

УДК 336.02

DOI: 10.18384/2310-6646-2019-4-89-97

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ТРЕНД-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Юров В. М.**

*Московский государственный областной университет  
141014, Московская обл., г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская  
Федерация*

*Технологический университет  
141070, Московская обл., г. Королев, ул. Гагарина, д. 42, Российская Федерация*

**Аннотация.** Целью исследования явилась разработка способа определения доверительных интервалов при прогнозировании социально-экономических процессов и явлений, содержащих тренд, сезонные и циклические колебания, с использованием методов гармонического анализа и его реализация в Excel. Способ предполагает построение модели временного ряда в виде уравнения множественной линейной регрессии, включающей тренд и только несколько значимых гармоник для сезонной и циклической компонент. Это позволило для определения доверительных интервалов использовать подход, применяемый для интервального оценивания прогноза по уравнению множественной линейной регрессии. Способ реализован на примере построения точечного и интервального прогнозов для временного ряда, включающего тренд, сезонные и циклические колебания. Показана высокая прогностическая способность модели при прогнозировании тренд-периодических процессов.

**Ключевые слова:** временной ряд, тренд, сезонность, циклическая компонента, точечный прогноз, интервальный прогноз, гармонический анализ, ретропрогноз

## DETERMINATION OF CONFIDENTIAL INTERVALS AT FORECASTING TREND-PERIODIC ECONOMIC PROCESSES WITH HARMONIC ANALYSIS METHODS

**V. Yurov**

*Moscow Region State University  
24, Very Voloshinoy st., Mytishchi, 141014, Moscow Region, Russian Federation*

*University of Technology  
42, Gagarin st., Korolev, 141070, Moscow Region, Russian Federation*

**Abstract.** The purpose of the study was to develop a method for constructing an interval forecast of trend-periodic economic processes using harmonic analysis methods and EXCEL tools. The

method involves constructing a time series model in the form of a multiple linear regression equation that includes a trend and only a few significant harmonics for the seasonal and cyclic components. This allows for the determination of confidence intervals to use the approach used for interval estimation of the forecast using the multiple linear regression equation. The method is implemented by the example of constructing point and interval forecasts for a time series including a trend, seasonal and cyclical fluctuations. The high predictive ability of the model in predicting trend-periodic processes is shown.

**Keywords:** time series, trend, seasonality, cyclical component, point forecast, interval forecast, harmonic analysis, retro prediction

В рыночной экономике многие социально-экономические процессы являются стихийными и подвержены как случайным, так и постоянно повторяющимся колебаниям, в т. ч. с выраженной периодичностью. Обычно выделяют *сезонные* и *циклические* колебания. Сезонные колебания более или менее устойчиво повторяются из года в год. Они связаны со сменой времён года или повторением календарно-зависимых событий (школьные каникулы или праздники). Циклические колебания имеют более длительный период в несколько лет, они могут более существенно меняться и по амплитуде колебаний, и по длительности цикла. Такие колебания называют бизнес-циклами. Их причиной обычно являются последовательные подъёмы и спады производства. Неспрогнозированные колебания негативно сказываются на результатах производственной деятельности, вызывают неритмичность производства, неполную занятость персонала и оборудования, в результате снижается производительность труда и ухудшаются показатели уровня жизни населения.

В этой связи особое значение приобретает построение прогнозов развития социально-экономических процессов с учётом тренда, сезонных и циклических

колебаний. Чаще всего определяется точечный прогноз. Однако вероятность точной реализации такого прогноза очень мала. Поэтому его необходимо дополнить интервальным прогнозом, т. е. установить пределы, внутри которых будут находиться прогнозируемые значения изучаемого показателя с заданным уровнем значимости.

Для анализа развития таких процессов и построения математических моделей для их прогнозирования широко используется гармонический анализ. Метод гармонического анализа реализован во многих статистических пакетах [6]. Однако в большинстве случаев статистические пакеты позволяют строить доверительные интервалы в основном только для моделей тренда и имеют ряд недостатков: они требуют специального образования, профессиональных навыков и высокой квалификации пользователей; в них фактически отсутствует возможность реализации собственных алгоритмов, имеют высокую цену. В отличие от них программа MS Excel является доступной, включает множество статистических функций и инструментов и позволяет создавать собственные алгоритмы. Для небольших предприятий программа MS Excel будет экономически выгодной.

