УДК 537.632

DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ БОЗЕ-КОНДЕНСИРОВАННЫХ АТОМОВ В ДВУХЪЯМНОЙ ЛОВУШКЕ

Васильева О. Ф., Зинган А. П.

*Приднестровский государственный университет имени Т. Г. Шевченко
3300, г. Тирасполь, ул. 25 Октября, д. 107, Молдова*

Аннотация. Изучена динамика туннелирования бозе–конденсированных атомов в двухъямной ловушке с учётом процессов упругого межатомного взаимодействия в каждой яме и нелинейного парного туннелирования через барьер между ямами. Решения полученной системы нелинейных эволюционных уравнений, описывающих нестационарное туннелирование, показывают, что существуют как периодический, так и аperiodический режимы эволюции разности населенностей ям. Особенности временной эволюции системы определяются начальной разностью населенностей, начальной разностью фаз и параметром нелинейности системы. Указано на возможность существования явления квантового самозахвата и фазового управления динамикой системы.

Ключевые слова: бозе–эйнштейновская конденсация, квантовый самозахват, нелинейное туннелирование, фазовый контроль, периодический режим, аperiodический режим.

DYNAMICS OF NONLINEAR TUNNELING OF BOSE-CONDENSED ATOMS IN A DOUBLE-WELL TRAP

O. Vasilieva, A. Zingan

*Pridnestrovian State University
ul. 25 Oktyabrya 107, 3300 Tiraspol, Moldova*

Abstract. The dynamics of tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap is studied with allowance for the processes of elastic interatomic interaction in each well and nonlinear pair tunneling through the barrier between the wells. Solutions of the resulting system of nonlinear evolution equations describing nonstationary tunneling show that there are both periodic and aperiodic modes of evolution of the difference between the populations of the wells. The features of the time evolution of the system are determined by the initial population difference, the initial phase difference, and the nonlinearity parameter of the system. The possibility of the existence of quantum self-trapping and phase control of the system dynamics is indicated.

Keywords: Bose–Einstein condensation, quantum self-trapping, nonlinear tunneling, phase control, periodic mode, aperiodic mode.

Введение

За последние несколько десятилетий динамика ультрахолодных атомов в двухъямной ловушке привлекает к себе значительное внимание [1; 2]. Модель

двойной квантовой ямы играет ключевую роль в выявлении многочисленных интересных явлений благодаря экспериментальной доступности и точной управляемости. Многие свойства были предсказаны теоретически и наблюдались экспериментально в бозе-эйнштейновских конденсатах атомов в двойных квантовых ямах, начиная от квантового коллапса, эффекта Джозефсона, квантового самозахвата, квантового хаоса, спиновой корреляции [3–5]. В [6] рассмотрен атомный конденсат Бозе-Эйнштейна в симметричном одномерном двухъямном потенциале в четырёхмодовом приближении. Получена богатая динамика осцилляций Раби, смешанный режим Джозефсона-Раби, самозахват. Исследована возможность управления динамикой атомов в возбужденном состоянии, управляя начальными населенностями атомов. В [7] теоретически изучено влияние ловушек и межатомных взаимодействий на Джозефсоновские колебания и квантовый самозахват для бозе-эйнштейновского конденсата, заключенного в ловушку с симметричной двойной квантовой ямой. Рассмотрены три типа модельных потенциалов взаимодействия. Показано, что, изменяя соотношения между осевыми и радиальными размерами ловушек, можно вызвать переход от Джозефсоновских колебаний к квантовому самозахвату. Для действующих дипольных межатомных взаимодействий изучен переход от осцилляций Раби к Джозефсоновским колебаниям.

