УДК 537.311.31

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-49-60

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ В СЛУЧАЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ И ИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Романов Д. Н.*Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, Российская Федерация*

Аннотация. Целью статьи является получение аналитического выражения для высокочастотной электропроводности тонкой металлической проволоки с диэлектрическим ядром в случае диффузного характера взаимодействия электронов металла с границами проводящего слоя. Проведён анализ зависимости модуля и аргумента электрической проводимости от соотношения радиусов проволоки и диэлектрического ядра, от эффективной массы вдоль прямой, перпендикулярной оси проволоки, от радиуса проволоки, от частоты электрического поля. Данный анализ показал влияние эффективной массы носителей заряда и границ металлического слоя на его электропроводность. Кинетическая задача обобщена на случай эллипсоидальной поверхности Ферми металлического слоя, что является естественным обобщением более простой и часто используемой при описании явлений переноса модели сферической поверхности Ферми. Статья адресована проектировщикам элементов интегральных схем с заданными параметрами.

Ключевые слова: функция распределения, уравнение Больцмана, электропроводность, тонкая неоднородная проволока, эллипсоидальная поверхность Ферми, диффузные граничные условия, изотропное рассеяние электронов.

ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF AN INHOMOGENEOUS THIN METAL WIRE IN THE CASE OF AN ANISOTROPIC FERMI SURFACE AND ISOTROPIC ELECTRON SCATTERING

D. Romanov*P. G. Demidov Yaroslavl State University
ul. Sovetskaya 14, 150000 Yaroslavl, Russian Federation*

Abstract. We have derived an analytical expression for high-frequency electrical conductivity of a thin metal wire with a dielectric core in the case of the diffuse interaction of metal electrons with the boundaries of the conductive layer. We have analyzed the dependence of the modulus and the argument of electrical conductivity on the ratio of the radii of the wire and the dielectric core, on the effective mass along a straight line perpendicular to the axis of the wire, on the radius of the wire, and on the electric field frequency. The analysis has shown that the effective mass of charge carriers and the boundaries of the metal layer influence its electrical conductivity. The kinetic problem has been generalized to the case of an ellipsoidal Fermi surface of a metal layer,

which is a natural generalization of a simpler and more frequently used model of a spherical Fermi surface in the description of transport phenomena. The paper is addressed to designers of integrated circuit elements with specified parameters.

Keywords: *distribution* function, Boltzmann equation, electrical conductivity, thin inhomogeneous wire, ellipsoidal Fermi surface, diffuse boundary conditions, isotropic electron scattering.

Введение

Электропроводность проводящих тел, характерный линейный размер которых сравним с длиной свободного пробега носителей заряда λ , зависит от механизма поверхностного рассеяния [1]. Вклад поверхностного рассеяния электронов проводимости приводит к росту сопротивления металлического провода. Высокое электрическое сопротивление сопровождается нагревом образца при протекании тока и, как следствие, приводит к электромиграции атомов металла, что быстрее выводит приборы из строя. В классической работе [1] выявлена следующая закономерность: чем выше длина свободного пробега носителей заряда, тем быстрее возрастает сопротивление проволоки при снижении её диаметра. В работе [2] показаны потенциальные кандидаты для замены меди в тонких соединительных проводах, которые имеют меньшую длину свободного пробега по сравнению с медью.

Поверхность тонких металлических проводов, диаметр которых сравним с длиной свободного пробега электронов проводимости, оказывает существенную роль на транспорт свободных носителей заряда. Влияние поверхности может привести к искривлению поверхности Ферми [3]. В ряде случаев изоэнергетическую поверхность металла можно рассматривать как трёхосный эллипсоид [4], что является естественным обобщением более простой и часто используемой при описании явлений переноса модели сферической поверхности Ферми. Систематического изучения процессов переноса в случае эллипсоидальной поверхности Ферми для таких систем как тонкие пленки и проволоки до сих пор не проводилось.

Электропроводность металлической проволоки разных сечений рассчитана в работах [5] и [6]. Расчет высокочастотной электропроводимости тонкой полупроводниковой проволоки круглого сечения проведен в работе [7]. В упомянутых работах используется модель Фукса [8] для кинетического уравнения Больцмана. Модель Соффера [9] применялась в работе [10] в расчёте высокочастотной электропроводности тонкой цилиндрической проволоки. Выражение для электропроводности тонкого цилиндрического металлического провода получено в [11] с помощью модели Маядаса и Шацкеса [12] с учётом поликристаллического строения. Квантовая теория влияния поверхности на движение электронов в металлической плёнке описана в работе [13].