Целью исследования являются разработка способа определения доверительных интервалов при прогнозировании социально-экономических процессов и явлений, содержащих тренд, сезонные и циклические колебания, с использованием методов гармонического анализа и его реализация в Excel.

Технология построения точного прогноза с использованием методов гармонического анализа уже рассматривалась автором ранее [7]. Временной ряд  $Y_t$ , описывающий рассматриваемые процессы, представляется состоящим из тренда  $T_t$ , сезонной  $S_t$ , циклической  $C_t$  и случайной  $\varepsilon_t$  компонент. Здесь  $t$  – момент времени.

Конкретные модели функциональных взаимосвязей этих компонентов могут быть разными. На практике широко применяется аддитивная модель вида  $Y_t = T_t + C_t + S_t + \varepsilon_t$ .

В зависимости от характера развития прогнозируемого процесса для уравнения тренда можно использовать следующие функции:

- при равномерном развитии процесса – линейную функцию:  $T_t = c_0 + c_1 t$ ;
- при росте с ускорением – параболу второго порядка:  $Y_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ ;
- при снижении с замедлением – гиперболическую функцию:  $Y_t = c_0 + c_1 / t$  и др.

Первая из этих функций является линейной, а две другие путём замены переменных приводятся к линейному виду.

Периодические компоненты модели раскладываются на функции синусов и косинусов различных частот. Тогда обобщённая аддитивная модель ряда будет иметь вид [1]:

$$\hat{Y}_t = T_t + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos(\omega kt) + \sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin(\omega kt), \quad (1)$$

где:

$T_t$  – тренд ряда, представленный линейной функцией;

$\omega = \frac{2\pi}{N}$  – основная частота колебаний;

$N$  – число уровней ряда, используемых для прогнозирования;

$a_k$  и  $b_k$  – коэффициенты Фурье, определяемые по формулам:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \cos(\omega kt);$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \sin(\omega kt)$$

при  $k = 1 \dots (N/2 - 1)$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \cos(\omega kt); b_k = 0$$

при  $k = N/2$ .

$$u_{kt} = \cos(k\omega t)$$

Модель ряда (1) является моделью множественной линейной регрессии, в которой резульативная переменная – уровни наблюдаемого временного ряда  $Y_t$ , а объясняющие переменные – переменные линейного уравнения тренда и функции синусов и косинусов:  $u_{kt} = \cos(k\omega t)$  и  $z_{kt} = \sin(k\omega t)$ .

Для определения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  в MS Excel можно использовать инструмент «Регрессия» надстройки «Анализ данных», а при числе уровней ряда равному числу 2 в степени 2, 3, 4 и т. д. – инструмент «Анализ Фурье» той же надстройки. Алгоритм определения коэффициентов модели с ис-

пользованием этих инструментов рассмотрен в работах Протасова Ю. М. и Юрова В. М. [3; 4].

В модели (1) далеко не все гармоники будут значимы. Для отбора гармоник, включаемых в модель, необходимо оценить роль и значимость каждой гармоники. Для этого можно использовать удельный вес гармоник  $d_k$  или статистику Фишера  $F_k$  [1] и соответствующее ей расчётное значение уровня значимости  $p_k$ . Первые два критерия определяются по формулам:

$$d_k = \sigma_k^2 / \sum_{k=1}^{N/2} \sigma_k^2,$$

$$F_k = \frac{\sigma_k^2 / 2}{\sigma_{i\bar{n}}^2 / N},$$

где:

$\sigma_k^2 = \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}$  – дисперсия, учитываемая одной гармоникой;

$$\sigma_{ост}^2 = \left[ \sum_{k=1}^{N/2} \sigma_k^2 - \sum_j \sigma_{k(j)}^2 \right] N / [N - (2q + 1)]$$

– остаточная дисперсия ряда;  
 $j$  и  $q$  – соответственно номера и число гармоник, учитываемых в модели.

Уровень значимости  $p_k$  находится с помощью функции Excel F.РАСП при найденном значении  $F_k$  и числе степеней свободы  $N$  и  $N - (2q + 1)$ . Значимыми считаются те гармоники, для которых уровень значимости  $p_k$  меньше критического значения.

После исключения из модели незначимых гармоник будет получена линейная модель ряда, включающего тренд, и только несколько значимых гармоник для периодических компонент.

