УДК 517.958
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-61-73

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ БОЗЕ-ГАЗА В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТЫ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ

Бедрикова Е. А., Серегина Л. С.
Московский государственный областной университет
141014, г. Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24 Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе проводится исследование собственных функций характеристического уравнения, отвечающего кинетическому уравнению для бозе-газ с постоянной частотой столкновения частиц. Используется решение однородной краевой задачи Римана. Обобщается теория ортогональности собственных функций на квантовые газы, а именно на бозе-газ. Свойства ортогональности, положенные в основу кинетической теории, позволяют находить аналитическое решение задач с граничными условиями.

Ключевые слова: бозе-газ, равновесная функция распределения Бозе-Эйнштейна, дисперсионная функция, собственные функции, ортогональность собственных функций.

ORTHOGONALITY OF EIGENFUNCTIONS FOR A BOSE GAS IN THE CASE OF A CONSTANT FREQUENCY OF PARTICLE COLLISIONS

E. Bedrikova, L. Seregina
Moscow Region State University
24 Very Voloshinoi ul., Mytishchi 141014, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. We have studied the eigenfunctions of a characteristic equation corresponding to the kinetic equation for a Bose gas with a constant frequency of particle collisions. The solution of the homogeneous Riemann boundary value problem is used. The theory of orthogonality of eigenfunctions is generalized to quantum gases, namely, to a Bose gas. The orthogonality properties underlying the kinetic theory allow us to find an analytical solution of problems with boundary conditions.

Key words: Bose gas, equilibrium Bose–Einstein distribution function, dispersion function, eigenfunctions, orthogonality of eigenfunctions.

Введение

В последнее время исследование свойств собственных функций характеристического уравнения вызывает большой интерес [2–6; 8–13]. Данная статья является продолжением работ [1; 7] и обобщением рассматриваемой в них теории на квантовые газы.

В настоящей работе рассматривается кинетическое уравнение для бозе-газа с постоянной частотой столкновения частиц.

Дана неподвижная твёрдая плоская поверхность, над которой в полупространстве $x > 0$ имеется бозе-газ. Задана прямоугольная система координат O_{xyz}. Начало координат находится на поверхности, поскольку плоскость O_{yz} совпадает с данной поверхностью.

Вдоль оси O_y движется бозе-газ с массовой скоростью $u_y(x)$. Вдали от рассматриваемой поверхности задан постоянный градиент массовой скорости газа g_v.

$$g_v = \left(\frac{du_y(x)}{dx}\right)_{x=+\infty}.$$

Движение газа вдоль плоской поверхности обуславливается наличием градиента массовой скорости.

Рассмотрим БГК-уравнение, которое имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla f) = \nu(f_{eq} - f).$$

Здесь f является функцией распределения частиц бозе-газа по скоростям, $\mathbf{v}$ – скорость частиц, ν является эффективной частотой столкновений частиц газа, которая постоянна, f_{eq} является локально–равновесной функцией распределения Бозе

$$f_{eq} = \frac{1}{-1 + \exp\left(\dfrac{\varepsilon_* - \mu}{kT}\right)}, \quad \varepsilon_* = \frac{m}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2, \quad -\infty < \mu \le 0,$$

где $\mathbf{u}$ – массовая скорость бозе-газа, μ – химический потенциал частиц [11], m – масса частицы, k – постоянная Больцмана, T – температура газа, являющаяся постоянной.

Движение частиц стационарно. При малых значениях градиента g_v задачу можно линеаризовать.

Линеаризуем задачу относительно равновесной функции распределения Бозе-Эйнштейна f_B

$$f_B = \frac{1}{-1 + \exp\left(\dfrac{\varepsilon - \mu}{kT}\right)}, \quad \varepsilon = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}, \quad -\infty < \mu < 0,$$

и придём к выражению

$$f_{eq} = f_B(\mathrm{v}) + g_B(\mathrm{v})\frac{m\mathrm{v}_y}{kT}u_y,$$

в котором $f_B(\mathrm{v})$ – абсолютный бозеан, $g_B(\mathrm{v})$ – функция Эйнштейна:

$$f_B(\mathrm{v}) = \frac{1}{-1+\exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT}-\dfrac{\mu}{kT}\right)}, \quad g_B(\mathrm{v}) = \frac{\exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT}-\dfrac{\mu}{kT}\right)}{\left[-1+\exp\left(\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2kT}-\dfrac{\mu}{kT}\right)\right]^2}.$$

Введём безразмерные величины:

$\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость, где $\beta = \dfrac{m}{2kT}$;

$\alpha = \dfrac{\mu}{kT}$ – безразмерный химпотенциал;

$x_1 = xv\sqrt{\beta}$ – безразмерная координата;

$U_y(x) = \sqrt{\beta}u_y(x)$ – безразмерная массовая скорость.

