нулю, то коэффициент k определяется единственным образом.

Доказательство получается прямым варьированием действия S_{II} , генерирующего уравнения Эйлера-Лагранжа [1; 12; 8]:

$$\frac{d^2 h}{dL^2} \frac{dL}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_\lambda} + \frac{dh}{dL} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}_\lambda} = \frac{dh}{dL} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}},$$

и сравнением получающихся уравнений с соответствующими уравнениями движения для действия S_I :

$$K \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}_\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}_\lambda} = k \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{X}}.$$

Следствием из данной Леммы является тот факт, что ранее введенные действия S_1 и S_2 эквивалентны в смысле Леммы, то есть обладают одинаковыми уравнения движения. Действительно, для этих действий имеем:

$$h(L) = -mc\sqrt{L}, \quad L = g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\lambda} \frac{dX^\nu}{d\lambda}, \quad L_1 = -\frac{e}{c} A_\mu \frac{dX^\mu}{d\lambda}.$$

Условие 1 Леммы выполнено по теореме Эйлера об однородных функциях: функция Гамильтона (интеграл движения!) для действия S_2 , получаемая преобразования Лежандра, пропорциональна лагранжиану $L = g_{\mu\nu} X_\lambda^\mu X_\lambda^\nu$, и лагранжиан L_2 первой степени по «скоростной» переменной X_λ^μ ; условие 2 выполнено, поскольку коэффициент k в S_1 равен в точности производной функции $h(L)$ из S_{II} : $k = dh/dL = -mc/2\sqrt{L}$ (это соотношение проясняет физический смысл величины I : она численно равна сохраняющейся величине лагранжиана L и пропорциональна соответствующему ему гамильтониану).

Выпишем уравнения Эйлера-Лангранжа для действия S_1 или S_2 в соответствии с Леммой, они идентичны (в отличие от обычной процедуры [1; 3] при варьировании S_1 величину интервала полагаем равной не единице, а $\sqrt{I}$):

$$\frac{mc}{\sqrt{I}} \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\nu} \frac{dX^\nu}{d\lambda} \right) + \frac{e}{c} \frac{dA_\mu}{d\lambda} = \frac{mc}{2\sqrt{I}} \frac{\partial g_{\nu\zeta}}{\partial X^\mu} \frac{dX^\nu}{d\lambda} \frac{dX^\zeta}{d\lambda} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} \frac{dX^\nu}{d\lambda}. \quad (1)$$

Отсюда видно, что при отсутствии электромагнитного взаимодействия между частицами величина $mc/\sqrt{I}$ сокращается, и уравнения движения могут быть равносильным образом записаны с использованием как параметра λ , так и параметра собственного интервала s . Однако учёт электромагнитного взаимодействия приводит при использовании различных параметров к различающимся уравнениям. Хотя, как можно видеть из уравнения (1), можно в принципе перейти к аффинному параметру s , выразив $d\lambda$ через ds и I : $ds = \sqrt{I}d\lambda$.

В многочастичных системах такая возможность отсутствует. Рассмотрим действие, аналогичное S_1 , но для системы многих частиц с различающимися массами m_a и зарядами e_a ($a = \overline{1, N}$):

$$S_{1,\Sigma} = - \sum_a m_a c \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dX_a^\mu}{d\lambda} \frac{dX_a^\nu}{d\lambda}} d\lambda - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu \frac{dX_a^\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

Снова переходим к лагранжиану, квадратичному по скоростям, и получаем эквивалентное действие:

$$S_{2,\Sigma} = - \sum_a \frac{m_a c}{2\sqrt{I_a}} \int g_{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) \frac{dX_a^\mu}{d\lambda} \frac{dX_a^\nu}{d\lambda} d\lambda - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu \frac{dX_a^\mu}{d\lambda} d\lambda.$$

Отметим здесь появление индекса a , нумерующего частицы, у интеграла I_a : величины этих интегралов, обозначающих величину интервала разных частиц, необязательно одинаковы. Этим мы синхронизовали собственное время разных частиц $ds_a = \sqrt{I_a}d\lambda$ в следующем смысле: 1) установили, что невозможность синхронизации самих интервалов ds_a связана с различными величинами интегралов I_a ; 2) показали, как различные собственные времена связаны между собой: параметр λ для всех частиц один и тот же. Отметим, что интегралы I_a зависят от параметризации, но их отношение не зависит ($I_{a1}/I_{a2} \neq \varphi(\lambda), a_{1,2} \in \{1, \dots, N\}$).

Для описания динамики многочастичной системы, ассоциированной с действиями $S_{1,\Sigma}$ или $S_{2,\Sigma}$, можно ввести стандартным образом канонические («длинные») [1–3] импульсы:

$$(Q_a)_\mu = \frac{\partial L}{\partial V_a^\mu} = - \frac{m_a c}{\sqrt{I_a}} g_{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) V_a^\nu - \frac{e_a}{c} A_\mu(\mathbf{X}_a), \quad V_a^\nu \equiv \frac{\partial X_a^\nu}{\partial \lambda}.$$

Очевидным образом можно получить явное выражение скоростей через длинные импульсы:

$$V_\mu^\nu = - \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} g^{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) \left((Q_a)_\mu + \frac{e_a}{c} A_\mu \right).$$

Соответственно, второе уравнение гамильтоновой пары уравнений, ассоциированной с канонически сопряженными переменными (X_a, Q_a) :

$$\begin{aligned} \frac{d(Q_a)_\mu}{d\lambda} = & \sum_a \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} \left((Q_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} A_\zeta(\mathbf{X}_a) \right) \frac{\partial g^{\zeta\nu}}{\partial X_a^\mu} \left((Q_a)_\nu + \frac{e_a}{c} A_\nu(\mathbf{X}_a) \right) + \\ & + \frac{e_a \sqrt{I_a}}{m_a c^2} \left((Q_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} A_\zeta(\mathbf{X}_a) \right) g^{\zeta\xi} \frac{\partial A_\xi(\mathbf{X}_a)}{\partial X_a^\mu}. \end{aligned}$$

При этом соответствующая этим уравнениям функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \sum_a \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} \left((Q_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} A_\zeta(\mathbf{X}_a) \right) g^{\zeta\xi} \left((Q_a)_\nu + \frac{e_a}{c} A_\nu(\mathbf{X}_a) \right).$$

Здесь интегралы $\sqrt{I_a}$ осуществляют синхронизацию времён, приводя к дифференцированию по одному и тому же параметру λ : соотношение $ds_a = \sqrt{I_a} d\lambda$ показывает, что получаются уравнения, где можно перейти к собственным (вообще говоря, различающимся) временам. Введём (парциальную, для типа a частиц) функцию распределения $f_a(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \lambda)$ над расширенным 9-мерным фазовым пространством (в соответствии с [9–11] индексы a переместились от координат и импульсов к функции распределения f_a). Соответствующее уравнение Лиувилля для f_a принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_a(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} g^{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) \left((Q_a)_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \frac{\partial f_a}{\partial X^\nu} + \\ & + \left(\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} \left((Q_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} A_\zeta(\mathbf{X}_a) \right) \frac{\partial g^{\zeta\nu}}{\partial X_a^\mu} \left((Q_a)_\nu + \frac{e_a}{c} A_\nu(\mathbf{X}_a) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{e_a \sqrt{I_a}}{m_a c^2} \left((Q_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} A_\zeta(\mathbf{X}_a) \right) g^{\zeta\xi} \frac{\partial A_\xi}{\partial X_a^\mu} \right) \frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения зависят от индекса a через массы m_a , заряды e_a и интеграла I_a . Выпишем λ -стационарную форму этого уравнения, когда f_a не зависит от параметра λ (именно так обычно записывают уравнение Власова-Эйнштейна, хотя и в более упрощенном случае отсутствия электромагнитного взаимодействия [9; 13; 14]:

$$\begin{aligned} & -g^{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) \left((Q_a)_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \frac{\partial f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\partial X^\nu} + \\ & + \left(\frac{\partial g^{\zeta\nu}}{\partial X_a^\mu} \left((Q_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} A_\zeta \right) \left((Q_a)_\nu + \frac{e_a}{c} A_\nu \right) + \frac{e_a}{c} F_{\mu\nu}(\mathbf{X}) g^{\zeta\nu} \left((Q_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} A_\zeta \right) \right) \frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0. \end{aligned}$$