Точечный прогноз получается путём подстановки в уравнение полученной модели временного ряда  $\hat{Y}(t)$  прогнозируемого периода  $t_{пр}$ .

Интервальный прогноз при уровне значимости  $\alpha$  будет определяться в виде:

$$Y(t_{пр}) = \hat{Y}(t_{пр}) \pm t_{\alpha, l} S_{Y(t_{пр})}, \quad (2)$$

где:

$\hat{Y}(t_{пр})$  – точечный прогноз, рассчитанный по уравнению регрессии;

$t_{\alpha, l}$  – квантиль распределения Стьюдента при уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы  $l = N - m - 1$ ;

$m$  – число объясняющих переменных в уравнении модели;

$S_{\hat{Y}(t_{пр})}$  – средняя квадратическая ошибка прогноза положения линии регрессии на момент времени  $t_{пр}$ . Её оценка для линейного уравнения регрессии определяется выражением [2]:

$$S_{\hat{Y}(t_{пр})} = \sqrt{S_{ост}^2 \cdot \sqrt{1 + X_{пр}^T (X^T X)^{-1} X_{пр}}}, \quad (3)$$

где:

$$S_{ост}^2 = \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{N - m - 1}$$

– дисперсия ряда;

$X$  – матрица исходных данных объясняющих переменных размером  $N(m+1)$  (состоит из  $N$  строк и  $m+1$  столбцов). Например, для модели вида (1) с линейным трендом матрица  $X$  имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & u_{k1} & z_{k1} & u_{k2} & z_{k2} & \dots \\ 1 & 2 & u_{k2} & z_{k2} & u_{k2} & z_{k2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N & u_{kN} & z_{kN} & u_{k2N} & z_{k2N} & \dots \end{bmatrix},$$

$X_{np}$  – вектор, координатами которого являются значения объясняющих переменных для прогнозируемого момента времени  $t_{np}$ . В вектор  $X_{np}$  дополнительно введена единица, т. к. предполагается, что свободному члену модели соответствует фиктивная переменная, равная 1. Вектор  $X_{np}$  для рассматриваемых моделей тренда имеет вид:

для линейного тренда  $X_{np} = [1, t_{np}, \cos(k\omega t_{np}), \sin(k\omega t_{np}), \dots, \cos(m\omega t_{np}), \sin(m\omega t_{np})]^T$ .

для квадратического тренда:

$X_{np} = [1, t_{np}, t_{np}^2, \cos(k\omega t_{np}), \sin(k\omega t_{np}), \dots, \cos(m\omega t_{np}), \sin(m\omega t_{np})]^T$ ;

для гиперболической функции:

$X_{np} = [1, 1/t_{np}, \cos(k\omega t_{np}), \sin(k\omega t_{np}), \dots, \cos(m\omega t_{np}), \sin(m\omega t_{np})]^T$ .

Все элементы в модели являются функциями времени  $t$ , значения  $k$  соответствуют номерам отобранных гармоник, символ  $T$  означает транспонирование матрицы.

Построение интервального прогноза рассматривается на примере ряда

ежеквартальных данных об объёмах продаж компании [5]. Ряд включает тренд, сезонные и циклические колебания. Для обеспечения возможности верификации модели имеющиеся исходные данные разделены на 2 части, последние 20 уровней ряда используются для построения модели, а первые 12 уровней – для её верификации.

В работе автора «Технология прогнозирования периодических экономических процессов с использованием методов гармонического анализа в MS Excel» [7] были получены следующие модели компонент этого ряда, используемых для точечного прогнозирования:

$$T_t = 1,31 t + 253,2;$$

$$S_t = -47,72 \cos(5\omega t) - 7,56 \sin(5\omega t) - 17,76 \cos(10\omega t); \quad (4)$$

$$C_t = -8,25 \cos(\omega t) - 8,25 \sin(\omega t) - 8,25 \cos(2\omega t) + 15,26 \sin(2\omega t).$$

Показатели точности полученной аддитивной модели (процентная



Рис. 1. Графики исходных, модельных и ретропрогнозных значений уровней ряда

ошибка 4,03 %; средняя квадратическая ошибка  $\sigma_{\text{ост}} = 11,4$  д. е.), а также графики исходных, модельных и ретроспективных значений уровней ряда (рис. 1) свидетельствуют о высокой точности построенной модели.

Проведём оценку доверительных интервалов ретропрогноза для данного ряда с использованием средств MS Excel.