В настоящей работе проведён расчёт высокочастотной электропроводности тонкой неоднородной металлической проволоки с анизотропной поверхности Ферми без учёта механизма рассеяния в объёме (время релаксации не зависит

от энергии). На границе цилиндрического слоя заданы диффузные граничные условия.

Постановка задачи

В данной работе исследуется металлическая цилиндрическая проволока длиной L . Внутри проводящей проволоки находится диэлектрическая проволока радиусом R_1 , ось которой совпадает с осью металлической проволоки с внешним радиусом R_2 , причём $L \gg R_2$. Проволока находится во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$, направленном вдоль оси проволоки и изменяющимся с частотой ω . Частота поля позволяет пренебречь скин-эффектом.

Однородное электрическое поле меняется по следующему гармоническому закону:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Для равновесной функции Ферми-Дирака f_0 электронов проводимости в металле используем ступенчатую аппроксимацию:

$$f_0 = \begin{cases} 1, & \varepsilon < \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_F, \end{cases}$$

где ε и ε_F – это энергия квазичастицы и энергия Ферми-поверхности, соответственно.

В случае слабого внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ (1) неравновесную функцию распределения f можно представить следующим образом:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t),$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ – соответственно скорость и радиус-вектор квазичастицы.

Уравнение Больцмана в приближении времени релаксации и линейном приближении имеет вид:

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v} \mathbf{E}) \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (2)$$

Время релаксации τ в металле не зависит ни от направления, ни от скорости носителей заряда (пренебрегаем механизмом рассеяния).

Ось тонкой проволоки совпадает с осью Z ; соответственно две другие оси (X , Y) направлены перпендикулярно боковой поверхности. В данной работе поверхность Ферми – трёхосный эллипсоид, главные оси которого совпадают с координатными осями, поэтому энергия электронов проводимости определяется следующим образом [4]:

$$\varepsilon = \frac{m_1 v_x^2}{2} + \frac{m_2 v_y^2}{2} + \frac{m_3 v_z^2}{2},$$

где m_1 , m_2 , m_3 – эффективные массы квазичастицы вдоль осей X , Y и Z соответственно.

Плотность тока $\mathbf{j}$ равна:

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle = e \int \mathbf{v} f \frac{2d^3(mv)}{h^3} = 2e \frac{m_1 m_2 m_3}{h^3} \int \mathbf{v} f_1 d^3 v \quad (3)$$

с учётом концентрации n в виде:

$$n = 2 \frac{m_1 m_2 m_3}{h^3} \int f_0 d^3 v = \frac{8\pi}{3} \frac{\sqrt{m_1 m_2 m_3}}{h^3} (2\varepsilon_F)^{3/2}. \quad (4)$$

В качестве граничных условий для уравнения (2) примем модель диффузного рассеяния [8]:

$$f_{11}(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0 \text{ при } |\mathbf{r}_\perp| = R_1, \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp > 0,$$

$$f_{12}(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0 \text{ при } |\mathbf{r}_\perp| = R_2, \mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp < 0,$$

где $\mathbf{v}_\perp$ и $\mathbf{r}_\perp$ – соответственно поперечные компоненты скорости и радиус-вектора электрона проводимости.

Расчёт проводимости

Решение кинетического уравнения (2) получим методом характеристик, который описан в работе [14]:

$$f_1(\tilde{t}) = -\frac{e(\mathbf{v}\mathbf{E})}{v} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (1 - \exp(-v\tilde{t})), \quad (5)$$

где $\nu = 1/\tau - i\omega$. Эту величину в дальнейшем будем называть комплексной частотой рассеяния.

Параметр $\tilde{t}$ зависит от точки отражения следующим образом:

$$\tilde{t} = \tilde{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp - \sqrt{(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_1^2 - r_\perp^2) v_\perp^2}}{v_\perp^2}, \quad r_\perp = R_1;$$

$$\tilde{t} = \tilde{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp + \sqrt{(\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}_\perp)^2 + (R_2^2 - r_\perp^2) v_\perp^2}}{v_\perp^2}, \quad r_\perp = R_2.$$

Найденные функции распределения позволяют рассчитать плотность тока (3) внутри проволоки. Связь плотности тока $\mathbf{j}$ с напряжённостью $\mathbf{E}$ определяется локальным законом Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где σ – удельная электропроводность.