Можно сравнить выписанные выше кинетические уравнения с уравнениями Лиувилля, где используются неканонические («короткие») импульсы с нулевыми электромагнитными полями действия $S_{1,\Sigma}$:

$$(P_a)_\mu = -m_a c I_a^{-1/2} g_{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) V_a^\nu.$$

Получаемые при этом уравнения негамильтоновы, но бездивергентные:

$$\frac{dX_a^\nu}{d\lambda} = -\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} g^{\mu\nu}(\mathbf{X})(P_a)_\mu, \quad (3)$$

$$\frac{d(P_a)_\mu}{d\lambda} = -\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} \frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu}(P_a)_\nu (P_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} F_{\mu\nu}(\mathbf{X}_a) g^{\zeta\nu}(\mathbf{X}_a) (P_a)_\zeta.$$

Отметим, что и здесь такая ситуация с синхронизацией времён: собственные времена все различаются, как показывает та же формула $ds_a = \sqrt{I_a} d\lambda$. Выпишем уравнение Лиувилля, вводя парциальные функции распределения $f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \lambda)$ частиц с массами m_a и зарядами e_a над 9-мерным фазовым $(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \lambda)$ -пространством:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} g^{\mu\nu}(\mathbf{X})(P_a)_\mu \frac{\partial f_a}{\partial X^\nu} + \\ & + \left(-\frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} \frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu}(P_a)_\nu (P_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} \frac{\sqrt{I_a}}{m_a c} F_{\mu\nu}(\mathbf{X}) g^{\zeta\nu}(\mathbf{X}) (P_a)_\zeta \right) \frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно переписать в форме, исключаяющей параметр λ , заменяя его на собственный интервал фиксированной a_0 -ой частицы ($a_0 \in \{1, \dots, N\}$) согласно формуле $d\lambda = ds_{a_0} / \sqrt{I_{a_0}}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}, s)}{\partial s_{a_0}} - \frac{1}{m_a c} \frac{\sqrt{I_a}}{\sqrt{I_{a_0}}} g^{\mu\nu}(\mathbf{X})(P_a)_\mu \frac{\partial f_a}{\partial X^\nu} + \\ & + \left(-\frac{1}{m_a c} \frac{\sqrt{I_a}}{\sqrt{I_{a_0}}} \frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu}(P_a)_\nu (P_a)_\zeta + \frac{e_a}{c} \frac{1}{m_a c} \frac{\sqrt{I_a}}{\sqrt{I_{a_0}}} F_{\mu\nu}(\mathbf{X}) g^{\zeta\nu}(\mathbf{X}) (P_a)_\zeta \right) \frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0. \end{aligned}$$

При этом, как уже было отмечено выше, отношение I_a/I_{a_0} не зависит от λ (а является только функцией переменной $\mathbf{X}$).

Приведём λ -стационарную форму уравнения Лиувилля, когда $f_a = f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P})$, то есть не зависит от параметрической переменной λ (при этом сокращаются множители $\sqrt{I_a}/m_a c$ в левой части уравнения):

$$-g^{\mu\nu}(\mathbf{X}) P_\mu \frac{\partial f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\partial X^\nu} + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\nu\zeta}}{\partial X^\mu} P_\nu P_\zeta + \frac{e_a}{c} F_{\mu\nu}(\mathbf{X}) g^{\zeta\nu} P_\nu \right) \frac{\partial f_a}{\partial P_\mu} = 0$$

(поскольку $X^0 = ct$, последнее уравнение в общем случае t нестационарно). В известной авторам литературе подобная форма (для гравитирующих заряженных частиц для функции распределения, зависящей от «короткого» импульса) уравнения Лиувилля отсутствуют; с использованием канонических импульсов уравнение Лиувилля выписано – отметим, на уровне интуитивных рассуждений – в некоторых работах, см., например, [13; 14]). Для нейтральных массивных частиц одинаковой массы m над фазовым $(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ -пространством уравнение Лиувилля записано [14; 15] в следующем виде:

$$\frac{P^\mu}{m} \frac{\partial f(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\partial X^\mu} - \frac{1}{2m} P_\eta P_\zeta \frac{\partial g^{\eta\zeta}}{\partial X^\mu} \frac{\partial f}{\partial P_\mu} = 0,$$

то есть с точностью до переобозначений совпадает с введённым нами λ -независимым уравнением Лиувилля (без электромагнетизма). Следует, однако, указать на то, что в большинстве публикаций, посвящённых уравнению Власова-Эйнштейна, приводится другая форма общерелятивистского уравнения Лиувилля, использующая функцию распределения, зависящую от 4 скоростей (см., например, [16; 17]):

$$V^\zeta \frac{\partial f}{\partial X^\zeta} + \left(-\Gamma_{\eta\mu}^\zeta V^\eta V^\mu + \frac{e}{c} F_\beta^\zeta V^\beta \right) \frac{\partial f}{\partial V^\zeta} = 0,$$

(практически идентичная данной форма уравнения Лиувилля рассматривается также в работах [18–20]).

Рассмотрим в качестве *Примера 1* частный случай уравнения (1), когда метрика $g_{\mu\nu}$ и компоненты векторного потенциала A_μ не зависят от временной координаты. Тогда правая часть равенства (1) при индексе $\mu = 0$ аннулируется, и возможно аналитически проинтегрировать левую часть (индекс a опускаем):

$$\frac{mc}{\sqrt{I}} \left(g_{0\nu} \frac{dX^\nu}{d\lambda} \right) + \frac{e}{c} A_0 = Q_0.$$

Смысл получающегося интеграла можно выяснить, взяв постгалилееву метрику $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1 + 2U/c^2, -1, -1, -1)$, где U – ньютоновский гравитационный потенциал (см., например, [3]). Тогда последнее соотношение преобразуется к форме:

$$\frac{mc}{\sqrt{I}} \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) \frac{dX^0}{d\lambda} + \frac{e}{c} A_0 = Q_0, \quad (4)$$

а остальные уравнения Эйлера-Лагранжа системы (1) приобретают вид:

$$\frac{mc}{\sqrt{I}} \frac{d}{d\lambda} \frac{dX^j}{d\lambda} + \frac{dA_j}{d\lambda} = \frac{mc}{2\sqrt{I}} \frac{\partial U}{\partial x^j} \left(\frac{dX^0}{d\lambda} \right)^2 + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial X^j} \frac{dX^\nu}{d\lambda}, \quad j=1,2,3.$$

Заменяя параметр λ из уравнения (9) на время t , получаем уравнения движения заряженной частицы в электростатическом поле и в гравитационном потенциале U :

$$M \frac{d^2 x^j}{dt^2} = M \frac{\partial U}{\partial x^j} + \frac{e}{c} F_{\mu j} \frac{dX^\mu}{dt},$$

где $M = (Q_0/c - eA_0/c^2)/(1 + 2U/c^2)$ — эффективная масса частицы при суперпозиции полей.