Расчитанные значения элементов матрицы  $X$  представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения элементов матрицы  $X$ 

$a_0$	$t$	$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$	$\cos(2\omega t)$	$\sin(2\omega t)$	$\cos(5\omega t)$	$\sin(5\omega t)$	$\cos(10\omega t)$
1	1	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1	0	1
1	2	0,9511	0,3090	0,8090	0,5878	0	1	-1
1	3	0,8090	0,5878	0,3090	0,9511	-1	0	1
1	4	0,5878	0,8090	-0,3090	0,9511	0	-1	-1
1	5	0,3090	0,9511	-0,8090	0,5878	1	0	1
1	6	0,0000	1,0000	-1,0000	0,0000	0	1	-1
1	7	-0,3090	0,9511	-0,8090	-0,5878	-1	0	1
1	8	-0,5878	0,8090	-0,3090	-0,9511	0	-1	-1
1	9	-0,8090	0,5878	0,3090	-0,9511	1	0	1
1	10	-0,9511	0,3090	0,8090	-0,5878	0	1	-1
1	11	-1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	-1	0	1
1	12	-0,9511	-0,3090	0,8090	0,5878	0	-1	-1
1	13	-0,8090	-0,5878	0,3090	0,9511	1	0	1
1	14	-0,5878	-0,8090	-0,3090	0,9511	0	1	-1
1	15	-0,3090	-0,9511	-0,8090	0,5878	-1	0	1
1	16	0,0000	-1,0000	-1,0000	0,0000	0	-1	-1
1	17	0,3090	-0,9511	-0,8090	-0,5878	1	0	1
1	18	0,5878	-0,8090	-0,3090	-0,9511	0	1	-1
1	19	0,8090	-0,5878	0,3090	-0,9511	-1	0	1
1	20	0,9511	-0,3090	0,8090	-0,5878	0	-1	-1

Для удобства начало координаты  $t$  перенесено на 13 квартал.

Нахождения транспонированной матрицы  $X^T$  проводится с использованием функции Excel ТРАНСП. Для определения произведения матриц  $X^T X$  применяем функцию Excel

МУМН, а для нахождения обратной матрицы  $(X^T X)^{-1}$  – функцию МОБР.

Матрица  $X_{np}^T$  представляет вектор-строку и для  $t = 0 \dots -3$  (соответствуют кварталам 12...9) имеет значения своих элементов (табл. 2).

Таблица 2.

Значения элементов матрицы  $X_{пр}^T$ 

$a_0$	$t$	$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$	$\cos(2\omega t)$	$\sin(2\omega t)$	$\cos(5\omega t)$	$\sin(5\omega t)$	$\cos(10\omega t)$
1	-3	0,3090	-0,9511	-0,8090	-0,5878	1	0	1
1	-2	0,5878	-0,8090	-0,3090	-0,9511	0	1	-1
1	-1	0,8090	-0,5878	0,3090	-0,9511	-1	0	1
1	0	0,9511	-0,3090	0,8090	-0,5878	0	-1	-1

Значения произведения матриц  $X_{пр}^T * \text{МОБР} * X_{пр}$ , величина рассчитанных по формулам (2 и 3) значений доверительного интервала  $\Delta = t_{\alpha, l} S_{\hat{Y}(t_{пр})}$

при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , значения фактических уровней ряда и результаты расчётов доверительных границ для прогнозируемых значений  $t_{пр}$  представлены в табл. 3.

Таблица 3

## Результаты расчётов

$t_{пр}$	$X_{пр}^T * \text{МОБР} * X_{пр}$	$\Delta$	$Y_t$	$Y_{тпр}$	$Y_{тпр} + \Delta$	$Y_{тпр} - \Delta$
0	1,9476	40,8	315,2	288,3	329,1	247,5
-1	2,8238	46,5	292,5	293,1	339,6	246,6
-2	3,4820	50,3	263,7	271,5	321,8	221,2
-3	3,6584	51,3	193,2	190,4	241,8	139,1

Таким образом, определены верхние и нижние доверительные границы прогнозируемых значений изучаемого показателя. Все фактические значения уровней ряда  $Y_t$  вошли в зону доверительных границ  $Y_{тпр} \pm \Delta$  с доверительной вероятностью 0,95.