Опуская дальнейшее вычисление удельной электропроводности σ , напомним для неё сразу ответ

$$\sigma = \sigma_0 \Sigma(x_0, y_0, k_{m1}, k_{m2}, K), \quad \sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m_0},$$

$$\Sigma(x_0, y_0, k_{m1}, k_{m2}, K) = \frac{x_0 k_{m1} k_{m2}}{z_0} \left(1 - \frac{6\sqrt{k_{m1} k_{m2}}}{\pi(1-K^2)} \int_K^1 \xi d\xi \times \right. \\ \times \left\{ \int_{\alpha_0}^{\pi} \int_0^{\sqrt{\mu_0}} \rho \exp\left(-\frac{z_0 \Psi}{\rho}\right) \sqrt{1-\rho^2 \mu_0} d\rho d\alpha + \right. \\ \left. + \int_0^{\alpha_0} \int_0^{\sqrt{\mu_0}} \rho \exp\left(-\frac{z_0 \eta}{\rho}\right) \sqrt{1-\rho^2 \mu_0} d\rho d\alpha \right\} \right), \quad (6)$$

$$m_0 = \sqrt[3]{m_1 m_2 m_3}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m_0}},$$

$$k_{m1} = \frac{m_1}{m_0}, \quad k_{m2} = \frac{m_2}{m_0}, \quad k_{m3} = \frac{m_3}{m_0},$$

$$\mu_0 = k_{m1} \cos^2 \alpha + k_{m2} \sin^2 \alpha,$$

$$x_0 = \frac{R_2}{\lambda}, \quad y_0 = \frac{\omega R_2}{v_0}, \quad z_0 = \frac{v R_2}{v_0} = x_0 - i y_0,$$

$$\xi = \frac{r_{\perp}}{R_2}, \quad \rho = \frac{v_{\perp}}{v_0}, \quad K = \frac{R_1}{R_2}, \quad \alpha_0 = \arccos\left(1 - \frac{K^2}{\xi^2}\right)^{1/2},$$

$$\tilde{t}_1 = \frac{R_2}{v_{\perp}} \eta, \quad \tilde{t}_2 = \frac{R_2}{v_{\perp}} \Psi,$$

$$\eta = \xi \cos \alpha - \sqrt{K^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}, \quad \Psi = \xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}.$$

Здесь k_{m1}, k_{m2}, k_{m3} , – безразмерные эффективные массы вдоль осей X, Y, Z соответственно; v_0 – эффективная скорость Ферми; x_0 – безразмерный радиус проволоки; y_0 – безразмерная частота электрического поля; $\lambda = v_0 \tau$ – длина свободного пробега электронов проводимости, Σ – безразмерная электропроводность.

Отдельно стоит отметить взаимосвязь параметров эллиптичности: так как $m_0 = \sqrt[3]{m_1 m_2 m_3}$, то $k_{m1} k_{m2} k_{m3} = 1$, поэтому $k_{m3} = 1/k_{m1} k_{m2}$. Также при изменении параметров эллиптичности предполагается постоянство концентрации свободных носителей заряда (4), следовательно, $m_1 m_2 m_3 = \text{const}$, $m_0 = \text{const}$, а $k_{m1} \propto m_1$, $k_{m2} \propto m_2$, $k_{m3} \propto m_3$.

Для толстой плёнки $x_0 \gg 1$ (макроскопическая асимптотика) получается формула Друде:

$$\Sigma = \frac{x_0 k_{m1} k_{m2}}{z_0} = \frac{x_0}{z_0 k_{m3}}, \quad (7)$$

$$\sigma = \sigma_0 \Sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_0} \frac{x_0}{z_0 k_{m3}} = \frac{ne^2 \tau}{m_3 (1 - i\omega \tau)}. \quad (8)$$

При $y_0 \gg 1$ (высокие частоты) экспоненты в выражении (6) сильно осциллируют. Непосредственно пренебречь этими экспонентами нельзя, но интегралы от них будут малы из-за быстрой осцилляции подынтегральных выражений. Поэтому в случае высоких частот электропроводность определяется выражениями (7) и (8).