В этих переменных уравнение (1.1) записывается так:

$$f_{eq} = f_B(C) + 2g_B(C)C_yU_y(x).$$

Функцию распределения будем искать в виде:

$$f = f(x,\mathbf{C}) = f_B(C) + g_B(C)C_y h(x,C_x). \tag{1.1}$$

Переходя к безразмерным координатам и сделав необходимые преобразования, получим кинетическое уравнение:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x,C_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu',\alpha)h(x_1,\mu')d\mu', \tag{1.2}$$

где

$$K_B(\mu,\alpha) = \frac{\ln\left(1-\exp(\alpha-\mu^2)\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1-\exp(\alpha-\tau^2)\right)d\tau}.$$

Уравнение (1.2) является БГК-уравнением для бозе-газа [1; 8], с постоянной частотой столкновения частиц.

Собственные функции и их ортогональность

Рассмотрим подстановку, позволяющую разделить переменные в уравнении (1.2) [6]

$$h_\eta(x,\mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\Phi(\eta,\mu), \tag{2.1}$$

где η – параметр разделения.

Подстановка (2.1) в уравнение (1.2) приводит к следующему соотношению:

$$\Phi(\eta,\mu)(\eta-\mu)=\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)\Phi(\eta,\mu)d\mu. \tag{2.2}$$

Введём нормировку собственной функции

$$n(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_B(\mu,\alpha)\Phi(\eta,\mu)d\mu.$$

Уравнение (2.2) запишем в виде:

$$\Phi(\eta,\mu)(\eta-\mu)=\eta n(\eta).$$

Сделав все необходимые преобразования, получим собственные функции

$$\Phi(\eta,\mu)=\eta n(\eta)P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{n(\eta)\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)}{K_B(\eta,\alpha)}.$$

Рассмотрим дисперсионную функцию

$$\lambda(\eta)=1+\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_B(\mu,\alpha)d\mu}{\mu-\eta}, \tag{2.3}$$

где $\lambda(\eta)$ – дисперсионная функция, $\delta(x)$ – дельта функция.

Допустим, что $n(\eta)\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. В этом случае собственные функции представляются в виде:

$$\Phi(\eta,\mu)=\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}. \tag{2.4}$$

Из свойств формул Сохоцкого для дисперсионной функции следует

$$\frac{\lambda^+(z)+\lambda^-(z)}{2}=\lambda(z). \tag{2.5}$$

Рассмотрим скалярное произведение, которое имеет вес:

$$\rho(\mu)=\sqrt{\pi}K_B(\mu,\alpha)\gamma(\mu,\alpha),$$

где

$$\gamma(\mu)=\mu\frac{X^+(\mu)}{\lambda^+(\mu)}. \tag{2.6}$$

Представим однородную краевую задачу Римана в виде [6; 8]:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)}=\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)},\ \mu>0. \tag{2.7}$$

Её решение можно записать следующим выражением [1]:

$$X(z)=\frac{1}{z}e^{V(z)},\ \ V(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\theta(\mu,\alpha)-\pi}{\mu-z}d\mu,$$

где

$$\theta(\mu)=\operatorname{arcctg}\frac{\lambda(\mu)}{s(\mu)}=\operatorname{arcctg}\frac{\lambda(\mu)}{z\pi iK_B(z,\alpha)},$$

$$\operatorname{Re}\lambda^{\pm}(z)=1+\mathrm{z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K_B(\mu,\alpha)d\mu}{\mu-z}=\lambda(z),$$

$$s(z)=\operatorname{Im}\lambda^{\pm}(z)=\pm z\pi iK_B(z,\alpha).$$

Воспользуемся скалярным произведением двух функций, которые зависят от скоростной переменной μ

$$(f,g)=\int\limits_0^\infty\rho(\mu)f(\mu)g(\mu)d\mu. \tag{2.8}$$

Обозначим $\Phi(\eta,\mu)=\Phi_\eta(\eta,\mu)$.

Свойства собственных функций

Теорема 1.

Скалярное произведение единицы на собственный спектр есть спектральный параметр [7]

$$(1,\Phi_\eta)=\eta,\qquad \eta>0.$$

Доказательство.

