

РАЗДЕЛ II. ФИЗИКА

УДК 538.951

DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-17-21

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ

Соколов В. В.

МИРЭА – Российский технологический университет

119454, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78, Российская Федерация

Аннотация. В рамках равновесной термодинамики получен изотермический принцип виртуальных работ для сжимаемого жидкого сплошного тела. Выведены условия механического равновесия внутри и на поверхности сжимаемого жидкого сплошного тела. Полученный изотермический принцип виртуальных работ представляет основу для описания динамики баротропной магнитной жидкости.

Ключевые слова: сжимаемое жидкое сплошное тело, виртуальная работа, виртуальное смещение, лагранжева вариация, удельная свободная энергия, соотношение Гиббса, условие равновесия

ISOTHERMAL PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK

V. Sokolov

MIREA – Russian Technological University

prosp. Vernadskogo 78, 119454 Moscow, Russian Federation

Abstract. The isothermal principle of virtual work for a compressible liquid continuum is derived using the equilibrium thermodynamics. The conditions for a mechanical equilibrium in the volume and on the surface of a compressible liquid continuum are obtained.

Keywords: *compressible* liquid continuum, virtual work, virtual displacement, Lagrangian variation, free energy density, Gibbs relation, equilibrium condition

Различные модели сплошных сред построены на базе принципа виртуальных работ. Этот принцип широко используется в современных исследованиях для решения различных проблем физики, материаловедения и других. Новый этап

применения принципа виртуальных работ связан с применением методов современной геометрии [1-4].

В монографии [5] представлен вывод термодинамического принципа виртуальных работ для общего случая, когда необходимо было получить условие и механического и теплового равновесия одновременно, при этом рассматривалось жидкое или твёрдое сплошное тело объёма V с поверхностью Σ , помещённое в термостат с температурой T_0 . Тело подвергается действию заданных внешних сил с объёмной плотностью \vec{f} и с поверхностной плотностью \vec{F} .

Целью данной работы является вывод изотермического принципа виртуальных работ, когда выполнено условие теплового равновесия, то есть температура во всех точках тела одинакова и остаётся всё время неизменной. Изотермический принцип виртуальных работ в такой ограниченной ситуации формулируется следующим образом:

Если изотермическое сплошное тело находится в состоянии механического равновесия, то для любого виртуального смещения тела из этого состояния виртуальная работа внешних сил меньше или равна виртуальной свободной энергии тела, то есть:

$$\delta A^{(e)} \leq \delta \Phi,$$

где $\Phi = E - TS$ – свободная энергия тела, E , S – внутренняя энергия и энтропия тела, T – постоянная по всему телу температура. Если изотермическое сплошное тело находится в состоянии, не являющемся состоянием механического равновесия, то найдётся виртуальное смещение из этого неравновесного состояния, для которого:

$$\delta A^{(e)} > \delta \Phi.$$

Виртуальная работа внешних сил \vec{F} , \vec{f} определяется выражением

$$\delta A^{(e)} = \int_V \rho (f_k \delta^* q_k) dV + \int_{\Sigma} (F_k \delta^* q_k) d\Sigma, \quad (1)$$

в котором виртуальное смещение индивидуальных точек сплошного тела из начального состояния описывается лагранжевой вариацией координат $\delta^* \vec{q}$, где ρ – плотность массы тела.

Рассмотрим сжимаемое жидкое сплошное тело. Свободная энергия Φ такого тела определяется как интеграл, берущийся по объёму V тела от удельной плотности свободной энергии $\phi(\rho, T)$:

$$\Phi = \int_V \rho \phi(\rho, T) dV.$$

Согласно выше сформулированному изотермическому принципу виртуальных работ, для всех обратимых виртуальных смещений из состояния равновесия должно выполняться вариационное равенство:

$$\int_V \rho \delta^* \varphi dV = \int_V \rho (f_k \delta^* q_k) dV + \int_{\Sigma} (F_k \delta^* q_k) d\Sigma, \quad (2)$$

где $\delta^* \varphi$ – лагранжева вариация удельной свободной энергии, которая определяется следующим выражением:

$$\delta^* \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \delta^* \rho = - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \rho \nabla \cdot \delta^* \vec{q}.$$

Здесь мы использовали уравнение непрерывности, записанное в лагранжевых вариациях, то есть $\delta^* \rho = -\rho \nabla \cdot \delta^* \vec{q}$. Теперь преобразуем интеграл в левой части уравнения (2):

$$\int_V \rho \delta^* \varphi dV = - \int_V \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \nabla \cdot \delta^* \vec{q} dV = - \int_{\Sigma} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \delta^* q_n d\Sigma + \int_V \left(\delta^* \vec{q} \nabla \left(\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \right) dV.$$

В результате основное вариационное равенство (2) примет вид:

$$\int_{\Sigma} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \delta^* q_n d\Sigma - \int_V \left(\delta^* \vec{q} \nabla \left(\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \right) dV + \int_V \rho (\vec{f} \delta^* \vec{q}) dV + \int_{\Sigma} (\vec{F} \delta^* \vec{q}) d\Sigma = 0. \quad (3)$$