В классическом случае (7, 8) электропроводность не зависит ни от коэффициента зеркальности поверхности проволоки, ни от соотношения радиусов между диэлектрическим ядром и металлической проволокой.

Если симметрия металла такова, что эффективные массы вдоль оси X и Y равны, то поверхность Ферми принимает форму эллипсоида вращения, у которой ось вращения совпадает с осью Z , причём $m_{\perp} = m_1 = m_2$ – поперечная эффективная масса, $m_{\parallel} = m_3$ – продольная эффективная масса. Тогда безразмерная электропроводность Σ (6) примет вид:

$$\Sigma(x_0, y_0, k_{\perp}, K) = \frac{x_0 k_{\perp}^2}{z_0} \left(1 - \frac{6k_{\perp}}{\pi(1-K^2)} \int_K^1 \xi d\xi \int_0^{1/\sqrt{k_{\perp}}} \rho \sqrt{1-\rho^2 k_{\perp}} d\rho \times \right. \\ \left. \times \left\{ \int_{\alpha_0}^{\pi} \exp\left(-\frac{z_0 \Psi}{\rho}\right) d\alpha + \int_0^{\alpha_0} \exp\left(-\frac{z_0 \eta}{\rho}\right) d\alpha \right\} \right),$$

где $k_{\perp} = m_{\perp} = m_0$ – безразмерная поперечная эффективная масса.

В предельном случае сферической поверхности Ферми ($k_{m1} = k_{m2} = 1$) полученные выражения переходят в результаты работы [14].

Для однородной проволоки ($K = 0$, $\alpha_0 = 0$):

$$\Sigma(x_0, y_0, k_{m1}, k_{m2}) = \frac{x_0 k_{m1} k_{m2}}{z_0} \left(1 - \frac{6\sqrt{k_{m1} k_{m2}}}{\pi} \int_0^1 \xi d\xi \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\pi^{1/\sqrt{\mu_0}}} \int_0^{\pi^{1/\sqrt{\mu_0}}} \rho \exp\left(-\frac{z_0 \Psi}{\rho}\right) \sqrt{1-\rho^2 \mu_0} d\rho d\alpha \right).$$

Анализ результатов

На рис. 1а и 1б изображены зависимости модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от параметра $K = R_1/R_2$, соответственно.

Рис. 1а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от параметра $K = R_1/R_2$ при $x_0 = 0,1$, $y_0 = 0,1$.

Кривые 1 – $k_{m1} = 0,12$, $k_{m2} = 0,15$;
2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Рис. 1б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от параметра $K = R_1/R_2$ при $x_0 = 0,1$, $y_0 = 0,1$.

Кривые 1 – $k_{m1} = 0,12$, $k_{m2} = 0,15$;
2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Кривая 2 соответствует случаю сферической поверхности Ферми ($k_{m1} = k_{m2} = 1$). Рост радиуса диэлектрического ядра R_1 проволоки, или уменьшение параметра K , сопровождается увеличением вклада поверхностного рассеяния по сравнению с объемным рассеянием и его возрастающим влиянием на проводимость, что приводит к снижению модуля и аргумента проводимости. В случае проволоки из диэлектрика ($K = 1$) электрическая проводимость стремится к нулю ($\Sigma = 1$).

На рис. 2а и 2б показаны зависимости соответственно модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от безразмерной эффективной массы вдоль оси X k_{m1} . При постоянной концентрации (4) рост эффективной массы m_1 или m_2 сопровождается снижением эффективной массы m_3 и, как следствие, увеличением скорости электронов вдоль оси Z и уменьшением скорости квазичастиц в плоскости XY , что приводит к возрастанию модуля и аргумента проводимости проволоки.

На рис. 3а и 3б изображены зависимости соответственно модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от безразмерной частоты электрического поля y_0 . С ростом частоты поля носители заряда ведут себя подобно совокупности связанных зарядов. При высокой частоте сдвиг фазы между током и напряжением стремится к $\pi/2$, а модуль проводимости стремится к нулю.

Рис. 2а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от безразмерной эффективной массы вдоль оси X k_{m1} при $x_0 = 0,1$, $y_0 = 0,1$, $K = 0,5$.

Кривые 1 – $k_{m2} = 0,1$; 2 – $k_{m2} = 1$;
3 – $k_{m2} = 10$.

Рис. 2б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от безразмерной эффективной массы вдоль оси X k_{m1} при $x_0 = 0,1$, $y_0 = 0,1$, $K = 0,5$.