Итак, разработан способ оценки доверительных интервалов при прогнозировании социально-экономических процессов, включающих в общем случае тренд, сезонные и циклические колебания, с использованием средств Excel. Он заключается в построении модели временного ряда в виде уравнения множественной линейной регрессии, состоящей из тренда и только

нескольких значимых гармоник для сезонной и циклической компонент. Для построения доверительных интервалов используется подход, применяемый для интервального оценивания прогноза по уравнению множественной линейной регрессии. Способ реализован на примере построения точечного и интервального прогнозов для временного ряда, включающего все указанные выше компоненты. Показана высокая прогностическая способность модели при прогнозировании тренд-периодических процессов. Для построения модели ряда и определения интервальных оценок предусматривается использование

инструментов Excel «Анализ Фурье», прогнозной модели и проверки её «Регрессия», математических функций для работы с матрицами, статистических функций, необходимых для идентификации и оценки параметров

Статья поступила  
в редакцию 08.11.2019

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсен Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 754 с.
2. Кремер Н. Ш., Путко Б. А. Эконометрика: учеб. М.: Юрайт, 2019. 308 с.
3. Протасов Ю. М., Юров В. М. Моделирование сезонных и циклических колебаний объёмов продаж компании с использованием методов гармонического анализа в MS EXCEL // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. 2015. № 2. С. 101–108.
4. Протасов Ю. М., Юров В. М. Гармонический анализ периодических колебаний продаж компании на основе инструмента «Регрессия» MS Excel // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. 2016. № 2. С. 115–121.
5. Ханк Д. Э, Уичерн Д. У., Райтс А. Д. Бизнес-прогнозирование. М., 2003. 652 с.
6. Цыпин А. П., Сорокин А. С. Статистические пакеты программ в социально-экономических исследованиях // Азимут научных исследований: Экономика и управление. 2016. Т. 5. № 4 (17). С. 379–384.
7. Юров В. М. Технология прогнозирования периодических экономических процессов с использованием методов гармонического анализа в MS Excel // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. 2018. № 3. С. 19–28.

#### REFERENCES

1. Andersen T. *Statisticheskii analiz vremennykh ryadov* [Statistical Analysis of Time Series]. Moscow, Mir Publ., 1976. 754 p.
2. Kremer N. S., Putko B. A. *Ekonometrika*: [Econometrics]. Moscow, Yurait Publ., 2019. 308 p.
3. Protasov Yu. M., Yurov V. M. [Modeling seasonal and cyclical fluctuations in sales of the company using methods of harmonic analysis in MS EXCEL]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Ekonomika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics], 2015, no. 2, pp. 101–108.
4. Protasov Yu. M., Yurov V. M. [Harmonic analysis of periodic fluctuations in sales based on the Regression tool in MS Excel]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Ekonomika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics], 2016, no. 2, pp. 115–121.
5. Khank D. E, Uichern D. U., Raits A. D. *Biznes-prognozirovanie* [Business Forecasting]. Moscow, 2003. 652 p.
6. Tsy-pin A. P., Sorokin A. S. [Statistical software packages in social and economic research]. In: *Azimut nauchnykh issledovaniy: Ekonomika i upravlenie* [Azimuth of Scientific Research: Economics and Management], 2016, vol. 5, no. 4 (17), pp. 379–384.
7. Yurov V. M. [Technology of forecasting periodic economic processes using methods of harmonic analysis in MS Excel]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Ekonomika* [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics], 2018, no. 3, pp. 19–28.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

*Юров Владимир Михайлович* – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Московского государственного областного университета, доцент кафедры управления качеством и стандартизации Технологического университета;  
e-mail: urow5@mail.ru

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

*Vladimir M. Yurov* – PhD in Engineering, associate professor at the Department of Applied Mathematics and Informatics, Moscow Region State University, associate professor at the Department of Quality Management and Standardization, Technological University;  
e-mail: urow5@mail.ru

---

### ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА

Юров В. М. Определение доверительных интервалов при прогнозировании тренд-периодических экономических процессов с использованием методов гармонического анализа // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Экономика. 2019. № 4. С. 89–97.  
DOI: 10.18384/2310-6646-2019-4-89-97

### FOR CITATION

Yurov V. M. Determination of Confidential Intervals at Forecasting Trend-Periodic Economic Processes with Harmonic Analysis Methods. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Economics*, 2019, no. 4, pp. 89–97.  
DOI: 10.18384/2310-6646-2019-4-89-97