В качестве ещё одного физически интересного *Примера 2* (в некотором смысле противоположного рассмотренному выше) разберём случай полностью однородной Вселенной: метрика, гравитационное и электромагнитное поля зависят только от времени. В этом случае уравнения (1) интегрируются из общих соображений гамильтоновой механики, но интересно проследить и конкретные детали. Имеем три интеграла движения (для простоты индекс a не вводится):

$$\frac{mc}{\sqrt{I}} \left(g_{j\nu} \frac{dX^\nu}{d\lambda} \right) + \frac{e}{c} A_j = Q_j \quad (j=1,2,3). \quad (5)$$

Вместо соотношения для нулевой компоненты циклического импульса воспользуемся интегралом энергии $I = g_{\mu\nu} X_\lambda^\mu X_\lambda^\nu$. Следовательно, пространственные компоненты «короткого» импульса определяются как функции времени из формулы (4): $P_j = p_j = eA_j/c - Q_j$, а нулевая («временная») компонента определяется как функция времени из определения $I: g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = m^2 c^2$. Мы пришли к известному соотношению (так называемому условию массовой поверхности [17]), которое ведёт к методу Гамильтона-Якоби [3; 8].

Итак, мы получаем следующие уравнения для определения всех координат:

$$\frac{dX^\mu}{d\lambda} = -\frac{\sqrt{I}}{mc} g^{\nu\mu} (X^0) P_\nu \quad (\mu = \overline{0,3}),$$

по ν суммируем от нуля до трёх.

Исключая отсюда параметр λ путём деления трёх уравнений (5) (для $j = 1,2,3$) на уравнение для $\mu = 0$, получаем:

$$\frac{dX^i}{dX^0} = \frac{g^{vi} (X^0) P_v (X^0)}{g^{0v} (X^0) P_v (X^0)} = \frac{g^{vi} (X^0) (eA_v/c - Q_v)}{g^{0v} (X^0) (eA_v/c - Q_v)}, \quad i=1,2,3.$$

Мы получили уравнения с заданными функциями только временной компоненты, которые просто интегрируются. Такие уравнения можно будет применить к вопросу о тёмной энергии и тёмной материи. Эти решения обобщают Вселенную де Ситтера и другие Вселенные [28].

Общерелятивистское суммарное действие для системы частиц с учётом полевых действий

Рассмотрим общее действие для материи с электромагнитным полем в гравитационном поле, представляющее собой сумму действия S_p (*particles*), действия Максвелла S_f для электромагнитного поля (f от *fields*) с учётом взаимодействия

с частицами S_{pf} (*particles – fields*) и действия S_g (*gravity*) Эйнштейна-Гильберта [1–3]) (по повторяющиеся верхним и нижним индексам идёт суммирование):

$$S_4^L = \sum_a m_a c \sum_q \int_0^{\lambda_{\max}} \sqrt{g_{\mu\nu}} \frac{dX_a^\mu(\mathbf{q}, \lambda)}{d\lambda} \frac{dX_a^\nu(\mathbf{q}, \lambda)}{d\lambda} d\lambda - \\ - \sum_a \frac{e_a}{c} \sum_q \int_0^{\lambda_{\max}} A_\mu(X_a(\mathbf{q}, \lambda)) \frac{dX_a^\mu(\mathbf{q}, \lambda)}{d\lambda} d\lambda - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} |g|^{1/2} d^4 X + \\ + \mathcal{K} \int |g|^{1/2} (R + \Lambda) d^4 X \equiv S_p^L + S_{pf}^L + S_f^L + S_g^L, \quad \mathcal{K} = \frac{-c^3}{16\pi\gamma}, \quad (6)$$

где: a – индекс сорта частиц с массой m_a и зарядом e_a ($a = 1, \dots, a_{\max}$), лангранжев параметрический индекс $\mathbf{q}$ идентифицирует частицы (числом N_a) внутри сорта a , $X_a(\mathbf{q}, \lambda)$ – 4-координата $\mathbf{q}$ -частицы сорта a ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $d\lambda = ds_a / \sqrt{I_a}$; $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ 4-потенциал, $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ – тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\eta} g^{\nu\zeta} F_{\eta\zeta},$$

где $g_{\mu\nu}(\mathbf{X})$ – метрический тензор ($g = \det g_{\mu\nu}$), R – скаляр Риччи.

Дальнейшее рассмотрение структуры действия S_4^L может проводиться на основании двух подходов: если исключить из рассмотрения параметр λ и попытаться исследовать соответствующие уравнения движения и кинетические уравнения, производя при необходимости определённые упрощения, и, в качестве альтернативы, принять в качестве основы 9-мерное расширенное фазовое пространство и развить надлежащий формализм для получения уравнений типа Лиувилля и Власова.

В настоящей статье мы будем действовать в основном в соответствии с первой методикой, поскольку априори специальное внимание мы полагали уделить постньютоновскому приближению, в котором можно перейти от параметра λ к переменной единого для всей системы времени t . Перепишем действие S_4^L , заменяя скорости X_a^μ, X_a^ν , в 1-ом и 2-ом слагаемом правой части определения (6), в соответствии с результатами п. 3 (см. формулу (3)):

$$\frac{dX_a^\mu(\mathbf{q})}{d\lambda} \rightarrow \frac{dX_a^\mu(\mathbf{q})}{dt_a} \frac{dt_a}{d\lambda} = c \frac{g^{\xi\mu}(\mathbf{X}_a(\mathbf{q})) (P_\xi)_a(\mathbf{q})}{g^{0\xi}(\mathbf{X}_a(\mathbf{q})) (P_\xi)_a(\mathbf{q})} \frac{dt_a}{d\lambda}, \quad \xi, \mu = \overline{0, 3}.$$

Тогда действие S_4^L приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
S_4^L = & - \sum_{a,q} m_a c^2 \int_0^{t_{a,max}} \frac{\sqrt{(P_a)_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi}}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi} dt_a - \\
& - \sum_{a,q} e_a \int_0^{t_{a,max}} \frac{A_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}_a)(P_a)_\xi} dt_a - \\
& - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} |g|^{1/2} d^4 X + \mathcal{K} \int |g|^{1/2} (R + \Lambda) d^4 X.
\end{aligned} \quad (7)$$

Перейдём к континуальному пределу при суммировании по $\mathbf{q}$, заменяя сумму интегралом с плотностью в виде функции распределения $f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P})$:

$$\begin{aligned}
S_4^E = & - \sum_a m_a c^2 \iint \frac{\sqrt{P_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X}) P_\xi}}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}) P_\xi} f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) d^4 X d^4 P - \\
& - \sum_a e_a \int \frac{A_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X}) P_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X}) P_\xi} f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) d^4 X d^4 P - \\
& - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} |g|^{1/2} d^4 X + \mathcal{K} \int |g|^{1/2} (R + \Lambda) d^4 X.
\end{aligned} \quad (8)$$

(В S_4^E верхний индекс E означает эйлерово представление, а в ранее введённом S_4^L индекс L – лагранжево представление). Обратный переход от действия (8) к действию (7) производится подстановкой

$$f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{q}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t)) \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a(\mathbf{q}, t)),$$

что по сути является проверкой метода.

Отметим, что подстановка функции распределения в виде суммы дельта-функций хорошо известна в теории уравнения Власова, так как она приводит к точным уравнениям движения системы N тел (для любого N), что показывает фундаментальность уравнений типа Власова, а также является основой метода частиц [7; 24].

Обратимся к рассмотрению Λ -члена. В последнее время он вновь находится под пристальным вниманием специалистов по космологии в связи с новыми экспериментальными данными по ускоренному расширению Вселенной и попытками это хоть как-то объяснить [4; 5; 34; 36].