Кривые 1 – $k_{m2} = 0,1$; 2 – $k_{m2} = 1$;
3 – $k_{m2} = 10$.

На рис. 4а и 4б построены зависимости соответственно модуля и аргумента безразмерной проводимости Σ (6) от безразмерного радиуса проволоки x_0 . С увеличением радиуса проволоки снижается вероятность поверхностного рассеяния по сравнению с объёмным рассеянием, что приводит к росту модуля проводимости. При увеличении радиуса проволоки R_2 (или с уменьшением x_0) частота поля ω растёт, т.к. $y_0 = \omega R_2 / v_0 = \text{const}$. Из графика 3б видно, что при повышении частоты аргумент проводимости возрастает, поэтому при снижении безразмерного радиуса проволоки аргумент также увеличивается. Для толстой проволоки ($x_0 \gg 1$) наблюдается макроскопическая асимптотика (7).

Рис. 3а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от безразмерной частоты электрического поля y_0 при $x_0 = 0,1$ и $K = 0,5$.

Кривые 1 – $k_{m1} = 0,1$, $k_{m2} = 0,15$;
2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Рис. 3б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от безразмерной частоты электрического поля y_0 при $x_0 = 0,1$ и $K = 0,5$.

Кривые 1 – $k_{m1} = 0,12$, $k_{m2} = 0,15$;
2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$; 3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Рис. 4а. Зависимость модуля безразмерной проводимости Σ от безразмерного радиуса проволоки x_0 при $y_0 = 0,1$ и $K = 0,5$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0,12$, $k_{m2} = 0,15$; 2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$;

3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Рис. 4б. Зависимость аргумента безразмерной проводимости Σ от безразмерного радиуса проволоки x_0 при $y_0 = 0,1$ и $K = 0,5$. Кривые 1 – $k_{m1} = 0,12$, $k_{m2} = 0,15$; 2 – $k_{m1} = k_{m2} = 1$;

3 – $k_{m1} = 12$, $k_{m2} = 15$.

Заключение

В данной работе показана связь между анизотропией поверхности Ферми и классическим размерным эффектом в тонкой металлической неоднородной проволоке. Показано, что зависимость сопротивления образца от эффективной массы носителей заряда для тонкой проволоки отличается от аналогичной зависимости для массивного проводника вследствие вклада поверхностного рассеяния. Чем меньше эффективная масса вдоль любой из осей, перпендикулярной оси проволоки, тем ниже вероятность диффузного рассеяния электрона, что приводит к росту как модуля, так и аргумента проводимости (рис. 2а и 2б).

Статья поступила в редакцию 22.02.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals // *Advances in Physics*. 2001. Vol. 50. No. 6. P. 499–537.
2. Daniel G. Electron mean free path in elemental metals // *Journal of Applied Physics*. 2016. Vol. 119. Iss. 8. P. 085101.
3. Pengyuan Z., Daniel G. The anisotropic size effect of the electrical resistivity of metal thin films: Tungsten // *Journal of Applied Physics*. 2017. Vol. 122. Iss. 13. P. 135301.
4. Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
5. Dingle R. B. The electrical conductivity of thin wires // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1950. Vol. 201. No. 1067. P. 545–560.
6. Dephasing of electrons in mesoscopic metal wires / Pierre F., Gougam A. B., Anthore A., Pothier H., Esteve D., Birge N. O. // *Physical Review B*. 2003. Vol. 68. No. 8. P. 085413.
7. Кузнецова И. А., Хадчукаева Р. Р., Юшканов А. А. Влияние поверхностного рассеяния носителей заряда на высокочастотную проводимость тонкой цилиндрической полупроводниковой проволоки // *Физика твердого тела*. 2009. Т. 51. № 10. С. 2022–2027.
8. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1938. Vol. 34. Iss. 1. P. 100–108.
9. Soffer S. B. Statistical model for the size effect in electrical conduction // *Journal of Applied Physics*. 1967. Vol. 38. Iss. 4. P. 1710.
10. Кузнецова И. А., Савенко О. В., Юшканов А. А. Влияние граничных условий на электропроводность тонкой цилиндрической проволоки // *Микроэлектроника*. 2016. Т. 45. № 2. С. 126–134.
11. Weihuang Xue, Wenhua Gu. Conductivity size effect of polycrystalline metal nanowires // *AIP Advances*. 2016. Vol. 6. Iss. 1. P. 115001.
12. Mayadas A. F., Shatzkes M. Electrical-resistivity model for polycrystalline films: the case of arbitrary reflection at external surface // *Physical Review B*. 1970. Vol. 1. Iss. 4. P. 1382–1389.
13. Munoz R. C., Arenas C. Size effects and charge transport in metals: Quantum theory of the resistivity of nanometric metallic structures arising from electron scattering by grain boundaries and by rough surfaces // *Applied Physics Review*. 2017. Vol. 4. Iss. 1. P. 011102.
14. Завитаев Э. В., Юшканов А. А. Влияние характера отражения электронов на электромагнитные свойства неоднородной цилиндрической частицы // *Физика твердого тела*. 2005. Т. 47. № 7. С. 1153–1161.