Согласно скалярному произведению

$$(1,\Phi_\eta)=\int\limits_0^\infty\rho(\tau)\Phi_\eta d\tau. \tag{3.1}$$

Исходя из выражений (3.1), (2.6) и (2.4), получим:

$$(1,\Phi_\eta)=\eta\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\eta-\tau}d\tau+\lambda(\eta)\int\limits_0^\infty\frac{\delta(\eta-\tau)}{K_B(\eta,\alpha)}K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)d\tau=$$

$$=\eta\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\eta-\tau}d\tau+\lambda(\eta)\gamma(\eta).$$

По интегральному представлению [8]

$$X(z)=1+\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\tau-z}d\tau \tag{3.2}$$

имеем:

$$\left(1,\Phi_{\eta}\right)=-\eta X(\eta)+\eta+\lambda(\eta)\gamma(\eta)=$$

$$=-\eta X(\eta)+\eta+\frac{1}{2}\eta\left[\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)\right]\frac{X^{+}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)}=\eta.$$

Докажем, что

$$X(\eta)=\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)\right]\frac{X^{+}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)}.$$

Для этого воспользуемся снова выражением (3.2).

Так как

$$X(\eta)=\frac{1}{2}\left[X^{+}(\eta)+X^{-}(\eta)\right],\ \text{то}$$

$$\frac{1}{2}\left[X^{+}(\eta)+X^{-}(\eta)\right]=\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)\right]\frac{X^{+}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)},$$

$$\left[X^{+}(\eta)+X^{-}(\eta)\right]=\left[\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)\right]\frac{X^{+}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)},$$

$$1+\frac{X^{-}(\eta)}{X^{+}(\eta)}=\frac{\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)},$$

$$1+\frac{\lambda^{-}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)}=\frac{\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)},$$

$$\frac{\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)}=\frac{\lambda^{+}(\eta)+\lambda^{-}(\eta)}{\lambda^{+}(\eta)}.$$

Таким образом, $\left(1,\Phi_{\eta}\right)=\eta.$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Собственные функции $\Phi_{\eta}(\mu)$ непрерывного спектра образуют ортогональное семейство и справедливо равенство [7]:

$$\left(\Phi_{\eta},\Phi_{\eta'}\right)=N(\eta)\delta(\eta-\mu), \tag{3.3}$$

где

$$N(\eta)=\gamma(\eta)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{K_{B}(\eta,\alpha)}\lambda^{+}(\eta)\lambda^{-}(\eta).$$

Доказательство.

Воспользуемся определением скалярного произведения (2.8)

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\sqrt{\pi}\int\limits_0^\infty K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)\left[\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta-\tau}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\tau)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\right]\times$$

$$\times\left[\eta'\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta'-\tau}+\frac{\lambda(\eta')\delta(\eta'-\tau)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta',\alpha)}\right]d\tau=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Обозначим

$$I_1=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)}d\tau,$$

$$I_2=\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda(\eta')}{K_B(\eta',\alpha)}\int\limits_0^\infty\frac{\delta(\eta'-\tau)}{\eta-\tau}K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)d\tau,$$

$$I_3=\frac{\eta'}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda(\eta)}{K_B(\eta,\alpha)}\int\limits_0^\infty\frac{\delta(\eta-\tau)}{\eta'-\tau}K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)d\tau,$$

$$I_4=\frac{\lambda(\eta)\lambda(\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)K_B(\eta',\alpha)}\int\limits_0^\infty K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)\delta(\eta-\tau)\delta(\eta'-\tau)d\tau.$$

Согласно свойству дельта-функции

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi, \tag{3.4}$$

$$I_2=\frac{\eta\lambda(\eta')\gamma(\eta')}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')},$$

$$I_3=\frac{\eta'\lambda(\eta)\gamma(\eta)}{\sqrt{\pi}(\eta'-\eta)},$$

$$I_4=\frac{\lambda^2(\eta)\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}.$$

Вычислим I_1.