Сравним лагранжиан, определяемый действием S_4^L , с действием, включающим в качестве подынтегральной функции лагранжиан Гильберта-Эйнштейна с Λ -членом:

$$S_{g,\Lambda} = \mathcal{K} \int (R + \Lambda) |g|^{1/2} d^4 X. \quad (9)$$

Из сравнения формул (8) и (9) видно, что в качестве формального аналога Λ -члена могут выступать первые три слагаемые в правой части формулы (8):

$$\Lambda' = -\frac{1}{16\pi c\mathcal{K}}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{-g}\mathcal{K}} \int \frac{\sqrt{P_\mu g^{\xi\mu}(\mathbf{X})P_\xi}}{g^{\xi 0}(\mathbf{X})P_\xi} f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) d^4 P -$$

$$- \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{-g}\mathcal{K}} \int \frac{A_\mu g^{\mu\xi}(\mathbf{X})P_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X})P_\xi} f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) d^4 P.$$

Подобным же образом можно учитывать вклады любых других полей. Мы получаем шанс не вводить Λ -член априори, а получить его аналог по математике воздействия на материю из классических лагранжианов. Отметим, что в (8) интегрирование при $\Lambda = \text{const}$ даёт бесконечность (что отмечалось многими исследованиями), в то время как выражение с Λ' вполне может быть конечным.

Уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна для метрики и электромагнитных полей получаются варьированием (8) по ним. Варьируем метрику, получаем полевые уравнения Эйнштейна:

$$\mathcal{K} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \right) \sqrt{-g} = \sum_a m_a c^2 \int \left(\frac{1}{2P^0 \sqrt{P^\xi P_\xi}} - \frac{\sqrt{P^\xi P_\xi}}{P_0 (P^0)^2} \delta_0^\nu \right) f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) P_\mu P_\nu d^4 P +$$

$$+ \sum_a e_a \int \left(\frac{A_\mu P_\nu + A_\nu P_\mu}{2P^0} - \frac{A_\xi P^\xi}{P_0 (P^0)^2} P_\mu P_\nu \delta_0^\nu \right) f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) d^4 P - \frac{F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{32\pi c} \sqrt{-g} g_{\mu\nu}.$$

Варьируем электромагнитные потенциалы, получаем уравнения Максвелла в гравитационном поле:

$$\frac{1}{8\pi c} \frac{\partial (F^{\alpha\beta} \sqrt{-g})}{\partial X^\beta} = \sum_a e_a \int \frac{g^{\xi\alpha}(\mathbf{X})P_\xi}{g^{\xi 0}(\mathbf{X})P_\xi} f_a(\mathbf{X}, \mathbf{P}) d^4 P.$$

Далее мы рассмотрим аналогию с Λ -членом для каждого из слагаемых (8) в нерелятивистском и слабонерелятивистском пределах.

Вывод уравнения Власова-Пуассона-Пуассона в нерелятивистском случае

Рассмотрим, следуя [25], нерелятивистское действие, соответствующее предельному переходу в действии (6) $c \rightarrow \infty$ (скорость света стремится к бесконечности), для электростатики с гравитацией (в лагранжевых 3-координатах, причем параметр λ заменяется на t , поскольку он является переменной интегрирования и инвариантен относительно замены):

$$S_5^L = \sum_{a,q} \frac{1}{2} m_a \int \dot{\mathbf{x}}_a^2(\mathbf{q}, t) dt - \sum_a e_a \int \sum_q \varphi(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t), t) dt -$$

$$- \sum_a m_a \int \sum_q U(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t), t) dt + \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \varphi)^2 dx dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt.$$

Оно легко может быть получено из S_4^L (индекс L означает принадлежность к лагранжеву подходу), если в первом слагаемом правой части произвести предельный переход $g_{00} \rightarrow 1 + 2U/c^2$, $g_{kk} = -1$ (остальные компоненты метрического тензора аннулируются). Это приближение слабого релятивизма для действия (6):

$$\begin{aligned} & -\sum_a m_a c \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{X}_a^\mu(\mathbf{q}, t) \dot{X}_a^\nu(\mathbf{q}, t)} dt \rightarrow \\ & \rightarrow -\sum_a m_a c^2 \int \left(1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2} + \frac{2U(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t), t)}{c^2} \right)^{1/2} dt \approx \\ & \approx \sum_a m_a c^2 \int \left(-1 + \frac{1\mathbf{v}_a^2}{2c^2} - \frac{U(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t), t)}{c^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Затем нужно исключить из рассмотрения постоянную $\left(-\sum_a m_a c^2 \right)$.

Покажем, что из действия S_5^L получаются правильные уравнения динамики и полей. Варьируя координаты частиц в первых трёх слагаемых, получаем уравнение движения:

$$m_a \ddot{\mathbf{x}}_a(\mathbf{q}, t) = -m_a \nabla U(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t)) - e_a \nabla \phi(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t))$$

(второй закон Ньютона для частицы массы m_a с учётом гравитационного и электромагнитного взаимодействия).

Чтобы получить уравнение для функции распределения (в фазовом пространстве), перепишем уравнение движения в гамильтоновом виде:

$$\frac{d\mathbf{x}_a}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m_a}, \quad \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -m_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - e_a \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}.$$

На их основании можно выписать уравнение Лиувилля для функции распределения $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{p}}{m_a}, \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\left(m_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + e_a \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right), \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \right) = 0. \quad (10)$$

Чтобы написать уравнения для полей, перепишем, следуя [7; 9–13], действие S_4^L через функцию распределения во втором и третьем слагаемых. Этот переход можно символически выразить, заменяя суммы интегралами, переходя от лагранжевых координат к эйлеровым:

$$\sum_q \rightarrow \int d\mathbf{q} \rightarrow \iint f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p.$$

Получаем в эйлеровом представлении:

$$S_4^E = \sum_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p dt - \sum_a e_a \int \varphi(\mathbf{x}, t) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p dt - \\ - \sum_a m_a \int U(\mathbf{x}, t) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p dt + \int \frac{(\nabla \varphi)^2}{8\pi} d^3x dt - \int \frac{(\nabla U)^2}{8\pi\gamma} d^3x dt.$$

(индекс E в обозначении S_4^E означает эйлеровость). Переход от действия S_4^E к исходному S_4^L получаем формально подстановкой функции распределения f во второе и третье слагаемое правой части определения S_4^E в виде суммы произведений дельта-функций:

$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_a(\mathbf{q}, t)),$$

так мы контролируем эквивалентность действий в эйлеровом и лагранжевом представлениях.

Варируя действие S_4^E по U и φ , получаем уравнение Пуассона для гравитационного и электромагнитного полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \sum_a m_a \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad \Delta \varphi = -4\pi \sum_a e_a \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3p. \quad (11)$$

Систему уравнений (10)–(11), рассматриваемых совместно, можно назвать системой Власова-Пуассона-Пуассона [12; 25]. Этот вывод уравнения типа Власова является, видимо, самым простым и наглядным – например, его можно сравнить с более сложными выводами И. Хуанчуна и Ф. Моррисона [31]. А в сложных ситуациях простые выводы предпочтительны.

В работе [27] было введено понятие «критической массы» $m_{cr} = m_e \sqrt{D_1} \approx 10^{-12}$ г. (m_e – масса электрона, D_1 – первая «большая» константа Дирака), связанной с доминированием во взаимодействии сил гравитации или электростатических сил. При $m \gtrsim m_{cr}$ преобладает гравитация, при $m \lesssim m_{cr}$ преобладает, соответственно, электростатика. Из этого следует, что тёмная энергия должна быть связана с заряженными объектами (частицами, системами частиц) с массой $m \lesssim m_{cr}$, а заряженные объекты с $m \gtrsim m_{cr}$ и все электронейтральные объекты дают вклад только в материю (обычную или тёмную).

