РАЗДЕЛ I. МАТЕМАТИКА

УДК 519.47
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-8-16

О ЛОКАЛЬНЫХ 3-ТКАНЯХ, ПРИСОЕДИНЁННЫХ К ГАМИЛЬТОНОВЫМ СИСТЕМАМ НА КОКАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ НАД ГЛАДКИМ МНОГООБРАЗИЕМ

Ищенко О. С., Матвеев О. А.

Московский государственный областной университет
141014, Московская область, г. Мытищи, ул. Веры Волошиной, д. 24, Российская Федерация

Аннотация. Гамильтоновой системе дифференциальных уравнений, заданной на кокасательном расслоении $T^*(M)$ гладкого многообразия M размерности n, соответствующей функции Гамильтона H и имеющей n первых интегралов ставится в соответствие одно-параметрическое семейство три-тканей, определенных (локально) на кокасательном расслоении $T^*(M)$. Дифференциально-алгебраические свойства построенного семейства три-тканей отражают свойства исходной гамильтоновой системы.

Ключевые слова: три-ткань, кокасательное расслоение дифференцируемого многообразия, гамильтонова система дифференциальных уравнений

LOCAL THREE-WEBS ADDED TO HAMILTON SYSTEMS ON A COTANGENT BUNDLE ABOVE A SMOOTH MANIFOLD

O. Ishchenko, O. Matveyev

Moscow Region State University
ul. Very Voloshinoi 24, 141014 Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. A one-parameter family of three-webs is put in accordance with the Hamilton system of differential equations on a cotangent bundle T^* (M) above ат n dimensional differentiable manifold M, corresponding a Hamiltonian H, having n first integrals. The differentially algebraic properties of the constructed family of three-webs reflect the properties of the initial Hamilton system.

Keywords: three-web, cotangent bundle of a differentiable manifold, Hamilton system of differential equations

Теория три- и многомерных тканей, пограничная территория между дифференциальной геометрией и алгеброй, имеет давнюю историю. Хорошо известны её тесные связи с геометрической теорией пространств аффинной связности и алгебраической теорией квазигрупп и луп. В настоящий временной период развитие этой перспективной области математики связано, прежде всего, с такими выдающимися исследователями, как М. А. Акивис, А. М. Шелехов, В. В. Гольдберг (см., например, [1; 2; 7; 9]). Научная школа профессора А. М. Шелехова (Тверь, Москва) привнесла существенный вклад и в теорию неассоциативных универсальных алгебр, и в теорию тканей.

Идея приложений теории тканей к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений не нова. Известно, например, совместное рассмотрение свойств интегральных кривых дифференциального уравнения Риккати и три-тканей специального вида [9]. С другой стороны, предпринят подход применения методов теории гладких локальных квазигрупп и алгебраической теории аффинной связности [6] к исследованию Лагранжевых механических систем [4; 5]. В замечательной книге [8] систематически рассматривается алгебраическая и геометрическая составляющие в теории интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений, на первое место ставится теория групп и алгебр Ли, однако значение квазигрупп и луп явно не выявляется.

В настоящей работе гамильтоновой системе, заданной на кокасательном расслоении $T^*(M)$ гладкого многообразия M размерности n, имеющей n первых интегралов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ставится в соответствие однопараметрическое семейство три-тканей $W_\tau(H; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, определённых (локально) на касательном расслоении $T^*(M)$. Дифференциально-алгебраические свойства построенного семейства три-тканей $W_\tau(H; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ отражают, как нам представляется, некоторые свойства исходной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений.

Пусть M – гладкое многообразие размерности n, $T^*(M)$ – его касательное расслоение, ω^2 – естественная симплектическая структура на $T^*(M)$. В локальных координатах $(q^i, p_i)\omega^2$ задаётся формулой:

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i. \tag{1}$$

Приведём некоторые стандартные определения гамильтонова формализма, см., например, [3; 8].