Для этого выражение $\dfrac{1}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)}$ разложим на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(\eta-\tau)(\eta'-\tau)}=\frac{1}{\eta-\eta'}\left(\frac{1}{\tau-\eta}-\frac{1}{\tau-\eta'}\right).$$

Используя формулу Пуанкаре-Бертрана, получим:

$$P\frac{1}{\eta-\mu}P\frac{1}{\eta'-\mu}=P\frac{1}{\eta-\eta'}\left(P\frac{1}{\tau-\eta}-P\frac{1}{\tau-\eta'}\right)+\pi^2\delta(\eta-\mu)\delta(\eta'-\mu).$$

$$I_1=\eta\eta'\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\eta-\eta'}\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\tau-\eta}d\tau-\frac{1}{\eta-\eta'}\int\limits_0^\infty\frac{K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)}{\tau-\eta'}d\tau\right]+$$

$$+\eta\eta'\pi\sqrt{\pi}\int\limits_0^\infty K_B(\tau,\alpha)\gamma(\tau)\delta(\eta-\mu)\delta(\eta'-\mu)d\tau.$$

Согласно интегральному представлению (3.2) и свойству дельта-функции (3.4):

$$I_1=\eta\eta'\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{X(\eta)-X(\eta')}{\eta-\eta'}+\eta^2\pi\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta'). \tag{3.5}$$

Найдём сумму I_2+I_3.

$$I_2+I_3=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\lambda(\eta')\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}-\lambda(\eta)\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}\right].$$

Из (2.4), (2.7) следует:

$$I_2+I_3=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\frac{\lambda^+(\eta')+\lambda^-(\eta')}{2}\cdot\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}-\frac{\lambda^+(\eta)+\lambda^-(\eta)}{2}\cdot\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)}\right]=$$

$$=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}\tilde{\ }\eta-\eta}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda^+(\eta')}{2}\cdot\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}+\frac{\lambda^-(\eta')}{2}\cdot\frac{X^+(\eta')}{\lambda^+(\eta')}-\frac{\lambda^+(\eta)}{2}\cdot\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)}-\frac{\lambda^-(\eta)}{2}\cdot\frac{X^+(\eta)}{\lambda^+(\eta)}\right]=$$

$$=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[\frac{X^+(\eta')+X^-(\eta')}{2}-\frac{X^+(\eta)+X^-(\eta)}{2}\right]=$$

$$=\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\pi}(\eta-\eta')}\left[X(\eta')-X(\eta)\right].$$

Найдём

$$I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left[\lambda^2(\eta)+\eta^2\pi^2K_B^2(\eta,\alpha)\right]=$$

$$=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left(\left[\lambda(\eta)-\eta\pi K_B(\eta,\alpha)i\frac{2}{2}\right]\right)\left(\left[\lambda(\eta)+\eta\pi K_B(\eta,\alpha)i\frac{2}{2}\right]\right)=$$

$$=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left[i\lambda(\eta)-\frac{2\eta\pi i K_B(\eta,\alpha)}{2}\right]\left[i\lambda(\eta)+\frac{2\eta\pi i K_B(\eta,\alpha)}{2}\right].$$

Согласно (2.3), (2.4), (2.5):

$$I_2+I_3+I_3+I_4=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\left[\frac{\lambda^+(\eta')-\lambda^-(\eta')}{2}+\frac{\lambda^+(\eta)-\lambda^-(\eta)}{2}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda^+(\eta')-\lambda^-(\eta')}{2}+\frac{\lambda^+(\eta)-\lambda^-(\eta)}{2}\right]=\frac{\gamma(\eta)\delta(\eta-\eta')}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta).$$

Обозначим

$$N(\eta)=\gamma(\eta)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{K_B(\eta,\alpha)}\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta).$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=I_1+I_2+I_3+I_4=N(\eta)\delta(\eta-\eta').$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=N(\eta)\delta(\eta-\eta').$$

Введём на множестве собственных функций скалярное произведение с интегрированием по спектральному параметру и весом $r(\eta)=\frac{1}{N(\eta)}$. Итак,

$$\left(f,g\right)=\int_0^\infty\frac{1}{N(\eta)}f(\eta)g(\eta)d\eta. \tag{3.6}$$

<u>Теорема 3.</u>

Собственные функции характеристического уравнения ортогональны и выполняется равенство [7]:

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\frac{1}{\rho(\mu)}\delta(\mu-\mu').$$

Доказательство.