Расширенная модель Бозе-Хаббарда для двухъямного потенциала с парным туннелированием изучается как с помощью точной диагонализации, так и теории среднего поля. В [8] теоретически исследовано нелинейное туннелирование двух слабо связанных бозе-эйнштейновских конденсатов в двухъямной ловушке в режиме сильного взаимодействия. Показано, что сильное взаимодействие приводит к значительным поправкам энергетического спектра и резкому изменению основного состояния, рассматриваемого как квантовый фазовый переход. В [9] обсуждалось парное туннелирование бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке на основе модели Бозе-Хаббарда. В [10] предложен гамильтониан ультрахолодных атомов в оптических решётках, включающих двухчастичное взаимодействие ближайших соседей, которое сводится к модели Бозе-Хаббарда в пределе слабого взаимодействия. Было показано, что корреляционное туннелирование является результатом парного туннелирования, которое включает в себя взаимодействие между частицами в соседних ямах. В [11] была рассмотрена динамика бозе-конденсированных атомов в двухъямном потенциале при учёте парного туннелирования. Для относительно слабых отталкивающих межатомных взаимодействий динамика системы с максимальной начальной разностью населенностей развивается от Джозефсоновских колебаний до квантового самозахвата при увеличении парного туннелирования, в то время как при сильном отталкивании сильное парное туннелирование подавляет квантовый самозахват. Показано, что сильное парное туннелирование приводит к разрушению Джозефсоновских осцилляций и квантового самозахвата, и система, в конечном счёте, входит в режим с нулевой разностью населенностей атомов в ямах. В [12] было показано, что сильное парное туннелирование влияет на структуру энергетического спектра стационарных состояний. Получено, что в зависимости от

начальной населенности атомов возникают различные колебательные режимы. Максимальная амплитуда колебаний связана со значением фазы Пайерса, чего не наблюдалось при исследовании динамики бозе-конденсата без учёта парного туннелирования. В [13] были получены два вида эллиптических решений через функции Якоби и семейство рациональных решений атомно-молекулярных бозе-эйнштейновских конденсатов с потенциалом захвата и пространственно-модулированной нелинейностью. Актуальной темой стало изучение динамики туннелирования в режиме сильного взаимодействия как теоретически, так и экспериментально [14; 15], поскольку теория туннелирования взаимодействующей системы многих тел всё ещё отсутствует. В [15] было обнаружено, что динамика туннелирования атомов в одномерной двойной яме эволюционирует от осцилляций Раби до парного туннелирования, при уменьшении силы взаимодействия.

В [16; 17] была теоретически изучена динамика туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке при одновременном учёте процессов линейного одноатомного и нелинейного парного туннелирования. Показано, что в зависимости от начальной разности фаз возникают как периодический, так и аперiodический режимы эволюции системы. Доказана возможность фазового управления динамикой системы.

В [3; 8; 11; 12; 14; 16–18] отсутствуют результаты исследований временной эволюции атомной системы при одновременном учёте процессов линейного туннелирования и нелинейного туннелирования (упругого межатомного взаимодействия атомов в каждой яме, коррелированного двухатомного туннелирования и стимулированного атомного туннелирования), поэтому исследование особенностей временной эволюции системы при одновременном учёте обоих механизмов туннелирования является актуальной задачей.

Результаты и обсуждение

Изучим явление туннелирования бозе-конденсированных атомов в симметричной двухъямной ловушке между идентичными ямами 1 и 2. Считаем, что ямы разделены потенциальным барьером, который допускает возможность туннелирования атомов из одной ямы в другую. Цель этого исследования состоит в изучении роли различных механизмов нелинейности в процессе туннелирования. Согласно [3; 8], гамильтониан взаимодействия имеет вид:

$$H = -\hbar\kappa(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1) + \hbar v(\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_1\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2^+\hat{a}_2\hat{a}_2) + \hbar\mu(\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_2\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2^+\hat{a}_1\hat{a}_1) + \hbar\lambda(\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1^+\hat{a}_1\hat{a}_1 + \hat{a}_1^+\hat{a}_2^+\hat{a}_2\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2^+\hat{a}_2\hat{a}_1), \quad (1)$$

где $\hat{a}_i (i=1,2)$ – оператор уничтожения атома в i -ой яме, κ – постоянная линейного процесса туннелирования, v – постоянная упругого межатомного взаимодействия в каждой яме, μ – постоянная коррелированного двухатомного туннелирования, λ – постоянная стимулированного атомного туннелирования. Используя гамильтониан (1), легко получить систему гайзенберговских эво-