Определение 1. Пусть f – некоторая гладкая функция на $T^*(M)$. Кососимметрическим градиентом *sgradf* функции f называется гладкое векторное поле на $T^*(M)$, однозначно определяемое соотношением:

$$\omega^2\left(v, sgradf\right) = v\left(f\right),$$

где v пробегает множество всех гладких векторных полей на $T^*(M)$, а $v(t)$ – значение дифференциального оператора (векторного поля) на функции f.

В локальных координатах (q^i, p_i) векторное поле $sgradf$ имеет вид:

$$sgrad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_n}, -\frac{\partial f}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial q_n} \right). \tag{2}$$

Определение 2. Гладкое векторное поле v на $T^*(M)$ называется гамильтоновым, если оно имеет вид $v = sgradH$, где H – некоторая гладкая функция на $T^*(M)$, называемая гамильтонианом.

В локальных координатах (q^i, p_i) интегральные траектории $\gamma(t) = (q^i(t), p_i(t))$ гамильтонова векторного поля v удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Определение 3. Пусть $\overline{q}$, $\hat{q}$ – некоторые точки многообразия M, τ – некоторое действительное число. Известно [3] (гл. 9 §46 B), что найдутся такая окрестность $U \subset M$ и такое достаточно малое положительное действительное число ε, что при $\overline{q} \in U$, $\hat{q} \in U$, $|\tau| < \varepsilon$ существует единственная интегральная траектория $\gamma(t) = (q^i(t), p_i(t))$ гамильтонова поля, такая что:

$$\begin{cases} q^i(0) = \overline{q}^{\,i}, \\ q^i(\tau) = \hat{q}^{\,i}, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Следовательно, при $\overline{q}, \hat{q} \in U$, $|\tau| < \varepsilon$ корректно определена функция $S(\overline{q}, \hat{q}, \tau)$ следующим равенством:

$$S(\overline{q}, \hat{q}, \tau) \overset{def}{=} \int\limits_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq^i - Hdt \right), \tag{5}$$

где H – гамильтониан, и интеграл берётся вдоль отрезка интегральной кривой $\gamma(t) = (q^i(t), p_i(t))$, $0 \le t \le \tau$, удовлетворяющей условиям (4). Функция $S(\overline{q}, \hat{q}, \tau)$ называется функцией действия гамильтонова поля v.

Введём обозначения:

$$\begin{array}{l} \overline{p}_i = p_i(0), \\ \hat{p}_i = p_i(\tau), \end{array} \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Лемма. Для функции действия $S(\overline{q}, \hat{q}, \tau)$ гамильтонова поля v с гамильтонианом $H(q, p)$ справедливы соотношения:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{q}^i}\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)=\hat{p}_i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{7}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{q}^{\,i}}\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)=-\overline{p}_i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)=-H. \tag{9}$$

Соотношения (7), (9) доказаны в [3] (гл. 9 §46), где рассматривается дифференциал функции действия при фиксированной начальной точке $\overline{q}$. Равенства (8) доказываются аналогичным образом, если фиксировать не начальную точку $\overline{q}$, а конечную точку $\hat{q}$.

Следствие. Функция действия $S\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)$ гамильтонова поля v с гамильтонианом $H(q,p)$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)+H\left(\hat{q},\frac{\partial S}{\partial \hat{q}}\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)\right)=0. \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)+H\left(\overline{q},-\frac{\partial S}{\partial \overline{q}}\left(\overline{q},\hat{q},\tau\right)\right)=0. \tag{11}$$

Введём следующие обозначения, пусть:

$$\begin{cases} q^i=\mu^i\left(\overline{q},\overline{p},t\right),\\ p_i=\nu_i\left(\overline{q},\overline{p},t\right),\end{cases}\quad i=\overline{1,n}. \tag{12}$$

является решением системы (3) при начальных условиях:

$$\begin{cases} q^i\left(0\right)=\overline{q}^i,\\ p_i\left(0\right)=\overline{p}_i,\end{cases}\quad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Ясно, что

$$\hat{q}^i=\mu^i\left(\overline{q},\overline{p},\tau\right),\quad i=\overline{1,n}, \tag{14}$$

$$\hat{p}_i=\nu_i\left(\overline{q},\overline{p},\tau\right),\quad i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Подставляя равенства (14) в соотношение (8), получаем тождества:

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{q}^{\,i}}\left(\overline{q},\mu\left(\overline{q},\overline{p},\tau\right),\tau\right)\equiv-\overline{p}_i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Дифференцируя тождества (16) по $\overline{p}_k$, имеем:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \overline{q}^{\,i} \partial \hat{q}^{\,i}} \frac{\partial \mu^i}{\partial \overline{p}_k} = -\delta_{ik}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \overline{q}^{\,i} \partial \hat{q}^{\,i}}(\overline{q}, \hat{q}, \tau)\right] \neq 0, \tag{18}$$

$$\det\left[\frac{\partial \mu^i}{\partial \overline{p}_k}(\overline{q}, \overline{p}, \tau)\right] \neq 0. \tag{19}$$

Так как функция действия $S(\overline{q}, \hat{q}, \tau)$ удовлетворяет условию (18), то по теореме о неявной функции равенства (7) разрешимы относительно переменных $\overline{q}^{\,i}$, $i = \overline{1,n}$:

$$\overline{q}^{\,i} = \lambda^i(\hat{q}, \hat{p}, \tau), \quad i = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Приступим к построению локальной 3-ткани на кокасательном расслоении $T^*(M)$. Определения и первоначальные конструкции теории тканей приведены, например, в [9].

Определение 4. Определим $M_{\overline{q},\tau}$ как совместную поверхность уровня функций $\lambda_i(q, p, \tau)$ при фиксированном $t = \tau$, то есть:

$$M_{\overline{q},\tau} = \left\{(q, p) \in T^*(M) : \lambda^i(q, p, \tau) = \overline{q}^{\,i}, \quad i = \overline{1,n}\right\}. \tag{21}$$

Предложение 1. Существует такое положительное число ε, что при $|\tau| < \varepsilon$ поверхность $M_{\overline{q},\tau}$ является гладким n-мерным подмногообразием в $T^*(M)$.

Доказательство. Так как согласно определению функций λ^i, μ^i:

$$\mu^i(\hat{q}, \hat{p}, -\tau) = \lambda^i(\hat{q}, \hat{p}, \tau), \quad i = \overline{1,n} \tag{22}$$

то $\lambda^i(q, p, 0) \equiv q^i$, и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial \lambda^i(q, p, \tau)}{\partial q_j}\right|_{\tau=0} \equiv \delta^i_j. \tag{23}$$

Из (23) следует, что существует такое положительное число ε, что при $|\tau| < \varepsilon$ функции $\lambda^i(q, p, \tau)$ функционально независимы (при фиксированном τ) на $T^*(M)$, то есть градиенты $grad\ \lambda^i$, $i = \overline{1,n}$, линейно независимы на $T^*(M)$. Следовательно, в силу теоремы о неявных функциях, поверхность $M_{\overline{q},\tau}$ является гладким n-мерным подмногообразием в $T^*(M)$.

Предложение 2. Пусть G – одномерная группа диффеоморфизмов кокасательного расслоения $T^*(M)$, представленная сдвигами вдоль интегральных траекторий гамильтонова поля v, то есть если $g_\tau \in G$, то:

$$g_\tau = \left(\overline{q}^{\,i}, \overline{p}_i\right) = \left(\mu^i\left(\overline{q}, \overline{p}, \tau\right), \nu_i\left(\overline{q}, \overline{p}, \tau\right)\right).$$

Тогда справедливо равенство:

$$M_{\overline{q},\tau} = g_\tau\left(T^*_{\overline{q}}\left(M\right)\right). \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $\left(\overline{q}^{\,i}, \overline{p}_i\right) \in T^*_{\overline{q}}\left(M\right)$, и пусть $g_\tau\left(\overline{q}^{\,i}, \overline{p}_i\right) = \left(\hat{q}^{\,i}, \hat{p}_i\right)$, тогда $g_{-\tau}\left(\hat{q}^{\,i}, \hat{p}_i\right) = \left(\overline{q}^{\,i}, \overline{p}_i\right)$, то есть:

$$\mu^i\left(\hat{q}^{\,i}, \hat{p} - \tau\right) = \overline{q}^{\,i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{25}$$