Согласно (3.6),

$$\left(\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')\right)=\int_0^\infty\frac{1}{N(\eta)}\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')d\eta. \tag{3.7}$$

Подставим (3.3) в (3.7):

$$\left(\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')\right)=\int_0^\infty\frac{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\Phi_\eta(\mu),\Phi_\eta(\mu')d\eta=$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\left[\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\eta-\mu}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu)}{\sqrt{\pi}K_B(\eta,\alpha)}\right]\times$$

$$\times\left[\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}P\frac{1}{\Im\quad '}+\frac{\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu')}{\sqrt{\pi}K_B\tilde{}\eta\ \alpha}\right]d\eta=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)(\eta-\mu)(\eta-\mu')\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta,$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta\lambda(\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\frac{\delta(\eta-\mu')}{(\eta-\mu)}d\eta,$$

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta\lambda(\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}\frac{\delta(\eta-\mu)}{(\eta-\mu')}d\eta,$$

$$I_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\lambda^2(\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)K_B(\eta,\alpha)}\delta(\eta-\mu)\delta(\eta-\mu')d\eta.$$

По свойству дельта-функции (3.4):

$$I_4=\frac{\lambda^2(\mu')\delta(\mu'-\mu)}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')K_B(\mu,\alpha)},$$

$$I_2=\frac{\mu'\lambda(\mu')}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')(\mu'-\mu)\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')},$$

$$I_3=\frac{\mu'\lambda(\mu')}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')(\mu-\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')},$$

$$I_2+I_3=0.$$

Рассчитаем I_1. Вычислим аналогично (3.5) I_1 из теоремы 2.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)(\mu'-\eta)(\mu-\mu')\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)}{\gamma(\eta)(\mu'-\eta)(\mu-\mu')\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\eta^2K_B(\eta,\alpha)\delta(\mu-\eta)\delta(\mu'-\eta)}{\gamma(\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}d\eta.$$

$$I_1=\frac{\mu'^2 K_B(\mu',\alpha)}{\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')}\pi\sqrt{\pi}\delta(\mu-\mu').$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\frac{\pi\sqrt{\pi}\mu'^2\,\delta(\mu-\mu')K_B(\mu',\alpha)}{\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')}+\frac{\lambda^2(\mu')\delta(\mu-\mu')}{\sqrt{\pi}\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')K_B(\mu,\alpha)}=$$

$$=\frac{\delta(\mu-\mu')}{\gamma(\mu')\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')}\left[\frac{\pi^2\mu'^2\,K^2{}_B(\mu',\alpha)+\lambda^2(\mu')}{\sqrt{\pi}K_B(\mu,\alpha)}\right].$$

Аналогично теореме 2:

$$\pi^2\mu'^2\,K^2{}_B(\mu',\alpha)+\lambda^2(\mu')=\lambda^+(\mu')\lambda^-(\mu')$$

и (2.6)

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\frac{\delta(\mu-\mu')}{\gamma(\mu')}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{K_B(\mu,\alpha)}=\frac{1}{\rho(\mu)}\delta(\mu-\mu').$$

$$\left(\Phi_\eta,\Phi_{\eta'}\right)=\frac{1}{\rho(\mu)}\delta(\mu-\mu').$$

Заключение

В данной работе исследована математическая модель движения квантового газа Бозе в полупространстве вдоль его границы. Это движение обусловлено наличием градиента массовой скорости газа вдали от границы полупространства. При исследовании рассмотрена теория ортогональности собственных функций характеристического уравнения, соответствующего кинетическому уравнению движения газа Бозе с постоянной частотой столкновений частиц газа. В работе доказаны теоремы ортогональности собственных функций уравнения движения газа Бозе. При доказательстве теорем используется решение однородной краевой задачи Римана. Доказанные теоремы в дальнейшем следует использовать для аналитического решения граничных задач движения квантовых газов Бозе.

Статья поступила в редакцию 17.01.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бедрикова Е. А. Граничные задачи для бозе-газа в полупространстве и канале: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 107 с.
2. Бедрикова Е. А., Латышев А. В. Аналитическое решение задачи Куэтта для бозе-газа // VII Международная научная практическая конференция «Наука и образование – 2014» (Мюнхен, Германия, 27–28 июня 2014). С. 399–405.
3. Бедрикова Е. А., Латышев А. В. Задача Куэтта для бозе-газа // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2014. № 4. С. 29–43.
4. Бедрикова Е. А., Латышев А. В. Скачок химического потенциала при испарении бозе-газа // Физика низких температур. 2014. Т. 40. № 3. С. 296–302.