люционных уравнений для операторов $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$. Вводя далее в рассмотрение плотности атомов $n_1 = |a_1|^2$, $n_2 = |a_2|^2$, разность населенностей $n = n_1 - n_2$ и полную плотность атомов $N_0 = n_1 + n_2$ в ямах, а также величины $Q = i(a_1^* a_2 - a_2^* a_1)$ и $R = a_1^* a_2 + a_2^* a_1$, получаем следующую замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений для функций n , Q и R :

$$\begin{aligned}\dot{n} &= -2(\kappa + \lambda N_0 + 2\mu R)Q, \\ \dot{Q} &= 2n(\kappa + \lambda N_0 + (\mu - \nu)R), \\ \dot{R} &= 2(\mu + \nu)nQ.\end{aligned}\quad (2)$$

Начальные условия для введенных функций можно записать в виде:

$$n|_{t=0} = n_0, \quad Q|_{t=0} \equiv Q_0 = 2\sqrt{N_0^2 - n_0^2} \sin \varphi_0, \quad R|_{t=0} \equiv R_0 = 2\sqrt{N_0^2 - n_0^2} \cos \varphi_0, \quad (3)$$

где φ_0 – начальная разность фаз. Введём далее обобщённую константу туннелирования $\tilde{\kappa}$ соотношением: $\tilde{\kappa} = \kappa + \lambda N_0$.

Используя систему нелинейных дифференциальных уравнений (2) получим два независимых интеграла движения:

$$n^2 = n_0^2 + \frac{2\mu}{\mu + \nu} R_0 \left(R_0 + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu} \right) - \frac{2\mu}{\mu + \nu} R \left(R + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu} \right), \quad (4)$$

$$Q^2 = N_0^2 - n_0^2 - \frac{2\mu}{\mu + \nu} R_0 \left(R_0 + \frac{\tilde{\kappa}}{\mu} \right) + R \left(\frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} R + \frac{2\tilde{\kappa}}{\mu + \nu} \right). \quad (5)$$

Далее представим основные результаты исследования динамики системы для физически наиболее интересного случая, когда постоянная упругого межатомного взаимодействия ν и постоянная корреляционного туннелирования μ одинаковы ($\mu = \nu$).

Введём нормированные переменные:

$$n = N_0 z, \quad R = N_0 y, \quad Q = N_0 q, \quad \tau = \tilde{\kappa} t, \quad \beta = \frac{n_0}{N_0}, \quad s = \frac{\mu N_0}{\tilde{\kappa}}. \quad (6)$$

Тогда основные уравнения и интегралы движения принимают вид:

$$\frac{dz}{d\tau} = -2(1 + 2sy)q, \quad \frac{dq}{d\tau} = 2z, \quad \frac{dy}{d\tau} = 4szq \quad (7)$$

$$z^2 = (y_+ - y)(y - y_-), \quad q^2 = (y - y_1)/s, \quad (8)$$

где

$$y_{\pm} = -\frac{1}{2s} \pm \sqrt{\left(y_0 + \frac{1}{2s}\right)^2 + \beta^2}, \quad y_1 = y_0 - sq_0^2, \quad (9)$$

а $y_0 = \sqrt{1 - \beta^2} \cos \varphi_0$, $q_0 = \sqrt{1 - \beta^2} \sin \varphi_0$. Из (7) и (8) можно получить нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию функции $y(\tau)$:

$$\frac{dy}{d\tau} = \pm 4\sqrt{s}\sqrt{(y_+ - y)(y - y_-)(y - y_1)}, \quad (10)$$

Используя решение этого уравнения и первый интеграл движения из (8), можно найти функцию $z(\tau)$. Из (10) видно, что поведение функции $y(\tau)$ существенно определяется соотношениями между корнями y_+ , y_- и y_1 .