Слаборелятивистский предел уравнений Эйнштейна и учёт космологического члена

Помимо нерелятивистского приближения при выписывании действия для материи с электромагнитным и гравитационным полями значительный интерес представляет собой первое постньютоновское (иначе слаборелятивистское) приближение, в котором компоненты фундаментального метрического тензора раскладываются по степеням величины $1/c$. Предположим, следуя [1–3], что ненулевые компоненты метрического тензора имеют следующий вид:

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \quad g_{jj} \big|_{j=1,2,3} = -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right).$$

Если следовать методике слабого релятивизма, принятой в [3], то получаем:

$$\int R |g|^{1/2} d^4 X = c^{-2} \int \Delta U \sqrt{1 - 4U/c^2} d^4 X = \frac{2}{c^4} \int (\nabla U)^2 d^4 X.$$

Действительно, первое слагаемое под знаком интеграла при разложении корня $\sqrt{1 - 4U/c^2} \approx 1 - 2U/c^2$ равно нулю: $\int \Delta U d^4 X = 0$, а второе слагаемое $\int (-2U c^{-4} \Delta U) d^4 X$ преобразуем интегрированием по частям к форме $(-2c^{-4}) \int U d(\nabla U) = (-2c^{-4}) \left(U \nabla U \big|_{-\infty}^{\infty} - \int \nabla U \nabla U d^4 X \right)$, после чего имеем окончательно:

$$\mathcal{K} \int R |g|^{1/2} d^4 X \rightarrow \frac{2\mathcal{K}}{c^4} \int (\nabla U)^2 d^3 x d^1 t.$$

Сравниваем полученное выражение с последним членом правой части S_4^{L+E} (см. п. 5), получаем: $2\mathcal{K}/c^3 = -1/(8\pi\gamma)$, откуда $\mathcal{K} = -c^3/(16\pi\gamma)$ (этот вывод соответствует [1–3]).

Теперь исследуем случай учёта Λ -члена в действии Эйнштейна-Гильберта в том же приближении:

$$\int (R + \Lambda) |g|^{1/2} d^4 X = \frac{2}{c^4} \int (\nabla U)^2 d^3 x d^1 t + \int \Lambda d^3 x d^1 t - \frac{2\Lambda}{c^2} \int U d^3 x d^1 t.$$

Укажем, что при $\Lambda = \text{const} \neq 0$ второе слагаемое в правой части стремится к бесконечности, так что правомерно предполагать, что эта величина, действительно достаточно быстро убывающая функция пространственно-временных координат.

Действие для гравитации в приближении слабого релятивизма с Λ -членом имеет следующий вид (в лагранжевом представлении):

$$S_6^L = \sum_{a,q} \int \frac{m_a}{2} \dot{\mathbf{x}}_a^2(\mathbf{q}, t) d^1 t - \sum_{a,q} \int m_a U(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t)) d^1 t + \\ + \frac{2\mathcal{K}}{c^4} \iint (\nabla U)^2 d^3 x d^1 t + \mathcal{K} \iint \Lambda d^3 x d^1 t - \frac{2\mathcal{K}\Lambda}{c^2} \iint U d^3 x d^1 t.$$

Варьируем по частицам, получаем уравнение движения в постньютоновском приближении, соответствующее вышеприведённому действию:

$$m_a \ddot{\mathbf{x}}_a = -m_a \nabla U(\mathbf{x}_a)$$

(оно оказывается совпадающим по форме с уравнением классической динамики). Перепишем действие S_5 в эйлеровом представлении, вводя классическую функцию распределения (на 7-мерном расширенном фазовом пространстве):

$$S_5^E = \sum_a \frac{1}{2m_a} \int \mathbf{p}^2 f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 x d^3 p dt - \sum_a \int U(\mathbf{x}, t) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p d^3 x dt + \\ + \frac{2\mathcal{K}}{c^4} \iint (\nabla U)^2 d^3 x dt + \mathcal{K} \iint \Lambda d^3 x d^3 p dt - \frac{2\mathcal{K}\Lambda}{c^2} \iint U d^3 x d^3 p dt.$$

Обратное преобразование к лагранжеву представлению может быть произведено путём подстановки $f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_a(\mathbf{q}, t))$.

Проварьировав S_5^E по U , получим уравнение Пуассона с Λ -членом:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \sum_a m_a \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p - \frac{1}{2} c^2 \Lambda. \quad (12)$$

Что даёт второе слагаемое в правой части? Наличие «эффективного» внешнего поля: решение уравнения $\Delta U = -\frac{1}{2} c^2 \Lambda$ можно выбрать в простейшем виде,

как $U = -\frac{1}{12} c^2 \Lambda (x^2 + y^2 + z^2)$, что приводит к «расталкиванию» частиц. Что даёт

нам это в решении типа Милна-МакКри? Из уравнения Пуассона получаем:

$$U = 4\pi\gamma \sum_a m_a \int \frac{f_a(x', \mathbf{p}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 p d^3 x' - \frac{c^2 \Lambda}{12} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Мы воспользовались тем, что решение неоднородного линейного уравнения (12) есть сумма частного решения и общего решения однородного уравнения, то есть гармонические функции. Наш выбор частного решения однозначно диктуется требованием изотропности (инвариантности относительно вращений) решения Фридмана и Милна МакКри.

Уравнение модели Милна принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial t^2} = -\gamma \frac{M(r)}{\mathcal{R}^2} + \frac{c\Lambda}{6} \mathcal{R}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\frac{1}{2} (\dot{\mathcal{R}}^2) - \gamma \frac{M(r)}{\mathcal{R}} - \frac{c^2 \mathcal{R}^2 \Lambda}{12} = E.$$

Эффективный потенциал $\Psi(\mathcal{R}) = -\gamma \frac{M(r)}{\mathcal{R}} - \frac{1}{12} c^2 \mathcal{R}^2 \Lambda$ имеет вид выпуклой

(перевернутой) псевдопараболы с точкой максимума $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 = \left(\frac{12\gamma M(r)}{c\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$.

Приведём соответствующее «уравнение Власова-Пуассона с Λ -членом» (для сорта частиц a):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{p}}{m_a}, \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\nabla U, \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \right) = 0,$$

$$\Delta U = 4\pi\gamma \sum_a m_a \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p - \frac{1}{2} c^2 \Lambda.$$

Итак, мы теперь видим не только в лагранжианах, но и в уравнениях динамики, где искать аналоги Λ -члена.

Из приведённого выше выражения для S_6^E вытекает математическая аналогия Λ' и «космологического параметра» Λ в постньютоновском приближении (в нём присутствует зависимость от координат и времени), причём интеграл в S_6^E с Λ' конечен:

$$\Lambda(\mathbf{x}, t) = \left(\mathcal{K} - 2\mathcal{K}U(\mathbf{x}, t)c^{-2} \right)^{-1} \left(\sum_a \frac{1}{2m_a} \int \mathbf{p}^2 f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p - \right. \\ \left. - \sum_a U(\mathbf{x}, t) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p \right), \quad \mathcal{K} = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}.$$

Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна в слаборелятивистском по гравитации случае

Перейдём к анализу в слаборелятивистском приближении общего действия S_4^L (с дополнительным учётом космологического Λ -члена), для чего перепишем формулу (7) (а впоследствии и (8)), заменяя члены, содержащие компоненты метрического тензора $g^{\mu\nu}$ и $\det g_{\mu\nu} \equiv g$ их приближенными постньютоновскими выражениями, как сделано выше:

$$S_7^L = \sum_{a,q} \frac{m_a}{2} \dot{\mathbf{x}}_a^2(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} - \sum_{a,q} m_a U(\mathbf{x}_a(\mathbf{q}, t)) d\mathbf{q} - \\ - \iint \frac{1}{8\pi\gamma c} (\nabla U)^2 d^3 x d\mathbf{q} - \iint \frac{c^3}{16\pi\gamma} \Lambda d^3 x d\mathbf{q} + \iint \frac{c\Lambda}{8\pi\gamma} U d^3 x d\mathbf{q} - \\ - \sum_a \frac{e_a}{c^2} \sum_q \int_0^T A_\mu V_a^\mu |g|^{1/2} d\mathbf{q} + \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} |g|^{1/2} d^4 X, \\ V_a^0 = -m_a^{-1} g^{0\zeta} (P_\zeta)_a, \quad V_a^j = -m_a^{-1} g^{jk} (P_k)_a, \\ g^{\zeta\eta} \approx \text{diag} \left(1 + \frac{2U}{c^2}, -\left(1 - \frac{2U}{c^2} \right), -\left(1 - \frac{2U}{c^2} \right), -\left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) \right), \quad |g|^{1/2} \approx 1 - \frac{2U}{c^2}.$$