5. Квашнин А. Ю., Латышев А. В., Юшканов А. А. Изотермическое скольжение квантового бозе-газа с зеркально-диффузным отражением от границы // Физика низких температур. 2010. Т. 36. № 4. С. 413–417.
6. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитическое решение граничных задач кинетической теории. М.: МГОУ, 2004. 286 с.
7. Латышев А. В., Курилов А. Д. Ортогональность собственных функций характеристических уравнений как метод решения граничных задач модельных кинетических уравнений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. № 1. С. 8–21.
8. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитические методы в кинетической теории. М.: МГОУ, 2008. 280 с.
9. Латышев А. В., Юшканов А. А. Кинетические процессы в квантовых бозе-газах и аналитическое решение граничных задач // Математическое моделирование. 2003.Т. 15. № 5. С. 80–94.
10. Case K. M. Elementary solutions of the transport equations and their applications // Annals of Physics. 1960. Vol. 9. No. 1. P. 1–23.
11. Cercignani C., Lampis M. Kinetic model for gas-surface ineraction // Transport Theory and Statistical Physics. 1971. Vol. 1. P. 101–109.
12. Cercignani C. Mathematical Methods in Kinetic Theory. New York: Plenum Press, 1969. 268 p.
13. Ferziger J. H., Kaper H. G. Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972. 568 p.

REFERENCES

1. Bedrikova E. A. *Granichnye zadachi dlya boze-gaza v poluprostranstve i kanale: dis. … kand. fiz.-mat. nauk* [The boundary value problems for the Bose gas in half-space and the channel: PhD thesis in Physics and Mathematics]. Moscow, 2015. 107 p.
2. Bedrikova E. A., Latyshev A. V. [Analytical solution of the Couette problem for a Bose gas]. In: *VII Mezhdunarodnaya nauchnaya prakticheskaya konferentsiya «Nauka i obrazovanie – 2014» (Munchen, Germaniya, Iun 27–28, 2014)* [VII international scientific practical conference "Science and education – 2014" (Munich, Germany, June 27–28, 2014)]. pp. 399–405.
3. Bedrikova E. A., Latyshev A. V. [The Couette problem for a Bose gas]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika i matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2014, no. 4, pp. 29–43.
4. Bedrikova E. A., Latyshev A. V. [Chemical potential jump during evaporation of Bose gases]. In: *Fizika nizkikh temperature* [Low Temperature Physics], 2014, vol. 40, no. 3, pp. 296–302.
5. Kvashnin A. Yu., Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Isothermal slip of a quantum Bose gas with specular-diffuse reflection from the boundary]. In: *Fizika nizkikh temperature* [Low Temperature Physics], 2010, vol. 36, no. 4, pp. 413–417.
6. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. *Analiticheskoe reshenie granichnykh zadach kineticheskoi teorii* [Analytical solution of boundary problems of the kinetic theory]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2004. 286 p.
7. Latyshev A. V., Kurilov A. D. [Orthogonality of the eigenfunctions of characteristic equations as a method for solving boundary value problems of model kinetic equations]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika-matematika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 1, pp. 8–21.

8. Latyshev A. B., Yushkanov A. A. *Analiticheskie metody v kineticheskoi teorii* [Analytical methods in kinetic theory]. Moscow, Moscow Region State University Publ., 2008. 280 p.
9. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. [Kinetic processes in quantized Bose gases and analytical solution of boundary value problems]. In: *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2003, vol. 15, no. 5, pp. 80–94.
10. Case K. M. Elementary solutions of the transport equations and their applications. In: *Annals of Physics*, 1960, vol. 9, no. 1, pp. 1–23.
11. Cercignani C., Lampis M. Kinetic model for gas-surface ineraction. In: *Transport Theory and Statistical Physics*, 1971, vol. 1, pp. 101–109.
12. Cercignani C. Mathematical methods in kinetic theory. New York, Plenum Press Publ., 1969. 268 p.
13. Ferziger J. H., Kaper H. G. Mathematical theory of transport processes in gases. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1972. 568 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Бедрикова Екатерина Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: bedrikova@mail.ru;

Серегина Людмила Сергеевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: seregina.lyudmila.97@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ekaterina A. Bedrikova – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: bedrikova@mail.ru;

Ludmila S. Seregina – student at the Physics and Mathematics Faculty, Moscow Region State University;
e-mail: seregina.lyudmila.97@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Бедрикова Е. А., Серегина Л. С. Ортогональность собственных функций для бозе-газа в случае постоянной частоты столкновения частиц // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 2. С. 61–73.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-61-73

FOR CITATION

Bedrikova E. A., Seregina L. S. Orthogonality of eigenfunctions for a Bose gas in the case of a constant frequency of particle collisions. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 61–73.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-61-73