На рисунке 1 представлены графики корней:

$$y_{\pm} = -\frac{1}{2s} \pm \sqrt{\left(y_0 + \frac{1}{2s}\right)^2 + \beta^2} \quad \text{и} \quad y_1 = y_0 - sq_0^2.$$

Видно, что при параметре нелинейности $s = 0,5$ корень y_- монотонно увеличивается при увеличении начальной разности фаз, а корни y_+ и y_1 монотонно уменьшаются (рис. 1 а). При $s = 0,7$ наблюдается вырождение двух наименьших корней $y_- = y_1$ (рис. 1 б). Вырождение двух наименьших корней нашего уравнения приводит к возникновению аperiодического режима эволюции системы. При $s = 0,9$ наблюдается двукратное вырождение двух наименьших корней $y_- = y_1$ (рис. 1 с).

Рис. 1. Корни y_- , y_+ и y_1 уравнения (8) в зависимости от начальной разности фаз ϕ_0 при фиксированных значениях нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и параметра нелинейности s , равных: а) 0,5, б) 0,7 и с) 0,9.

Представим решения для различных случаев.

1) $y_+ > y_1 > y_-$. Эти неравенства выполняются при условии, что $(y_0 - sq_0^2)^2 < 1$.

Решение дифференциального уравнения (10), описывающего эволюцию функции $y(\tau)$ в этом случае имеет вид:

$$y = y_- + \frac{y_1 - y_-}{dn^2\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}, \quad (11)$$

где $dn(x)$ – эллиптическая функция Якоби с модулем k , $F(\psi_0, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода с параметром ψ_0 и модулем k^1 , которые определяются выражениями:

¹ Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1971. С. 751–754.

$$\psi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{y_+ - y_-}{y_+ - y_1} \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_-}}, \quad k^2 = \frac{y_+ - y_1}{y_+ - y_-}. \quad (12)$$

Используя (11) и (8), для нормированной разности населенностей $z(\tau)$ получаем выражение:

$$z = \sqrt{(y_1 - y_-)(y_+ - y_1)} \frac{cn\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}{dn^2\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm F(\psi_0, k)\right)}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что разность населенностей периодически изменяется во времени с периодом T и амплитудой A , равными:

$$T = 2K(k)/\sqrt{s(y_+ - y_-)}, \quad A = \sqrt{1 - (y_0 - sq_0^2)^2}, \quad (14)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k^2 .

2) $y_+ > y_- > y_1$. В этом случае параметры системы удовлетворяют неравенству $(y_0 - sq_0^2)^2 > 1$. Решение для разности населенностей имеет вид:

$$z = (y_+ - y_-) \sqrt{\frac{y_- - y_1}{y_+ - y_1}} \frac{sn(x\tau \pm F(\psi_0, k))cn(x\tau \pm F(\psi_0, k))}{dn^2(x\tau \pm F(\psi_0, k))}, \quad (15)$$

где

$$x = 2\sqrt{s(y_+ - y_1)}, \quad \psi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{y_+ - y_1}{y_+ - y_-} \frac{y_0 - y_-}{y_0 - y_1}}, \quad k^2 = \frac{y_+ - y_-}{y_+ - y_1}, \quad (16)$$

$sn(x)$, $cn(x)$ и $dn(x)$ – эллиптические функции Якоби³.

В этом случае также имеет место периодическая эволюция разности населенностей атомов с периодом T , равным

$$T = 2K(k)/\sqrt{s(y_+ - y_1)}. \quad (17)$$

3) $y_+ > y_- = y_1$. В этом случае $(y_0 - sq_0^2)^2 = 1$.

Решение для функции $z(\tau)$ имеет вид:

$$z = (y_+ - y_-) \frac{sh\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm \operatorname{arch} \sqrt{\frac{y_+ - y_-}{y_0 - y_-}}\right)}{ch^2\left(2\sqrt{s(y_+ - y_-)}\tau \pm \operatorname{arch} \sqrt{\frac{y_+ - y_-}{y_0 - y_-}}\right)}. \quad (18)$$

² Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1971. С. 751–754.

³ Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1971. С. 751–754.

Видно, что особенности эволюции определяются параметрами системы. При малых значениях параметра нелинейности s наблюдается периодическая эволюция разности населенностей атомов в ямах (рис. 2). Амплитуда и период колебаний разности населенностей атомов в ямах существенно зависят от параметра нелинейности s , нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах β и начальной разности фаз φ_0 . С ростом s наряду с периодической эволюцией возникают также участки аperiodической эволюции (рис. 2), при которой разность населенностей эволюционирует к нулевому значению. Это свидетельствует о том, что асимптотически атомы одинаково заселяют обе ямы, чем эволюция и заканчивается.