Следовательно, в силу равенства (22) $\lambda^i\left(\hat{q}, \hat{p}, \tau\right) = \overline{q}^{\,i}$, $i = \overline{1,n}$, то есть $\left(\hat{q}, \hat{p}\right) \in M_{\overline{q},\tau}$. Таким образом, доказано, что $g_\tau\left(T^*_{\overline{q}}\left(M\right)\right) \subset M_{\overline{q},\tau}$, но так как g_τ – диффеоморфизм, а размерности $T^*_{\overline{q}}\left(M\right)$ и $M_{\overline{q},\tau}$ в силу предложения 1 совпадают, то $M_{\overline{q},\tau} = g_\tau\left(T^*_{\overline{q}}\left(M\right)\right)$.

Следствие. Совместная поверхность $M_{\overline{q},\tau}$ не зависит от выбора локальных координат (q^i, p_i).

Суммируя полученные выше результаты, приходим в следующей теореме.

Теорема. Пусть на кокасательном расслоении $T^*(M)$ определено гамильтоново векторное поле v и заданы n первых интегралов $\varphi_1, ..., \varphi_n$ гамильтонова поля $v(n = dimM)$, подчиняющихся условию:

$$det\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i}\left(q, p\right)\right] \neq 0, \tag{26}$$

где (q^i, p_i) – локальные координаты на $T^*(M)$.

Пусть N_a – совместная поверхность уровня функций φ_i, то есть:

$$N_a \overset{def}{=} \left\{\left(q, p\right) \in T^*\left(M\right) : \varphi_i\left(q, p\right) = a_i, \quad i = \overline{1,n}\right\}. \tag{27}$$

Тогда существует такое положительное число ε, что при $0 < |\tau| < \varepsilon$ на кокасательном расслоении $T^*(M)$ определена (локально) три-ткань, слоями которой являются $T^*_{\overline{q}}\left(M\right)$, $M_{\overline{q},\tau}$, N_a.

Построенную таким образом 3-ткань, присоединённую к гамильтонову векторному полю v посредством первых интегралов $\varphi_1, ..., \varphi_n$, будем обозначать $W_\tau(H, \varphi_1, ..., \varphi_n)$, где $H = H(p, q)$ – функция Гамильтона.

Пример. На кокасательном расслоении $T^*(M)$ гладкого многообразия M размерности n рассмотрим функцию Гамильтона $H = K(p)$. Уравнения Гамильтона в локальной системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = K'(p) = \dfrac{dK(p)}{dp}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Имеем n первых интегралов $p_1 = a_1, \ldots, p_n = a_n$, $a_i = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,n}$.

Решение системы (28) в соответствии с (4) имеет вид:

$$p_i = a_i; \quad q^i(t) = q^i(0) + tK'(a_1, \ldots, a_n); \quad q^i(t) = \overline{q}^i + \frac{(\hat{q}^i - \overline{q}^i)t}{\tau}.$$

Функция действия имеет вид:

$$S(\overline{q}, \hat{q}, \tau) = \frac{(\hat{q}^i - \overline{q}^i)^2}{2\tau},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{q}^i} = \frac{\hat{q}^i - \overline{q}^i}{\tau} = \hat{p}_i, \quad \overline{q}^i = \hat{q}^i - a_i \tau.$$

Слоями 3-ткани $W_\tau(K, p_1, ..., p_n)$ являются $T_q^*(M)$; $N_a = \{(q,p) \in T^*(M);$ $p_i = a_i,\ i = \overline{1,n}\}$; $M_{\overline{q},\tau} = \{(\overline{q}^1 + a_1\tau, \ldots, \overline{q}^n + a_n\tau\ ; a_1, \ldots, a_n) \subset T(M)\}$.

Предложение 3. Ткань $W_\tau(K, p_1, ..., p_n)$ – параллелезуема.

Следствие. Пусть размерность многообразия M равна 1, в локальных координатах гамильтониан имеет вид:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + U(q). \tag{29}$$

3-ткань $W_\tau(H, H)$ является параллелизуемой тогда и только тогда, когда $U(q) = \mathrm{const}$.