Здесь мы взяли слаборелятивистскую метрику по «Фоку» [2]. Она отличается от слаборелятивистской метрики «по Ландау» [1; 3]:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1 - 2U/c^2, -1, -1, -1), \text{ где } |g|^{1/2} \approx 1 - U/c^2.$$

Варьируя по координатам частиц, получаем уравнение движения (3-х мерной динамики) в заданных полях (с точностью до c^{-2}):

$$\frac{dp_{ai}}{dt} = m_a (\ddot{x}_a)_i = -m_a \frac{\partial U}{\partial x_a^i} - \frac{e_a}{c} \left(\dot{A}_i + c \frac{\partial A_0}{\partial x_a^i} + \sum_j F_{ij} \dot{x}_a^j \right).$$

Переходя к функции распределения, получим соответствующую систему уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна в постньютоновском (по гравитации) приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{p_i}{m_a}, \frac{\partial f_a}{\partial x^i} \right) + \sum_i \frac{e_a}{c} \left(\left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - c \frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \sum_j F_{ij} \frac{p_j}{m_a} \right), \frac{\partial f_a}{\partial p_i} \right) - \\ - \sum_i \left(\nabla U_i, \frac{\partial f_a}{\partial p_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы выписать уравнение для полей, перепишем действие S_6^L , переходя к эйлеровскому представлению для второго и пятого слагаемых правой части формулы, определяющей данное действие (то есть для членов, которые могут выражаться через функцию распределения частиц):

$$\begin{aligned} S_7^{L+E} = \sum_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 x d^3 p d^3 t - \sum_a m_a \int U(\mathbf{x}, t) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 x d^3 p d^3 t - \\ - \frac{c^3}{16\pi\gamma} \int \Lambda d^3 x d^3 t + \frac{\Lambda c}{8\pi\gamma} \int U d^3 x d^3 t - \sum_a \frac{e_a}{m_a c^2} \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \sum_{j=1}^3 p_j A_j(\mathbf{x}, t) d^3 x d^3 p d^3 t + \\ + \sum_a \frac{e_a}{m_a c^2} \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \left(P_0 \left(1 - \frac{4U}{c^2} \right) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) d^3 x d^3 p d^3 t + \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) d^3 x d^3 t, \end{aligned}$$

(здесь $\varphi(\mathbf{x}, t) \equiv A_0(\mathbf{x}, t)$).

Отсюда непосредственно можно получить выражение для «космологического параметра» $\Lambda'(\mathbf{x}, t)$ в используемом приближении:

$$\begin{aligned} \Lambda' = \left[\sum_a \frac{1}{2m_a} \int \mathbf{p}^2 f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p - \sum_a U(\mathbf{x}, t) \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p - \right. \\ \left. - \sum_a \frac{e_a}{m_a c^2} \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \sum_{j=1}^3 p_j A_j(\mathbf{x}, t) d^3 p + \right. \\ \left. + \sum_a \frac{e_a}{m_a c^2} \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \left(P_0 \left(1 - \frac{4U}{c^2} \right) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) d^3 p + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) \left[\left(\frac{cU}{8\pi\gamma} - \frac{c^3}{16\pi\gamma} \right)^{-1} \right].$$

Отметим, что в вышеприведённых формулах мы использовали выражение скорости через импульсы в виде: $V_a^\zeta = -m_a^{-1} g^{\zeta\eta} (P_\eta)_a$, где $(P_\eta)_a = \partial \tilde{L}_p / \partial V_a^\eta$, где

$$\tilde{L}_p = -\frac{m_a}{2} g_{\eta\zeta} V_a^\eta V_a^\zeta - \text{упрощённый лагранжиан, приводящий к тем же геодезическим, что и исходный } L_p \text{ (фактически, здесь использована возможность введения для системы частиц в постньютоновском приближении единого времени).}$$

При варьировании по U получаем:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 4\pi\gamma \sum_a \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p - \frac{c^2 \Lambda}{2} + \\ &+ 8\pi\gamma \sum_a e_a \phi \int f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \frac{P_0}{m_a c^2} d^3 p - \frac{\gamma}{2c^2} F_{ik} F^{ik}. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение Власова (13) следует рассматривать совместно с уравнением (14) для U и уравнениями Максвелла для полей:

$$\partial_i F^{ji} = -\frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int v_a^j(\mathbf{p}) f_a(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 p.$$

Это и есть система уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна в слаборелятивистском приближении. Особый интерес представляет уравнение (14): первое слагаемое в правой части, очевидно, представляет собой величину плотности вещества, состоящего из частиц сортов a , второе слагаемое – классический Λ -член, который в настоящее время олицетворяет тёмную энергию, третье слагаемое – электромагнитная энергия (которая может быть переписана в виде, пропорциональном $(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$).

Итак, мы получили выражения, аналогичные Λ -члену, из принципа наименьшего действия, как в самих действиях, так и в уравнениях.

Заключение

Мы предложили способ вывода уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна и сравнили эти уравнения с нерелятивистскими и слаборелятивистскими аналогами, находя и проверяя константы как для действий, так и для уравнений, а также проверяя сами уравнения. Уравнения Власова-Эйнштейна ранее выписывались в разных формах [15–23; 31–35], поэтому их вывод из классических действий совершенно необходим. При этом выводе автоматически получались выражения, похожие на Λ -член. Анализ этих выражений, как количественный, так и качественный, представляет значительный интерес в связи с природой тёмной материи и тёмной энергии [4; 5; 49]. При этом здесь должны помочь частные решения уравнений типа Власова – стационарные, гидродинамического типа и микрочанонические [29; 46]. Особый интерес представляет вопрос о росте эн-

тропии и о совпадении временных средних и экстремалей Больцмана для уравнений типа Власова, как это имеет место для уравнений Лиувилля [27; 46–48].

Мы также в настоящей статье рассмотрели способ вывода уравнений типа Власова в слаборелятивистской форме, где такие слагаемые, отвечающие за тёмную материю и тёмную энергию, обретают явную форму. Дальнейшее исследование требует изучения частных решений, которые могут быть аналогичны рассмотренным в работах [7–48].

Здесь представляет интерес исследовать модели фридмановского типа однородной вселенной [1–7], стационарные [25–30], микроскопические [7–28] и гидродинамические [7–28; 43–45] решения. Интерес представляет вопрос об агрегации материи [42] во Вселенной, насколько эти процессы влияют на формирование тёмной энергии и темной материи. Интерес представляют работы по изучению автомодельных решений – насколько именно такие решения соответствуют крупномасштабным процессам во Вселенной [49].

Мы предложили выражение для Λ -члена, анализ которого даёт представление как о тёмной энергии, так и о тёмной материи: заряженные частицы с массой, меньшей $m_e \sqrt{D_1}$ дают вклад в тёмную энергию (m_e – масса электрона, D_1 – первая большая константа Дирака).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности РУДН 5-100 среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг. и при поддержке программы Президиума РАН № 01 «Фундаментальная математика и ее приложения», грант PRAS-18-01 (В. В. Веденяпин), при поддержке Программы Президиума РАН № 28 «Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей» (В. М. Чечеткин) и гранта РФФИ № 16-02-00656-А (Н. Н. Фимин).

ACKNOWLEDGMENTS

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Enhancing the Competitiveness of RUDN 5-100 Among the World's Leading Scientific and Educational Centers for 2016–2020 Program), by the Presidium of the Russian Academy of Sciences [Fundamental Mathematics and Its Applications Program No. 01, Grant No. PRAS-18-01 (V. V. Vedenyapin)], the Presidium of the Russian Academy of Sciences [Space: Studies of Fundamental Processes and Their Interrelations Program No. 28 (V. M. Chechetkin)], and by the Russian Foundation for Basic Research [Grant No. 16-02-00656-A (N. N. Fimin)].