Рис. 2. Эволюция разности населенностей n в зависимости от времени и начальной разности фаз φ_0 при фиксированных значениях нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и параметра нелинейности s , равных: а) 0,5, б) 0,9. Здесь $\tau = \tilde{\kappa}t$.

Рис. 3. Период T колебаний разности населенностей n в зависимости от начальной разности фаз φ_0 и фиксированных значениях нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и нескольких значениях параметра нелинейности s , равных: 1 (0,5), 2 (0,7), 3 (0,9). Здесь $T_0 = \pi/\tilde{\kappa}$.

Период колебаний разности населенностей атомов в ямах при $s = 0,5$ монотонно растёт с ростом начальной разности фаз φ_0 , тогда как при $s = 0,9$ период колебаний дважды обращается в бесконечность при увеличении φ_0 (рис. 2, рис. 3). Следовательно, периодический режим эволюции дважды срывается и дважды

устанавливается аperiодический режим эволюции (рис. 2*b*). При переходе через аperiодический режим отсутствует резкое изменение амплитуды колебаний, что свидетельствует об отсутствии ярко выраженного эффекта самозахвата. Из рис. 3 видно, что период колебаний монотонно растёт с ростом начальной разности фаз φ_0 при параметре нелинейности $s = 0,5$, имеет максимум при $s = 0,7$, который далее с ростом s растёт и сужается и при определённом значении s обращается в бесконечность, что свидетельствует об аperiодической эволюции. При дальнейшем увеличении s расхожимость у функции $T(\varphi_0)$ расщепляется на две, расстояние между которыми увеличивается с увеличением параметра s . Величина параметра нелинейности s , при котором период колебаний T обращается в бесконечность, определяется начальной разностью фаз φ_0 и нормированной начальной разностью населенностью атомов в ямах β и определяется следующим соотношением:

$$s = \left(1 + \sqrt{1 - \beta^2} \cos \varphi_0\right) / \left((1 - \beta^2) \sin^2 \varphi_0\right).$$

При $\varphi_0 = 0$ ($k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$) бифуркационное значение s обращается в бесконечность, то есть аperiодический режим при $\varphi_0 = 0$, либо $\varphi_0 = \pi$, невозможен (рис. 4), невозможен случай равнoзаселения обеих ям. Однако, при начальной разности фаз равной $\varphi_0 = \pi$, эволюция атомов в пределах одного периода является модулированной в зависимости от времени (рис. 4*b*). При нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах равной $\beta = 0,3$ период колебаний монотонно возрастает с ростом параметра нелинейности s , далее достигает максимума, а затем происходит монотонное уменьшение периода колебаний. С увеличением нормированной начальной разности населенностей атомов в ямах β максимальное значение периода колебаний уменьшается. При достижении $\beta = 1$ (в начальный момент времени заселена только одна из ям) период колебаний монотонно уменьшается с ростом параметра нелинейности s (рис. 4*c*).

Рис. 4. а) эволюция разности населенностей n в зависимости от времени и параметра нелинейности s при фиксированных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и начальной разности фаз $\varphi_0 = 0$;

б) эволюция разности населенностей n в зависимости от времени и параметра нелинейности s при $\beta = 0,3$ и $\varphi_0 = \pi$;

с) период T колебаний разности населенностей n в зависимости от параметра нелинейности s и различных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах β и нескольких значениях начальной разности фаз φ_0 , равных:

1 ($\beta = 0,3$, $\varphi_0 = 0$), 2 ($\beta = 0,3$, $\varphi_0 = \pi$), 3 ($\beta = 0,6$, $\varphi_0 = \pi$), 4 ($\beta = 1$, $\varphi_0 = \pi$).

Здесь $\tau = \tilde{\kappa}t$, $T_0 = \pi/\tilde{\kappa}$.