Замечание. Первое слагаемое в равенстве (29) в теоретической механике интерпретируют как кинетическую энергию, а второе как потенциальную.

Статья поступила в редакцию 23.05.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А., Шелехов А. М. Метод Картана-Лаптева в теории многомерных три-тканей // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16. № 1. С. 13–38.
2. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Дифференциальная геометрия тканей типа Лагранжа // Известия высших учебных заведений. Математика. 2007. № 12. С. 19–32.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432 с.

4. Матвеев О. А., Матвеева Н. В., Паншина А. В. О квазигрупповой теории абелевых и симметрических механических систем // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Выпуск 9. М.: МГТУ СТАНКИН, Институт математического моделирования Российской академии наук, 2005. С. 22–25.
5. Матвеев О. А., Паншина А. В. Геометрические и алгебраические свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–математика. 2011. № 3. С. 31–40.
6. Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I. Non-Associative Algebra and its Applications. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2006. 516 p. (Series: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).
7. Tolstikhina G. A., Shelehov A. M. Left Bol three-webs with the IC-property // Russian Mathematics. 2013. Vol. 57. Iss. 5. P. 20–28.
8. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
9. Шелехов А. М., Лазарева В. Б., Уткин А. А. Криволинейные три-ткани: монография. Тверь: Тверской государственный университет, 2013. 232 с.

REFERENCES

1. Akivis M. A., Shelekhov A. M. [Cartan–Laptev method in the theory of multidimensional three-webs]. In: *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2010, vol. 16, no. 1, pp. 13–38.
2. Akivis M. A., Gol'dberg V. V. [Differential geometry of Lagrange-like webs]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [Russian Mathematics], 2007, no. 12, pp. 19–32.
3. Arnol'd V. I. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 432 p.
4. Matveyev O. A., Matveyeva N. V., Panshina A. V. [About quasi-group theory of Abelian and symmetric mechanical systems]. In: *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem. Vypusk 9* [Fundamental physical and mathematical problems and modeling of technical and technological systems. Issue 9]. Moscow, MSTU STANKIN, Institute for Mathematical Modelling RAS Publ., 2005, pp. 22–25.
5. Matveyev O. A., Panshina A. V. [The geometric and algebraic properties of the systems of ordinary differential equations]. In: *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Fizika–matemati*ka [Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics], 2011, no. 3, pp. 31–40.
6. Sabinin L., Sbitneva L., Shestakov I. Non-Associative Algebra and its Applications. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC Publ., 2006. 516 p. (Series: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol. 246).
7. Tolstikhina G. A., Shelehov A. M. Left Bol three-webs with the IC-property. In: *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, iss. 5, pp. 20–28.
8. Trofimov V. V., Fomenko A. T. *Algebra i geometriya integriruemykh gamil'tonovykh differentsial'nykh uravnenii* [Algebra and geometry of integrable Hamiltonian differential equations]. Moscow, Faktorial Publ., 1995. 448 p.
9. Shelekhov A. M., Lazareva V. B., Utkin A. A. *Krivolineinye tri-tkani* [Curvilinear three-webs]. Tver, Tver State University Publ., 2013. 232 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ищенко Ольга Сергеевна – студент физико-математического факультета Московского государственного областного университета;
e-mail: mospretty@gmail.com;

Матвеев Олег Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета;
e-mail: matveyevoa@mail.ru;

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Olga S. Ishchenko – student at the Faculty of Physics and Mathematics, Moscow Region State University;
e-mail: mospretty@gmail.com;

Oleg A. Matveyev – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Moscow Region State University;
e-mail: matveyevoa@mail.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Ищенко О. С., Матвеев О. А. О локальных 3-тканях, присоединённых к гамильтоновым системам на кокасательном расслоении над гладким многообразием // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика и математика. 2019. № 4. С. 8–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-8-16

FOR CITATION

Ishchenko O. S., Matveyev O. A. On local three-webs added to Hamilton systems on a cotangent bundle above a smooth manifold. In: *Bulletin of Moscow Region State University. Series: Physics and Mathematics.* 2019, no. 4, pp. 8–16.
DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-8-16