Статья поступила в редакцию 26.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983. 328 с.
2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1956. 504 с.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 736 с.
4. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
5. Лукаш В. Н., Рубаков В. А. Темная энергия: мифы и реальность // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 301–308.
6. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. 351 с.
7. Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 112 с.
8. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
9. Власов А. А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
10. Негматов М. А., Веденяпин В. В. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тожество Лагранжа и форма Годунова. // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
11. Веденяпин В. В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н. Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Известия Российской академии наук. Серия математика. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
12. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations. Amsterdam: Elsevier Insights, 2011 304 p.
13. O'Neill E. Hamiltonian structure and stability of relativistic gravitational theories: Dissertation for degree D. Ph. University of Florida, 2000.
14. Kandrup H. E., Morrison P. J. Hamiltonian structure of the Vlasov-Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Annals of Physics. 1993. Vol. 225. Iss. 1. P. 114–166.
15. Zeldovich Ya. B., Novikov I. D. Relativistic astrophysics. Vol. 1. Chicago: University of Chicago, 1971. 540 p.
16. Cercignani C., Kremer G. M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Basel: Birkhauser, 2002. 384 p.
17. Choquet-Bruhat Y. General relativity and the Einstein equations. Oxford: Oxford University Press, 2009. 816 p.
18. Ehlers J. Kinetic theory of gases in general relativity theory // Lecture Notes in Physics. 1974. Vol. 28: Lectures in Statistical Physics. P. 78–105.
19. Droz-Vincent Ph., Hakim R. Collective motions of the relativistic gravitational gas // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Physique théorique. 1968. Vol. 9. No. 1. P. 17–33.
20. Lindquist R. W. Relativistic transport theory // Annals of Physics. 1966. Vol. 37. Iss. 3. P. 487–518.
21. Choquet-Bruhat Y., Damour T. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015. 320 p.
22. Batt J. Global symmetric solutions of the initial value problem in stellar dynamics // Journal of Different Equations. 1977. Vol. 25. No. 3. P. 342–364.
23. Rein G., Rendall A.D. Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Physique Théorique. 1993. Vol. 59. No. 4. P. 383–397.
24. Волков Ю. А. О решениях уравнения Власова в лагранжевых координатах // Теоретическая и математическая физика. 2007. Т. 191. № 1. С. 138–148.

25. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Негматов М. А. Уравнения Лиувилля и Власова. Их микроскопические и гидродинамические следствия. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. 52 с.
26. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 5–17.
27. Веденяпин В. В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2018. № 188. С. 1–20.
28. Narlikar J. V. An introduction to cosmology (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 560 p.
29. Веденяпин В. В. О стационарных решениях уравнения Власова-Пуассона // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 777–780.
30. Веденяпин В. В. О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача // Доклады АН СССР. 1992. Т. 323. № 6. С. 1004–1006.
31. Huanchun Ye, Morrison Ph. Action principles for the Vlasov equations // Physics of Fluids B: Plasma Physics. 1992. Vol. 4. No. 4. P. 771–777.
32. Игнатьев Ю. Г. Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов. Казань: ООО “Фолиант”, 2010. 523 с.
33. Игнатьев Ю. Г. Вывод кинетических уравнений из общерелятивистской цепочки Боголюбова // Всесоюзная конференция «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации»: тезисы докладов. Минск: БГУ, 1976. С. 146–148.
34. Munoz J. B., Loeb A. A small amount of mini-charged dark matter could cool the baryons in the early Universe // Nature. 2018. Vol. 557. Iss. 7707. P. 684–686.
35. Brans C., Dicke R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation // Physical Review. 1961. Vol. 124. Iss. 3. P. 925–935.
36. Мейерович Б. Э. Гравитационные свойства космических струн // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 10. С. 1033–1049.
37. Kibble T. W. B. Lorentz invariance and gravitational field // Journal of Mathematical Physics. 1961. Vol. 2. Iss. 2. P. 212–221.
38. Choquet-Bruhat Y. Noutcheguenne N. Systeme hyperbolique pour les equations d'Einstein avec sources // Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I. 1986. Vol. 303. No. 6. P. 259–263.
39. Orlov Yu. N., Pavlotsky I. P. BBGKY-hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean approximation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1988. Vol. 151. Iss. 2–3. P. 318–340.
40. Скубачевский А. Л., Тсузуки Ю. Уравнения Власова-Пуассона для двухкомпонентной плазмы в полупространстве // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471. № 5. С. 528–530.
41. Веденяпин В. В., Аджиев С. З., Казанцева В. В. Энтропия по Больцману и Пуанкаре, экстремали Больцмана и метод Гамильтона-Якоби в негамильтоновой ситуации // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64. № 1. С. 37–59.
42. Аджиев С. З., Веденяпин В. В., Волков Ю. А., Мелихов И. В. Обобщенные уравнения типа Больцмана для агрегации в газе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 12. С. 2065–2078.
43. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона-Якоби // Доклады Академии наук. 2012. Т. 446. № 2. С. 142–144.
44. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О топологии гидродинамических и вихревых следствий уравнений Власова и метод Гамильтона-Якоби // Доклады Академии наук. 2013. Т. 449. № 5. С. 521–526.

45. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // Успехи физических наук. 1997. Т. 167. № 12. С. 1137–1167.
46. Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали по Больцману // Доклады Академии наук. 2008. Т. 422. № 2. С. 161–163.
47. Аджиев С. З., Веденяпин В. В. Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.
48. Веденяпин В. В., Аджиев С. З. Энтропия по Больцману и Пуанкаре // Успехи математических наук. 2014. Т. 69. № 6 (420). С. 45–80.
49. Валиев Х. Ф., Крайко А. Н. Разлет идеального газа из точки в пустоту. Новая модель большого взрыва и расширения вселенной // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 6. С. 793–807.

REFERENCES

1. Pauli W. Theory of relativity. New York, Dover Books, 1981. 272 p.
2. Fock V. A. Theory of space, time and gravitation. London, Pergamon press, 1956. 448 p.
3. Landau L. D., Lifshits E. M. The classical theory of fields. Oxford, Pergamon Press, 1971. 374 p.
4. Chernin A. D. [Dark energy and universal antigravitation]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 2008, vol. 178, no. 3, pp. 267–300.
5. Lukash V. N., Rubakov V. A. [Dark energy: Myths and reality]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 2008, vol. 178, no. 3, pp. 301–308.
6. Zel'dovich Ya. B., Myshkis A. D. *Elementy matematicheskoi fiziki* [Elements of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 351 p.
7. Vedenyapin V. V. *Kineticheskie uravneniya Bol'tsmana i Vlasova* [Kinetic equations of Boltzmann and Vlasov]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 112 p.
8. Dubrovina B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* [Modern geometry. Methods and applications]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 760 p.
9. Vlasov A. A. *Statisticheskie funktsii raspredeleniya* [Statistical distribution functions]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 356 p.
10. Negmatov M. A., Vedenyapin V. V. [Derivation and classification of Vlasov-type and magnetohydrodynamics equations: Lagrange identity and Godunov's form]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2012, vol. 170, no. 3, pp. 468–480.
11. Vedenyapin V. V., Negmatov M. B. A., Fomin N. N. [Vlasov-type and Liouville-type equations, their microscopic, energetic and hydrodynamical consequences]. In: *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Seriya matematika* [Izvestiya: Mathematics], 2017, vol. 81, no. 3, pp. 45–82.
12. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann, Vlasov and related equations. Amsterdam, Elsevier Insights Publ., 2011 304 p.
13. O'Neill E. Hamiltonian structure and stability of relativistic gravitational theories: Dissertation for degree D. Ph. University of Florida, 2000.
14. Kandrup H. E., Morrison P. J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters. In: *Annals of Physics*, 1993, vol. 225, iss. 1, pp. 114–166.
15. Zel'dovich Ya. B., Novikov I. D. Relativistic astrophysics. Vol. 1. Chicago, Univesity of Chicago Publ., 1971. 540 p.