При начальной разности фаз равной $\varphi_0 = \pi/2$ имеются наиболее удовлетворительные условия для возникновения бифуркации, при котором период колебаний обращается в бесконечность. На рис. 5а представлена эволюция разности населенностей от времени при различных значениях параметра нелинейности s и фиксированном значении начальной разности фаз $\varphi_0 = \pi/2$.

Видно, что имеется только одна бифуркация изменения характера временной эволюции с переходом через апериодический режим. При малых s период (и амплитуда) колебаний велики по сравнению с периодом и амплитудой при больших значениях параметра s . Эта особенность коррелирует с аналогичной особенностью, которая возникает при учёте только упругих межатомных взаимодействий [18] и свидетельствует о наступлении явления самозахвата. Что касается периода колебаний, то из рис. 5б видно, что он сложным образом зависит от параметра нелинейности s и начальной разности фаз φ_0 . Однако изменение параметра s приводит только к одной бифуркации при определённых значениях s и φ_0 .

Рис. 5. а) эволюция разности населенностей n в зависимости от времени и параметра нелинейности s при фиксированных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и начальной разности фаз $\varphi_0 = \pi/2$; б) период T колебаний разности населенностей n в зависимости от параметра нелинейности s и фиксированных значениях нормированной разности населенностей атомов в ямах $\beta = 0,3$ и нескольких значениях начальной разности фаз φ_0 , равных: 1 (0), 2 ($\pi/2$), 3 (π). Здесь $\tau = \tilde{\kappa}t$, $T_0 = \pi/\tilde{\kappa}$.

Выводы

Из представленных результатов следует, что при учёте упругого межатомного взаимодействия, корреляционного и стимулированного туннелирования характер временной эволюции атомов в ямах может существенно измениться по сравнению с простым случаем, когда в качестве нелинейности рассматривается только лишь упругое межатомное взаимодействие. При равенстве постоянной упругого межатомного взаимодействия и постоянной корреляционного туннелирования, могут возникнуть бифуркационные переходы от периодического к апериодическому режиму эволюции при изменении параметров системы. При малых значениях параметра нелинейности s , т. е. когда упругое межатомное

взаимодействие и корреляционное туннелирование намного меньше, чем стимулированное туннелирование, наблюдается периодический режим эволюции. При увеличении постоянной упругого взаимодействия и корреляционного туннелирования при начальной разности фаз $\varphi_0 \neq k\pi$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) возникает аperiodический режим эволюции, т. е. процесс при котором ямы оказываются равнозаселёнными, чем эволюция и завершается. Что касается стимулированного туннелирования, то его учет приводит только к монотонному, линейному росту эффективного коэффициента туннелирования с ростом полного числа атомов в системе.

Статья поступила в редакцию 19.04.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leggett A. J. Bose–Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts // Reviews of Modern Physics. 2001. Vol. 73. Iss. 2. P. 307–356.
2. Ueda M. Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation. Singapore: Word Scientific, 2010. 368 p.
3. Ananikian D., Bergeman T. Erratum: Gross–Pitaevskii equation for Bose particles in a double well potential: Two mode models and beyond // Physical Review A. 2006. Vol. 73. Iss. 1. P. 013604.
4. Carvalho D. W. S., Foerster A., Gusmao M. A. Ground states of spin-1 bosons in asymmetric double wells // Physical Review A. 2015. Vol. 91. Iss. 3. P. 033608.
5. Wen L. H., Li J. H. Tunneling dynamics between two-component Bose–Einstein condensates // Physics Letters A. 2007. Vol. 369. Iss. 4. P. 307–311.
6. Tunneling, self-trapping, and manipulation of higher modes of a Bose-Einstein condensate in a double well / Gillet J., Garcia-March M. A., Busch Th., Sols F. // Physical Review A. 2014. Vol. 89. Iss. 2. P. 023614.
7. The effects of trap-confinement and interatomic interactions on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose–Einstein condensate / Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K. R., Deb B. [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: <https://arxiv.org/abs/1903.07417> (дата обращения: 02.03.2019).
8. Liu J.-L., Liang J.-Q. Atom-pair tunnelling-induced quantum phase transition and scaling behaviour of fidelity susceptibility in the extended boson Josephson-junction model // Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics. 2011. Vol. 44. No. 2. P. 025101.
9. Zhu Q., Zhang Q., Wu B. Extended two-site Bose–Hubbard model with pair tunneling: spontaneous symmetry breaking, effective ground state and fragmentation // Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics. 2015. Vol. 48. No. 4. P. 045301.
10. Atom-pair tunneling and quantum phase transition in the strong-interaction regime / Liang J.-Q., Liu J.-L., Li W. D., Li Z. J. // Physical Review A. 2009. Vol. 79. Iss. 3. P. 033617.
11. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in a double-well potential / Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: <https://arxiv.org/abs/1507.00786> (дата обращения: 02.03.2019).
12. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in an Abelian-gauge double-well potential / Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu [Электронный ресурс]. URL: https://www.researchgate.net/profile/Linghua_Wen/publication/279808835_Stationary_states_and_quantum_quench_