REFERENCES

1. Sondheimer E. H. The mean free path of electrons in metals. In: *Advances in Physics*, 2001, vol. 50, no. 6, pp. 499–537.
2. Daniel G. Electron mean free path in elemental metals. In: *Journal of Applied Physics*, 2016, vol. 119, iss. 8, pp. 085101.
3. Pengyuan Z., Daniel G. The anisotropic size effect of the electrical resistivity of metal thin films: Tungsten. In: *Journal of Applied Physics*, 2017. vol. 122, iss. 13, pp. 135301.
4. Abrikosov A. A. Fundamentals of the theory of metals. Amsterdam, North-Holland, 1988. 630 p.
5. Dingle R. B. The electrical conductivity of thin wires. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1950, vol. 201, no. 1067, pp. 545–560.
6. Pierre F., Gougam A. B., Anthore A., Pothier H., Esteve D., Birge N. O. Dephasing of electrons in mesoscopic metal wires. In: *Physical Review B*, 2003, vol. 68, no. 8, pp. 085413.
7. Kuznetsova I. A., Khadchukaeva R. R., Yushkanov A. A. [Effect of surface scattering of charge carriers on the high-frequency conductivity of a thin cylindrical semiconductor wire]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2009, vol. 51, no. 10, pp. 2022–2027.
8. Fuchs K. The conductivity of thin metallic films according to the electron theory of metals. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1938, vol. 34, iss. 1, pp. 100–108.
9. Soffer S. B. Statistical model for the size effect in electrical conduction. In: *Journal of Applied Physics*, 1967, vol. 38, iss. 4, pp. 1710.
10. Kuznetsova I. A., Savenko O. V., Yushkanov A. A. [The influence of boundary conditions on the electrical conductivity of a thin cylindrical wire]. In: *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics], 2016, vol. 45, no. 2, pp. 126–134.
11. Weihuang Xue, Wenhua Gu. Conductivity size effect of polycrystalline metal nanowires. In: *AIP Advances*, 2016, vol. 6, iss. 1, pp. 115001.
12. Mayadas A. F., Shatzkes M. Electrical-resistivity model for polycrystalline films: the case of arbitrary reflection at external surface. In: *Physical Review B*, 1970, vol. 1, iss. 4, pp. 1382–1389.
13. Munoz R. C., Arenas C. Size effects and charge transport in metals: Quantum theory of the resistivity of nanometric metallic structures arising from electron scattering by grain boundaries and by rough surfaces. In: *Applied Physics Review*, 2017, vol. 4, iss. 1, pp. 011102.
14. Zavitaev E. V., Yushkanov A. A. [Effect of the character of conduction electron reflection on the electromagnetic properties of an inhomogeneous cylindrical particle]. In: *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State], 2005, vol. 47, no. 7, pp. 1153–1161.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Романов Дмитрий Николаевич – аспирант кафедры микроэлектроники и общей физики Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова;
e-mail: romanov.yar357@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dmitrij N. Romanov – postgraduate student at the Department of Microelectronics and General Physics, P. G. Demidov Yaroslavl State University;
e-mail: romanov.yar357@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Романов Д. Н. Электропроводность тонкой неоднородной металлической проволоки в случае анизотропной поверхности Ферми и изотропного рассеяния электронов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 2. С. 49–60.

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-49-60

FOR CITATION

Romanov D. N. Electrical conductivity of an inhomogeneous thin metal wire in the case of an anisotropic Fermi surface and isotropic electron scattering. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 49–60.

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-49-60