16. Cercignani C., Kremer G. M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Basel, Birkhauser Publ., 2002. 384 p.
17. Choquet-Bruhat Y. General relativity and the Einstein equations. Oxford, Oxford University Press Publ., 2009. 816 p.
18. Ehlers J. Kinetic theory of gases in general relativity theory. In: *Lecture Notes in Physics*, 1974, vol. 28: Lectures in Statistical Physics, pp. 78–105.
19. Droz-Vincent Ph., Hakim R. Collective motions of the relativistic gravitational gas. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Physique théorique*, 1968, vol. 9, no. 1, pp. 17–33.
20. Lindquist R. W. Relativistic transport theory. In: *Annals of Physics*, 1966, vol. 37, iss. 3, pp. 487–518.
21. Choquet-Bruhat Y., Damour T. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York, Oxford University Press Publ., 2015. 320 p.
22. Batt J. Global symmetric solutions of the initial value problem in stellar dynamics. In: *Journal of Different Equations*, 1977, vol. 25, no. 3, pp. 342–364.
23. Rein G., Rendall A.D. Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Physique Théorique*, 1993, vol. 59, no. 4, pp. 383–397.
24. Volkov Yu. A. [Solutions of the Vlasov equation in Lagrange coordinates]. In: *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 2007. T. 151, no. 1, pp. 138–148.
25. Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Negmatov M. A. *Uravneniya Liuvillya i Vlasova. Ikh mikroskopicheskie i gidrodinamicheskie sledstviya* [Liouville and Vlasov equations. Their microscopic and hydrodynamic effects]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Publ., 2016. 52 p.
26. Vedenyapin V. V., Negmatov M. A. [On derivation and classification of Vlasov-type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass]. In: *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Journal of Mathematical Sciences], 2013, vol. 47, pp. 5–17.
27. Vedenyapin V. V. [Vlasov–Maxwell–Einstein equation]. In: *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha RAN* [Keldysh Institute. Preprints], 2018, no. 188, pp. 1–20.
28. Narlikar J. V. An introduction to cosmology (3rd ed.). Cambridge, Cambridge University Press Publ., 2002. 560 p.
29. Vedenyapin V. V. [On stationary solutions of the Vlasov–Poisson equation]. In: *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics. Doklady], 1986, vol. 290, no. 4, pp. 777–780.
30. Vedenyapin V. V. [On the classification of stationary solutions of the Vlasov equation on a torus and the boundary problem]. In: *Doklady AN SSSR* [Soviet Mathematics. Doklady], 1992, vol. 323, no. 6, pp. 1004–1006.
31. Huanchun Ye, Morrison Ph. Action principles for the Vlasov equations. In: *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1992, vol. 4, no. 4, pp. 771–777.
32. Ignat'ev Yu. G. *Relyativistskaya kineticheskaya teoriya neravnovesnykh protsessov* [Relativistic kinetic theory of nonequilibrium processes]. Kazan, Foliant Publ., 2010. 523 p.
33. Ignat'ev Yu. G. [Derivation of kinetic equations from the general relativistic Bogolyubov chain]. In: *Vsesoyuznaya konferentsiya 'Sovremennye teoreticheskie i eksperimental'nye problemy teorii otnositel'nosti i gravitatsii': tezisy dokladov* [All-Union Conference “Modern theoretical and experimental problems of the theory of relativity and gravity”: abstracts of reports]. Minsk, Belorussian State University Publ., 1976. pp. 146–148.

34. Munoz J. B., Loeb A. A small amount of mini-charged dark matter could cool the baryons in the early Universe. In: *Nature*, 2018, vol. 557, iss. 7707, pp. 684–686.
35. Brans C., Dicke R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. In: *Physical Review*, 1961, vol. 124, iss. 3, pp. 925–935.
36. Meierovich B. E. [Gravitational properties of cosmic strings]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 2001, vol. 171, no. 10, pp. 1033–1049.
37. Kibble T. W. B. Lorentz invariance and gravitational field. In: *Journal of Mathematical Physics*, 1961, vol. 2, iss. 2, pp. 212–221.
38. Choquet-Bruhat Y. Noutcheguenne N. Systeme hyperbolique pour les equations d'Einstein avec sources. In: *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1*, 1986, vol. 303, no. 6, pp. 259–263.
39. Orlov Yu. N., Pavlotsky I. P. BBGKY-hierarchies and Vlasov's equations in post-Galilean approximation. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1988, vol. 151, iss. 2–3, pp. 318–340.
40. Skubachevskii A. L., Tsuzuki Yr. [Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a half-space]. In: *Doklady akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2016, vol. 471, no. 5, pp. 528–530.
41. Vedenyapin V. V., Adzhiev C. Z., Kazantseva V. V. [Entropy in the sense of Boltzmann and Poincare, Boltzmann extremals, and the Hamilton–Jacobi method in non-Hamiltonian context]. In: *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions], 2018, vol. 64, no. 1, pp. 37–59.
42. Adzhiev S. Z., Vedenyapin V. V., Volkov Yu. A., Melikhov I. V. [Generalized Boltzmann-type equations for aggregation in gases]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2017, vol. 57, no. 12, pp. 2065–2078.
43. Vedenyapin V. V., Fimin N. N. [The Liouville equation, hydrodynamic substitution and the Hamilton–Jacobi equation]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2012, vol. 446, no. 2, pp. 142–144.
44. Vedenyapin V. V., Negmatov M. A. [On the topology of steady-state solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2013, vol. 449, no. 5, pp. 521–526.
45. Zakharov V. E., Kuznetsov E. A. [Hamiltonensis formalism for nonlinear waves]. In: *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)], 1997, vol. 167, no. 12, pp. 1137–1167.
46. Vedenyapin V. V. [Temporary averages and Boltzmann extremals]. In: *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2008, vol. 422, no. 2, pp. 161–163.
47. Adzhiev S. Z., Vedenyapin V. V. [Time averages and Boltzmann extremals for Markov chains, discrete Liouville equations, and the Kac circular model]. In: *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2011, vol. 51, no. 11, pp. 2063–2074.
48. Vedenyapin V. V., Adzhiev S. Z. [Entropy in the sense of Boltzmann and Poincaré]. In: *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 2014, vol. 69, no. 6 (420), pp. 45–80.
49. Valiev Kh. F., Kraiko A. N. [The dispersion of an ideal gas from a point into a void. A new model of the Big Bang and the expansion of the Universe]. In: *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2015, vol. 79, no. 6, pp. 793–807.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Веденяпин Виктор Валентинович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук, профессор Российского университета дружбы народов;
e-mail: vicveden@yahoo.com;

Фимин Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук;
e-mail: oberon@kiam.ru;

Чечеткин Валерий Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской Академии наук;
e-mail: chechetv@gmail.com.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Victor V. Vedenyapin – Doctor in physical and mathematical sciences, leading scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Professor of the RUDN University;
e-mail: vicveden@yahoo.com;

Nikolai N. Fimin – PhD in physical and mathematical sciences, senior scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: oberon@kiam.ru;

Valeriy M. Chechetkin – Doctor in physical and mathematical sciences, main scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences;
e-mail: chechetv@gmail.com

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Чечеткин В. М. К вопросу о выводе уравнения Власова–Максвелла–Эйнштейна и его связь с космологическим лямбда-членом // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 2. С. 24–48.

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-24-48

FOR CITATION

Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. Derivation of Vlasov–Maxwell–Einstein equation and its connection with cosmological lambda term In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 24–48.

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-24-48