- dynamics_of_Bose-Einstein_condensates_in_an_Abelian-gauge_double-well_potential/links/564fce7608ae1ef9296ecb29/Stationary-states-and-quantum-quench-dynamics-of-Bose-Einstein-condensates-in-an-Abelian-gauge-double-well-potential.pdf?origin=publication_detail (дата обращения: 02.03.2019).
13. Localized spatially nonlinear matter waves in atomic-molecular Bose-Einstein condensates with space-modulated nonlinearity / Yao Yu-Qin, Li Ji, Han Wei, Wang Deng-Shan, Liu Wu-Ming [Электронный ресурс] // arXiv : [сайт]. URL: <https://arxiv.org/abs/1606.07348> (дата обращения: 02.03.2019).
 14. Direct observation of second-order atom tunneling / Fölling S., Trotzky S., Cheinet P., Feld M., Saers R., Widera A., Müller T., Bloch I. // *Nature*. 2007. Vol. 448. No. 1. P. 1029–1032.
 15. Zöllner S., Meyer H.-D., Schmelcher P. Few-Boson dynamics in double wells: from single-atom to correlated pair tunneling // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. Iss. 4. P. 040401.
 16. Хаджи П. И., Васильева О. Ф. Динамика туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико-математические и технические науки. 2012. № 3 (42). С. 3–12.
 17. Хаджи П. И., Васильева О. Ф. Динамика туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке при учете одноатомного и корреляционно-двухатомного процессов туннелирования // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико-математические и технические науки. 2013. № 3 (45). С. 26–35.
 18. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent Dynamics of Bose Condensed Atoms in a Double-Well Trap // *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*. 2011. Vol. 6. Iss. 4. P. 433–451.

REFERENCES

1. Leggett A. J. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. In: *Reviews of Modern Physics*, 2001, vol. 73, iss. 2, pp. 307–356.
2. Ueda M. Fundamentals and new frontiers of Bose-Einstein condensation. Singapore, World Scientific Publ., 2010. 368 p.
3. Ananikian D., Bergeman T. Erratum: Gross-Pitaevskii equation for Bose particles in a double-well potential: Two mode models and beyond. In: *Physical Review A*, 2006, vol. 73, iss. 1, pp. 013604.
4. Carvalho D. W. S., Foerster A., Gusmao M. A. Ground states of spin-1 bosons in asymmetric double wells. In: *Physical Review A*, 2015, vol. 91, iss. 3, pp. 033608.
5. Wen L. H., Li J. H. Tunneling dynamics between two-component Bose-Einstein condensates. In: *Physics Letters A*, 2007, vol. 369, iss. 4, pp. 307–311.
6. Gillet J., Garcia-March M. A., Busch Th., Sols F. Tunneling, self-trapping, and manipulation of higher modes of a Bose-Einstein condensate in a double well / Gillet J., Garcia-March M. A., Busch Th., Sols F. // *Physical Review A*. 2014. Vol. 89. Iss. 2. P. 023614.
7. Saha A. K., Adhikary K., Mal S., Dastidar K. R., Deb B. The effects of trap-confinement and interatomic interactions on Josephson effects and macroscopic quantum self-trapping for a Bose-Einstein condensate. In: *arXiv*. Available at: <https://arxiv.org/abs/1903.07417> (accessed: 02.03.2019).
8. Liu J.-L., Liang J.-Q. Atom-pair tunnelling-induced quantum phase transition and scaling behaviour of fidelity susceptibility in the extended boson Josephson-junction model. In: *Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2011, vol. 44, no. 2, pp. 025101.