Полученное равенство должно выполняться при произвольных смещениях $\delta^* \vec{q}$. Приравнявая нулю коэффициенты при вариации в объёмных интегралах, приходим к следующему условию объёмного изотермического механического равновесия:

$$\rho \vec{f} - \nabla \left(\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (4)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при вариации в поверхностных интегралах, получим следующее условие поверхностного изотермического механического условия равновесия:

$$\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \vec{n} + \vec{F} = 0. \quad (5)$$

Здесь \vec{n} означает внешнюю нормаль к поверхности Σ объёма V . Полученные условия механического равновесия (4) и (5) показывают, что давлением p внутри рассматриваемого жидкого тела является величина

$$p = \left(\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_T. \quad (6)$$

Согласно основному термодинамическому соотношению Гиббса [6], для дифференциала удельной внутренней энергии ε имеем соотношение:

$$d\varepsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Здесь s – удельная энтропия. Удельная свободная энергия, определяемая соотношением $\varphi = \varepsilon - Ts$, позволяет основное термодинамическое тождество Гиббса представить в виде:

$$d\varphi = -sdT + \frac{P}{\rho^2} d\rho,$$

из которого следует формула для термодинамического давления

$$p = \left(\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_T,$$

совпадающая с формулой (6), полученной из условия механического равновесия в объёме.

В заключение приведём полную формулировку задачи на определение равновесного напряжённого состояния изотермического, с заданной температурой T , жидкого тела, находящегося под действием произвольных внешних сил $\vec{r}\bar{f}$ и \vec{F} .

Внутри объёма жидкого тела выполняется условие механического равновесия:

$$\nabla p = \rho \vec{f},$$

в котором

$$p = \left(\rho^2 \frac{\partial \varphi(\rho, T)}{\partial \rho} \right)_T,$$

причём удельная свободная энергия φ считается известной функцией.

На поверхности Σ жидкого тела выполняется граничное условие:

$$p|_{\Sigma} = -F_n.$$

Полученный изотермический принцип виртуальных работ представляет основу для описания динамики баротропной магнитной жидкости.

Статья поступила в редакцию 11.10.2019 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Como M. Virtual displacements principle, existence and uniqueness for elastic no tension bodies // *Meccanica*. 2017. Vol. 52. Iss. 6. P. 1397–1405.
2. Eugster S., Glocker C. Determination of the Transverse Shear Stress in an Euler-Bernoulli Beam Using Non-Admissible Virtual Displacements // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 14. Iss. 1. P. 187–188.
3. Freund J., Salonen E.-M. Sensitized principle of virtual work and the single-element strain energy test // *Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)*. 2016. Vol. 49. Iss. 1. P. 1–13.
4. Iurato G., Ruta G. On the role of virtual work in Levi-Civita's parallel transport // *Archive for History of Exact Sciences*. 2016. Vol. 70. Iss 5. P. 553–565.
5. Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988. 232 с.

6. Базаров И. П., Геворкян Э. В., Николаев П. Н. Термодинамика и статистическая физика. М.: Изд-во МГУ, 1986. 312 с.

REFERENCES

1. Como M. Virtual displacements principle, existence and uniqueness for elastic no tension bodies. In: *Meccanica*, 2017, vol. 52, iss. 6, pp. 1397–1405.
2. Eugster S., Glocker C. Determination of the Transverse Shear Stress in an Euler-Bernoulli Beam Using Non-Admissible Virtual Displacements. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 187–188.
3. Freund J., Salonen E.-M. Sensitized principle of virtual work and the single-element strain energy test. In: *Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)*, 2016, vol. 49, iss. 1, pp. 1–13.
4. Iurato G., Ruta G. On the role of virtual work in Levi-Civita's parallel transport. In: *Archive for History of Exact Sciences*, 2016, vol. 70, iss 5, pp. 553–565.
5. Tolmachev V. V., Golovin A. M., Potapov V. S. *Termodinamika i elektrodinamika splushnoi sredy* [Thermodynamics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Moscow State University Publ., 1988. 232 p.
6. Bazarov I. P., Gevorkyan E. V., Nikolaev P. N. *Termodinamika i statisticheskaya fizika* [Thermodynamics and statistical physics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1986. 312 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Соколов Виктор Васильевич – доктор физико-математических наук, советник по научной работе МИРЭА – Российского технологического университета;
e-mail: v_sokolov@mirea.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Viktor V. Sokolov – Doctor in Physical and Mathematical Sciences, Science Advisor, MIREA – Russian Technological University;
e-mail: v_sokolov@mirea.ru

ПРАВИЛЬНАЯ ССЫЛКА НА СТАТЬЮ

Соколов В. В. Изотермический принцип виртуальных работ // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2019. № 4. С. 17–21.

DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-17-21

FOR CITATION

Sokolov V. V. Isothermal principle of virtual work. In: *Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics*, 2019, no. 4, pp. 17–21.

DOI: 10.18384/2310-7251-2019-4-17-21