9. Zhu Q., Zhang Q., Wu B. Extended two-site Bose–Hubbard model with pair tunneling: spontaneous symmetry breaking, effective ground state and fragmentation. In: *Journal of Physics. B, Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2015, vol. 48, no. 4, pp. 045301.
10. Liang J.-Q., Liu J.-L., Li W. D., Li Z. J. Atom-pair tunneling and quantum phase transition in the strong-interaction regime. In: *Physical Review A*, 2009, vol. 79, iss. 3, pp. 033617.
11. Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in a double-well potential. In: *arXiv*. Available at: <https://arxiv.org/abs/1507.00786> (accessed: 02.03.2019).
12. Linhua Wen, Qizhong Zhu, Tianfu Xu, Xili Jing, Chengshi Liu. Stationary states and quantum quench dynamics of Bose–Einstein condensates in an Abelian-gauge double-well potential. Available at: https://www.researchgate.net/profile/Linghua_Wen/publication/279808835_Stationary_states_and_quantum_quench_dynamics_of_Bose-Einstein_condensates_in_an_Abelian-gauge_double-well_potential/links/564fce7608ae1ef9296ecb29/Stationary-states-and-quantum-quench-dynamics-of-Bose-Einstein-condensates-in-an-Abelian-gauge-double-well-potential.pdf?origin=publication_detail (accessed: 02.03.2019).
13. Yao Yu-Qin, Li Ji, Han Wei, Wang Deng-Shan, Liu Wu-Ming. Localized spatially nonlinear matter waves in atomic-molecular Bose–Einstein condensates with space-modulated nonlinearity. In: *arXiv*. Available at: <https://arxiv.org/abs/1606.07348> (accessed: 02.03.2019).
14. Fölling S., Trotzky S., Cheinet P., Feld M., Saers R., Widera A., Müller T., Bloch I. Direct observation of second-order atom tunneling. In: *Nature*, 2007, vol. 448, no. 1, pp. 1029–1032.
15. Zöllner S., Meyer H.-D., Schmelcher P. Few-Boson dynamics in double wells: from single-atom to correlated pair tunneling. In: *Physical Review Letters*, 2008, vol. 100, iss. 4, pp. 040401.
16. Khadzhi P. I., Vasil'eva O. F. [Tunneling dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap]. In: *Vestnik Pridnestrovskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Bulletin of the Pridnestrovian University. Series: Physics and mathematics, engineering sciences], 2012, no. 3 (42), pp. 3–12.
17. Khadzhi P. I., Vasil'eva O. F. [Dynamics of tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap with allowance for the monatomic and correlation diatomic tunneling processes]. In: *Vestnik Pridnestrovskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Bulletin of the Pridnestrovian University. Series: Physics and mathematics, engineering sciences], 2013, no. 3 (45), pp. 26–35.
18. Khadzhi P. I., Vasilieva O. F. Coherent dynamics of Bose-condensed atoms in a double-well trap. In: *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics*, 2011, vol. 6, iss. 4, pp. 433–451.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильева Ольга Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Зинган Анна Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой радиофизики и систем связи Приднестровского государственного университета имени Т. Г. Шевченко;
e-mail: zingan.anna@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga F. Vasilieva – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: florina_of@mail.ru;

Anna P. Zingan – PhD in physical and mathematical sciences, associate professor at the Department of Quantum Radiophysics and Communication Systems, Pridnestrovian State University;
e-mail: zingan.anna@mail.ru.

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Васильева О. Ф., Зинган А. П. Динамика нелинейного туннелирования бозе-конденсированных атомов в двухъямной ловушке // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2019. № 2. С. 83–95.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95

FOR CITATION

Vasilieva O. F., Zingan A. P. Dynamics of nonlinear tunneling of Bose-condensed atoms in a double-well trap In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 83–95.
DOI: 10.18384-2310-7251-2019-2-83-95